Minicurso EDOs em Espaços de Banach

$$\begin{cases} x'(t) = Ax + f, & t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s)ds$$

Prof. Luiz Viana e Prof. Reginaldo Demarque

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Pós-Graduação em Matemática

12 à 21 de fevereiro de 2025

Sumário

Sumário

Apresentação do Minicurso

- **Ementa**: Definição de Espaços de Banach. Exponencial de Operadores Lineares Limitados. Semigrupos de classe C^0. Gerador Infinitesimal. Existência e Unicidade para o PVI. Resolvente de um operador. Semigrupos das Contrações. O Teorema de Hille-Yosida. Aplicações e perspectivas de pesquisa.
- **Material**: https://reginaldodr.mat.br/semigrupos/minicurso-2025-verao

Sumário

Bibliografia

Alvércio Moreira Gomes
Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução
Editora UFRJ, 2ª ed., Rio de Janeiro, 2005.
Edição digital disponibilizada aqui

Amnon Pazy
Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.
Vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.

S. Kesavan
Topics in Functional Analysis and Applications
New Age International Ltd, 2ª ed., New Delhi, 2015.

Lawrence C. Evans
Partial differential equations
volume 19. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.

Morris W. Rirsch and Stephen Smale
Differential equations, dynamical systems, and linear algebra
ACADEMIC PRESS. INC., 1974.

Sumário

Definição 1

Seja X um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Uma aplicação

$$\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

é dita uma norma se, para quaisquer $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, as seguintes condições se verificarem:

a) $\|x\| \geq 0$;
b) Se $\|x\| = 0$, então $x = 0$;
c) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$;
d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Nesse caso, o par $(X, \|\cdot\|)$ é dito um espaço normado .

Sequências em Espaços Normados

Definição 2

Sejam X um espaço normado. Dizemos que uma sequência $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ em X

a. **converge** para $a \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que
$$n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq n_0 \implies \|x_n - a\| < \varepsilon.$$

b. é **de Cauchy** se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $n_1 \in \mathbb{N}$ de modo que
$$m, n \in \mathbb{N} \text{ e } m, n \geq n_1 \implies \|x_m - x_n\| < \varepsilon.$$

Exercício

(a) Em um espaço normado X, mostre que toda sequência convergente é uma sequência de Cauchy;

(b) Exiba um espaço normado Y no qual exista uma sequência de Cauchy que não converge em Y (veja o Exemplo A.14 das Notas do Minicurso).

Definição 3

Um espaço normado X é dito um espaço de Banach se toda sequência de Cauchy em X convergir para um elemento de X.

Exemplos:

(a) Para cada inteiro $n \geq 1$, $\mathbb{K}^n$ é um espaço de Banach, considerando a norma

$$\|x\|_0 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2},$$

definida para cada $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Na verdade, $\mathbb{K}^n$ é um espaço de Banach se considerarmos qualquer outra norma (Exercício!).

b Dados dois inteiros positivos $m, n \in \mathbb{N}$, o espaço das matrizes $m \times n$, denotado por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é um espaço de Banach, considerando a norma

$$\|A\| = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \right)^{1/2},$$

definida para cada $A = [a_{jk}]_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Na verdade, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é um espaço de Banach se considerarmos qualquer outra norma (Exercício!).

Aplicações Contínuas

Definição 4

Sejam X e Y dois espaços normados. Dizemos que uma função $f : X \longrightarrow Y$ é contínua em $a \in X$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$x \in X \text{ e } \|x - a\|_X < \delta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

Definição 5

Sejam X e Y dois espaços normados. Denotaremos por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares e contínuas de X em Y, com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas pontualmente. Cabe observar que:

a) Quando $X = Y$, escreveremos $\mathcal{L}(X)$ em vez de $\mathcal{L}(X, X)$;
b) Quando $Y = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X', que é conhecido como o dual topológico de X;
c) O conjunto de todos os funcionais lineares $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}$, contínuos ou não, será denotado por X^*, que é conhecido como o dual algébrico de X (veja o Apêndice A.3 das Notas do Minicurso).

