Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

1ª Prova de Cálculo III
27/09/2023 – 2023-2
Turma M1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Dê uma parametrização das seguintes curvas:

(a) [1 pt] O segmento de reta ligando os pontos $A = (1, 0, 1)$ e $B = (3, 1, 4)$.

(b) [1 pt] O círculo de centro $(1, -1)$ e raio $r = 4$.

(c) [1 pt] O gráfico da função $y = \sqrt{x}$.

Solução:

(a) Note que $\overrightarrow{AB} = (2,\ 1,\ 3)$, daí,

$$\vec{r}(t) = (1,\ 0,\ 1) + t\,(2,\ 1,\ 3) = (2t + 1,\ t,\ 3t + 1)\,,\ t \in [0, 1].$$

(b)

$$\vec{r}(t) = (4\cos(t) + 1,\ 4\sin(t) - 1)\,,\ t \in [0, 2\pi].$$

(c)

$$\vec{r}(x) = \left(x,\ \sqrt{x}\right)\,,\ x \in [0, +\infty[.$$

Questão 2. ....____/ 2 pts

Calcule o comprimento da curva $\vec{r}(t) = (t^2,\ t\sin(t) + \cos(t),\ -t\cos(t) + \sin(t))$, $0 \leq t \leq \pi$.

Solução: Note que

$$\vec{r}\,'(t) = (2t,\ t\cos(t),\ t\sin(t)) \Rightarrow \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{t^2\sin^2(t) + t^2\cos^2(t) + 4t^2} = \sqrt{5}t.$$

Com isso, temos que

$$L = \int_0^\pi \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^\pi \sqrt{5}t\,dt = \frac{\sqrt{5}t^2}{2}\bigg|_{t=0}^{t=\pi} = \frac{\sqrt{5}\pi^2}{2}.$$

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Uma partícula se move de acordo com a parametrização $\vec{r}(t) = \left(t,\ t,\ \frac{t^2}{2}\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a curvatura da curva.

(b) Determine as componentes tangente e normal da aceleração.

Solução:

(a)

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = (1,\ 1,\ t) \Rightarrow v(t) = \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{t^2+2}.$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = (0,\ 0,\ 1) \Rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = (1,\ -1,\ 0)$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{v^3} = \frac{\sqrt{2}}{(t^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

(b) Como

$$v'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+2}},$$

temos que

$$\vec{a}(t) = v'(t)\vec{T} + v^2(t)\kappa(t)\vec{N} = \frac{t}{\sqrt{t^2+2}}\vec{T} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+2}}\vec{N}.$$

Questão 4. .... ______/ 2 pts

Encontre o ponto da curva $\vec{r}(t) = (2\cos(t),\ 2\sin(t),\ e^t)$, $0 \leq t \leq \pi$, em que a reta tangente é paralela ao plano $\sqrt{3}x + y = 1$.

Solução: Basta ver em quais pontos $\vec{r}\,'(t) = (-2\sin(t),\ 2\cos(t),\ e^t)$ é ortogonal a $\vec{n} = \left(\sqrt{3},\ 1,\ 0\right)$, o vetor normal do plano. Com efeito,

$$\vec{r}\,'(t) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow -2\sqrt{3}\sin(t) + 2\cos(t) = 0 \Rightarrow \tan(t) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

donde concluímos que $t = \frac{\pi}{6}$. Portanto o ponto da curva buscado é:

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\sqrt{3},\ 1,\ e^{\frac{\pi}{6}}\right)$$