Aplicações Lineares Limitadas

Dados dois espaços normados X e Y, e uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$, temos a seguinte equivalência:

$$T \text{ é contínua } \iff \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < +\infty.$$

Definição 6

Sejam X e Y dois espaços normados. Uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$ é dita limitada se

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} < \infty. \tag{1}$$

Em outras palavras, uma aplicação linear é limitada se, e somente se, é contínua.

Exemplo:

Dados dois espaços normados X e Y, a aplicação

$$T \in \mathcal{L}(X;Y) \longmapsto \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathcal{L}(X;Y)$, denotada por $\|T\|_{\mathcal{L}(X;Y)}$. Em particular,

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \|x\|_X$$

É conhecido que

$\mathcal{L}(X;Y)$ é um espaço de Banach $\iff$ Y é um espaço de Banach.

Sumário

A função exponencial

A função logaritmo natural é a bijeção contínua (com inversa contínua), definida por

$$\log : x \in (0, +\infty) \longmapsto \int_1^x \frac{1}{t}\, dt \in \mathbb{R}.$$

A inversa de $\log : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ é a função exponencial $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, e usualmente escrevemos

$$e^x := \exp(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

Cabe recordar que:

- $e^0 = 1$;
- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$;
- $(e^x)' = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução do PVI

Dados $a \in \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, podemos constatar que a única função $x : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ solução do **problema de valor inicial**

$$\begin{cases} x'(t) = ax, \ \ t \in [0, +\infty); \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

é dada por $x(t) = x_0 e^{at}$.

Propriedades das Soluções

Denotando $x(t) = S(t)x_0$, fazemos as seguintes considerações:

a. Para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$S(t) : \underbrace{x_0}_{\text{dado inicial}} \in \mathbb{R} \longmapsto \underbrace{S(t)x_0}_{\text{Solução do PVI}} \in \mathbb{R}$$

   é uma função linear.

b. $S(0)x_0 = x(0) = x_0$, para cada x_0 fixado em $\mathbb{R}$, ou seja, $S(0)$ é exatamente a função identidade $\mathrm{I} : x \in \mathbb{R} \longmapsto x \in \mathbb{R}$;

c. Fixados $t, s \in [0, +\infty)$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, temos

$$S(t+s)x_0 = S(t)S(s)x_0.$$

Sistema de Equações

Dada uma matriz A em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ considere o sistema de EDOs

$$X'(t) = AX,\ \ t \in [0, +\infty),$$

isto é,

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

Sistema de Equações

Dada uma matriz A em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ considere o PVI

$$\begin{cases} X'(t) = AX, \ \ t \in [0, +\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

A solução procurada é um caminho

$$X : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}).$$

Em analogia ao caso unidimensional

$$X(t) = e^{tA} X_0$$

Exponencial de Matrizes

Recordemos que a norma em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é dada por

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

para cada $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Definição 7

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A exponencial de A é dada por

$$e^{A} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!} = \mathrm{I} + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \cdots . \tag{2}$$

(a) A série de matrizes, dada em (2), é absolutamente convergente, isto é,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\|A^j\|}{j!}$$

é sempre uma série de números reais convergente.

(b) $S(t)X_0 := e^{tA}X_0$ a única solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X'(t) = AX, \ t \in [0, +\infty); \\ X(0) = X_0 \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}), \end{cases}$$

- A aplicação $S(t) : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ possui propriedades análogas àquelas obtidas no caso unidimensional. Mais precisamente,
    - Para cada $t \in [0, +\infty)$, $S(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}))$;
    - $S(0) : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ é o operador identidade;
    - Para quaisquer $t, s \in [0, +\infty)$, vale $S(t+s) = S(t)S(s)$.
- Quantitativamente, resolver sistemas de equações diferenciais lineares requer identificar a matriz na forma canônica de Jordan similar a A. Para uma análise do comportamento das soluções, a abordagem espectral de A é uma estratégia eficaz. (veja [Morris, 1974]).

EDOs para operadores lineares

Parece natural pensar sobre a resolução e a análise do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = T(\mathbf{x}), \; t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \in X, \end{cases}$$

onde X é um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$.

Definição 8

Sejam X um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(X)$. A exponencial da T é dada por

$$e^{T} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T^j}{j!}, \tag{3}$$

onde $T^0 := \mathrm{I}$ e $T^{n+1} := T \circ T^n$ para todo inteiro $n \geq 0$.

- Não é difícil constatar que a série que define e^T converge absolutamente.
- Como $\mathcal{L}(X)$ é um espaço de Banach, $e^T \in \mathcal{L}(X)$ encontra-se bem definida.
- Explorando a noção de semigrupo uniformemente contínuo, concluiremos, mais adiante, que $\mathbf{x}(t) = e^{tT}\mathbf{x_0}$ é a única solução de

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = T(\mathbf{x}), \ t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \in X. \end{cases}$$

Neste minicurso, o principal objetivo é obter uma condição necessária e suficiente para que o problema

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = A(\mathbf{x}), \ t \in [0, +\infty); \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0} \in X, \end{cases}$$

possua solução, onde

- X é um espaço de Banach.
- $A : D(A) \longrightarrow X$ é uma aplicação linear (não necessariamente limitada) definida em um subespaço vetorial $D(A)$ de X.

Isto será garantido pelo Teorema de Hille-Yosida, que representa um marco muito importante da teoria geral dos semigrupos.

Sumário

Definição 9

Seja X um espaço de Banach. Dizemos que a aplicação $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores limitados em X quando:

1. $S(0) = \mathrm{Id}$;
2. $S(t + s) = S(t)S(s), \ \forall t, s \in [0, +\infty)$;

   Dizemos que S é de classe C^0 ou fortemente contínuo se
3. $\lim\limits_{t \to 0^+} \|(S(t) - \mathrm{Id})x\|_X = 0, \ \forall x \in X$.

   Dizemos que S é uniformemente contínuo se
4. $\lim\limits_{t \to 0^+} \|S(t) - \mathrm{Id}\,\|_{\mathcal{L}(X)} = 0$.

Exemplo

1. A exponencial e^{tA}, quando $A \in \mathcal{L}(X)$, é um semigrupo.
2. Seja $X = C_b(\mathbb{R})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente contínuas e limitadas, com a norma do $\sup$, isto é,
$$\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$
Então $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ dada por $[S(t)f](s) = f(t+s)$, onde $t \in [0, +\infty)$, $s \in \mathbb{R}$ e $f \in X$, define um semigrupo de classe C^0.

Princípio da Limitação Uniforme

Teorema 10 (Banach-Steinhaus)

Sejam X e Y dois espaços normado, com X Banach, e consideremos uma família

$$\mathcal{F} = \{T_i : X \longrightarrow Y; i \in I\} \subset \mathcal{L}(X, Y),$$

não necessariamente enumerável, com a seguinte propriedade: para cada $x \in X$, temos

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\|_Y < \infty.$$

Então

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Em outras palavras, a limitação pontual da família $\mathcal{F}$ implica a sua limitação uniforme.

Proposição 11

Se S é um semigrupo de classe C^0 em X, então existem $\mu \geq 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\mu t}, \ \forall t \geq 0. \tag{4}$$

Em particular, $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uma função limitada em todo intervalo $[0, T]$.

Corolário 12

Todo semigrupo de classe C^0 é fortemente contínuo em $[0, +\infty)$, i.e., para todo $x \in X$,

$$t \in [0, +\infty) \longmapsto S(\cdot)x \in X \text{ é contínua.}$$

Gerador Infinitesimal

Definição 13

Seja S um semigrupo de classe C^0 em X. O gerador infinitesimal de S é o operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}$$

$$Ax := \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, \ \forall x \in D(A).$$

Vamos designar por A_h o operador linear limitado

$$A_h x = \frac{S(h)x - x}{h}, \ \forall x \in X.$$

Exercício

$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.

Existência e Unicidade de um PVI

Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal. Se $x_0 \in D(A)$, então $x(t) = S(t)x_0$ define uma única solução do PVI

$$\begin{cases} x'(t) = Ax, \ \ t \in [0, +\infty) \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Além disso,

$$x \in C^0([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); X)$$

Se $x_0 \notin D(A)$ em X, então $x(t) = S(t)x_0$ não é diferenciável. Neste caso, dizemos que $x = x(t)$ é uma solução generalizada (fraca) do PVI.

Teorema 14

Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal. Dado $x \in D(A)$, então

$$S(\cdot)x \in C^0([0,+\infty); D(A)) \cap C^1([0,+\infty); X)$$

e

$$\frac{d}{dt}(S(t)x) = AS(t)x = S(t)Ax.$$

Exercício

Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal. Se $x \in D(A)$ mostre que

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\xi)x \, d\xi = \int_s^t S(\xi)Ax \, d\xi$$

Integral Vetorial em Espaços de Banach

Sejam X um espaço de Banach e $u : [a,b] \longrightarrow X$ uma função contínua. Podemos definir a integral de u através das somas de Riemann

$$\int_a^b \underbrace{u(t)}_{X}\, dt = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} u(\xi_i)\Delta t_i \in X,$$

onde

- P é a partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ de $[a,b]$.
- $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$.
- $\|P\| = \max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta t_i$.

Proposição 15

Sejam X um espaço de Banach e $u : [a, b] \longrightarrow X$ é contínua, então

a. $\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\| \leq \int_a^b \|u(t)\|\, dt$

b. Se $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, então
$$T\left(\int_a^b u(t)\, dt\right) = \int_a^b T(u(t))\, dt \in Y.$$

c. $$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \int_a^{a+h} u(t)\, dt = u(a)$$

Proposição 16

Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal, então para todo $x \in X$,

(a) $D(A)$ é denso em X.

(b) A tem o gráfico fechado em $X \times X$.

Dado um operador $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, definimos seu gráfico como

$$G_A := \{(x, Ax);\ x \in D(A)\}$$

Dizemos que A tem o gráfico fechado (ou simplesmente é fechado) quando seu gráfico é fechado em $X \times X$, isto é, quando para cada sequência $\{(x_n, Ax_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset G_A$ satisfazendo

$$x_n \to x \in X \text{ e } Ax_n \to y \in X,$$

temos que $x \in D(A)$ e $Ax = y$.

Lema 17

Seja $S(t)$ um semigrupo de classe C^0 em X e A o seu gerador infinitesimal, então para todo

$$\int_0^t S(\xi)x\,d\xi \in D(A) \text{ e } A\left(\int_0^t S(\xi)x\,d\xi\right) = S(t)x - x$$

.

Esta última proposição nos dá uma condição necessária para que um operador A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo.

Proposição 18 (Unicidade)

Se $S_1(t)$ e $S_2(t)$ são dois semigrupos de classe C^0 em X com o mesmo gerador infinitesimal A, então $S_1 = S_2$.

Sumário

Seja X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado (não necessariamente contínuo). Chamamos de espectro de A, o seguinte conjunto

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K};\ \lambda\,\mathrm{I} - A \text{ não é bijetor }\}.$$

E o conjunto $\rho(A) = \mathbb{K} \setminus \sigma(A)$ é dito ser o conjunto resolvente de A. Para Cada $\lambda \in \rho(A)$, definimos o operador resolvente de A por

$$R_\lambda := (\lambda\,\mathrm{I} - A)^{-1} : X \longrightarrow D(A)$$

Teorema do Gráfico Fechado $\Rightarrow R_\lambda$ é linear e contínuo.

- R_λ é linear, (T linear e bijetora $\Rightarrow T^{-1}$ linear.) (Exercício!)
- A é tem gráfico fechado $\Rightarrow R_\lambda$ tem gráfico fechado. Basta ver que:

$$AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x, \ \forall x \in X.$$

Teorema 19 (Gráfico Fechado)

Sejam X e Y dois espaços de Banach, e consideremos uma aplicação linear $T : X \longrightarrow Y$. Se T tem o gráfico fechado, então T é contínua.

Teorema 20

Seja X um espaço de Banach. Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupos de contrações se, e somente se, são válidas as seguintes afirmações:

a. A tem gráfico fechado e é densamente definido, i.e., $\overline{D(A)} = X$;
b. $(0, +\infty) \subset \rho(A)$ e, para todo $\lambda > 0$, temos

$$\|R_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Condição Necessária

Hipótese

A é o gerador infinitesimal de um semigrupos de contrações $S(t)$.

- Proposição 16 $\Longrightarrow$ item a
- Para cada $\lambda > 0$ e para cada $x \in X$ a seguinte integral é absolutamente convergente

$$L_\lambda x := \int_0^\infty e^{-\lambda\xi} S(\xi) x \, d\xi$$

- $L_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ e $\|L_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$
- $L_\lambda = R_\lambda$.

L_λ coincide com R_λ

Para provarmos que R_λ coincide com L_λ, devemos ter:

- (i) $(\lambda \mathrm{I} - A)L_\lambda \equiv \mathrm{I}$ em X;
- (ii) $L_\lambda(\lambda \mathrm{I} - A) = \mathrm{I}$ em $D(A)$.

Equivalentemente, verificaremos que

$$A(L_\lambda x) = \lambda L_\lambda x - x \text{ para todo } x \in X$$

e

$$L_\lambda(Ax) = \lambda L_\lambda x - x \text{ para todo } x \in D(A).$$

Lembrete

Para cada $h > 0$ fixado, temos $A_h \in \mathcal{L}(X)$, onde

$$A_h(x) := \frac{S(h)x - x}{h}, \quad \text{para cada } x \in X.$$

O gerador infinitesimal $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ do semigrupo $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ é dado por

$$Ax := \lim_{h \to 0^+} A_h x, \quad \text{para cada } x \in D(A).$$

Exercício

Se $\lambda \in \rho(A)$, como $R_\lambda = (\lambda \mathrm{I} - A)^{-1}$, então

$$AR_\lambda x = \lambda R_\lambda x - x, \ \forall x \in X$$

e

$$R_\lambda A x = \lambda R_\lambda x - x, \ \forall x \in D(A)$$

Em particular,

$$AR_\lambda x = R_\lambda A x, \ \forall x \in D(A)$$

Aproximação de Yosida

Definição 21

Seja $\lambda \in (0, +\infty) \cap \rho(A)$. A aproximação de Yosida de A é o operador $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, definido por

$$A_\lambda := \lambda A R_\lambda = \lambda^2 R_\lambda - \lambda \mathrm{I}.$$

Se A satisfaz as condições a e b do enunciado do Teorema de Hille-Yosida, então: e^{tA_λ} é um semigrupo uniformemente contínuo de contrações, isto é,

$$\|e^{tA_\lambda}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 \quad \text{e} \quad \|e^{tA_\lambda} - \mathrm{I}\,\|_{\mathcal{L}(X)} \to 0, \ \text{ quando } t \to 0^+.$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda R_\lambda y = y, \ \forall\, y \in X.$$

- Se $y \in D(A)$, então

$$\|\lambda R_\lambda y - y\|_X \overset{b}{\leq} \frac{1}{\lambda}\|Ay\|_X \to 0 \text{ quando } \lambda \to +\infty.$$

- Se $y \in X \setminus D(A)$, dado $\varepsilon > 0$, tome $x_0 \in D(A)$ suficientemente próximo de y.
- Novamente por b, temos

$$\|\lambda R_\lambda y - y\|_X < \varepsilon.$$

Dada a família $\{A_\lambda; \lambda \in (0,+\infty) \cap \rho(A)\}$ de aproximações de Yosida de A, temos

$$\lim_{\lambda\to+\infty} A_\lambda x = Ax, \ \forall\, x \in D(A).$$

Esboço da Demonstração da Condição Suficente

A demonstração nas notas é divida em 6 etapas.

Esboço da Demonstração da Condição Suficente

A demonstração nas notas é divida em 6 etapas.

Episódio IV: Uma nova Esperança

Podemos definir $S : [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ por

$$S(t)x := \lim_{\lambda \to +\infty} e^{tA_\lambda} x, \ \forall x \in X.$$

Além disso, para cada $T > 0$ esta convergência é uniforme em $[0, T]$.

Episódio V: O Semigrupo Contra-Ataca

Mostrar que $S(t)$ é um semigrupo de classe C^0 de contrações.

- e^{tA_λ} é uma contração $\Longrightarrow S(t)$ é uma contração.
- $S(0) = \mathrm{I}$
- Dados $t, s > 0$, note que

$$\|S(t+s)x - S(t)S(s)x\| \leq \left\|S(t+s)x - e^{(t+s)A_\lambda}x\right\| + \left\|e^{(t+s)A_\lambda}x - e^{tA_\lambda}S(s)x\right\| + \left\|e^{tA_\lambda}S(s)x - S(t)S(s)x\right\|$$

- Para ver que $S(t)$ é C^0, note que

$$\|S(t)x - x\| \leq \underbrace{\left\|S(t)x - e^{tA_\lambda}x\right\|}_{\substack{\text{converge}\\ \text{uniforme em } [0,T]}} + \underbrace{\left\|e^{tA_\lambda}x - x\right\|}_{\substack{\text{Semigrupo}\\ \text{uniformemente contínuo}}}$$

Episódio VI: O Retorno de A

A é o gerador infinitesimal de $S(t)$.

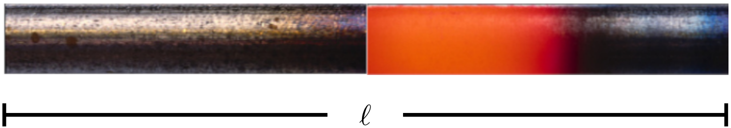
- Seja B o gerador infinitesimal de $S(t)$.
- Vamos provar que $D(A) \subset D(B)$ e $Ax = Bx$: dado $x \in D(A)$, note que

$$
\begin{aligned}
hB_h(x) = S(h)x - x &= \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^h e^{tA_\lambda}(A_\lambda x - Ax)\, dt + \lim_{\lambda \to +\infty} \int_0^h e^{tA_\lambda} Ax\, dt \\
&= \int_0^h S(t)Ax\, dt
\end{aligned}
$$

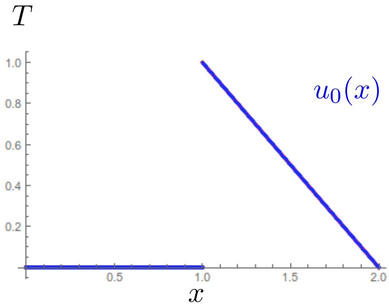
- $D(B) \subset D(A)$: dado $x \in D(B)$
  - $1 \in \rho(A) \implies$ existe $y \in D(A)$ tal que $(I - A)y = (I - B)x$.
  - $y \in D(B) \implies (I - B)(y - x) = 0$
  - $1 \in \rho(B) \implies x = y$.

Sumário

A equação do Calor



$$\begin{cases} u_t(x,t) - a u_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,T) \\ u(0,t) = u(L,\ell) = 0, & t \in (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,L) \end{cases}$$



Espaços Funcionais

Espaço de Lebesgue

$$L^2(0,\ell) = \left\{ f : [0,\ell] \longrightarrow \mathbb{R};\ \int_0^\ell |f(x)|^2\, dx < +\infty \right\},$$

com a norma

$$\|f\|_{L^2(0,\ell)} := \left(\int_0^\ell |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Espaços de Sobolev

$$H^1(0,\ell) = \left\{ f \in L^2(0,\ell);\ f' \in L^2(0,\ell) \right\},$$

$$H_0^1(0,\ell) = \left\{ f \in H^1(0,\ell);\ f(0) = f(\ell) = 0 \right\}.$$

$$H^2(0,\ell) = \left\{ f \in L^2(0,\ell);\ f', f'' \in L^2(0,\ell) \right\},$$

O problema no contexto de Semigrupos

Definimos $X = L^2(0,\ell)$ e $D(A) := H_0^1(0,\ell) \cap H^2(0,\ell)$ e

$$A : f \in D(A) \longmapsto -af'' \in X$$

Para cada $u = u(x,t)$ tal que $u(\cdot,t) \in X$ denotaremos por

$$\mathbf{u} : t \in [0,+\infty) \longmapsto u(\cdot,t) \in X.$$

Dado $u_0 \in D(A)$, podemos reescrever o problema do calor como

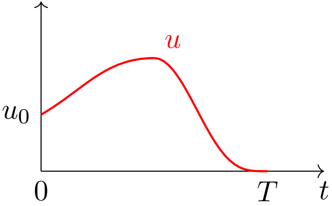
$$\begin{cases} \mathbf{u}'(t) = A\mathbf{u}, \quad t \in [0,\infty) \\ \mathbf{u}(0) = u_0. \end{cases}$$

Dados $T > 0$ e $\omega \subset (0,1)$, considere o problema degenerado:

$$\begin{cases} u_t - (x^\alpha u_x)_x = h\chi_\omega, & \text{em } (0,T) \times (0,1), \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & \text{em } (0,T), \\ u(0,x) = u_0(x), & \text{em } (0,1), \end{cases} \qquad (P)$$

Dizemos que este problema é nulamente controlável no tempo T quando existe um controle $h \in L^2(Q_\omega)$ tal que o estado associado u satisfaz a condição de controle nulo:

$$u(T,x) = 0, \ \forall x \in (0,1).$$



J.evol.equ. 6 (2006) 161–204
1424–3199/06/020161–44
DOI 10.1007/s00028-006-0222-6

Journal of Evolution Equations

Carleman estimates for degenerate parabolic operators with applications to null controllability

F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa and G. Fragnelli

2.2. *Well-posedness*

In this subsection, we study the well-posedness of the linear degenerate parabolic equation

$$\begin{cases} u_t - (a(x)u_x)_x + c(t,x)u = h(t,x)\chi_{(\alpha,\beta)}(x), \\ u(t,1) = 0, \\ \begin{cases} u(t,0) = 0, & \text{for } (WDP), \\ \text{or} & \\ (au_x)(t,0) = 0, & \text{for } (SDP), \end{cases} \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.14}$$

where $(t,x) \in (0,T) \times (0,1)$, $u_0 \in L^2(0,1)$ and $h \in L^2((0,T) \times (0,1))$.

In order to prove the well-posedness of (2.14), we define the operator $(A, D(A))$ by

$$D(A) = H_a^2 \text{ and } \forall\, u \in D(A),\ Au := (au_x)_x. \tag{2.15}$$

Observe that if $u \in D(A)$ (or even $u \in H_a^1(0, 1)$), then u satisfies the boundary conditions $u(0) = u(1) = 0$, in case (WDP), and $u(1) = 0$, $(au_x)(0) = 0$, in case (SDP). For the operator $(A, D(A))$ the following proposition holds:

PROPOSITION 2.5. (see [10]) *The operator* $A : D(A) \to L^2(0, 1)$ *is closed, self-adjoint and negative with dense domain.*

Hence A is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup e^{tA} on $L^2(0, 1)$.

Nonlinear Analysis: Real World Applications 66 (2022) 103519

Contents lists available at ScienceDirect

Nonlinear Analysis: Real World Applications

www.elsevier.com/locate/nonrwa

Boundary null controllability of degenerate heat equation as the limit of internal controllability

B.S.V. Araújo[a], R. Demarque[b,*], L. Viana[c]

1. Introduction and statement of the main result

Take $T > 0$, $\alpha \in (0,2)$ and $\varepsilon \in (0,1)$. Let us set

$$Q := (0,T) \times (0,1), \quad \omega_\varepsilon := (1-\varepsilon, 1) \text{ and } Q_\varepsilon := (0,T) \times \omega_\varepsilon.$$

In this paper, we prove the existence of a family $(u_\varepsilon, h_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, solving

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t} - (x^\alpha u_{\varepsilon x})_x = h_\varepsilon \chi_{\omega_\varepsilon}, & (t,x) \in Q, \\ u_\varepsilon(t,1) = 0, & \text{in } (0,T), \\ \begin{cases} u_\varepsilon(t,0) = 0, & \text{if } \alpha \in (0,1), \\ \text{or} & \\ (x^\alpha u_{\varepsilon x})(t,0) = 0, & \text{if } \alpha \in [1,2), \end{cases} & t \in (0,T), \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), \ u_\varepsilon(T,x) = 0 & x \in (0,1), \end{cases}$$

⋆ Muito Obrigado! ⋆