Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação de Reposição
GAAL
12.025 HE, 09 de dezembro
09/12/2025
Turma K1 – 2025-2

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Qual é a dimensão do núcleo da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solução: Vamos escalonar a matriz A:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \; L_4 \to L_4 - L_1 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \; L_4 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \; L_4 \leftrightarrow L_3 \; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \; L_4 \to L_4 + 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Neste caso, o sistema $AX = 0$ tem infinitas soluções, com uma variável livre, portanto $\dim \ker(A) = 1$.

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Considere a seguinte cônica

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6 = 0.$$

(a) [3 pts] Reduza a cônica à forma padrão via uma mudança de variáveis adequada.

(b) [1 pt] Qual cônica é essa?

Solução:

(a) Para isso, considere a matriz assciada à forma quadrática da equação.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como A é simétrica ela é ortogonalmente diagonalizável. A mudança de coordenadas é dada pela matriz Q que diagonaliza A. Vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Com isso,

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3.$$

Neste caso, a matriz possui dois autoespaços $E_1 = \ker(A - 1I)$ e $E_3 = \ker(A - 3I)$. Vamos determiná-los.

Autoespaço E_1:

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \{(-\beta,\ \beta)\,;\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

Portanto, uma base para E_1 é $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Donde concluímos que $\dim E_1 = 1$.

Autoespaço E_3: Da mesma forma,

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \{(\beta,\ \beta)\,;\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

Portanto, fazendo $\beta = 1$ uma base para E_3 é $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Donde concluímos que $\dim E_3 = 1$.

Agora, para obter Q basta normalizar os autovetores obtidos anteriormente.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix},$$

Analogamente,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{2} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ e a mudança de variáveis: } \overline{X} = Q^t X.$$

Com isso, como os autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$ temos que

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6 = 0 \Rightarrow \bar{x}^2 + 3\bar{y}^2 = 6 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{6} + \frac{\bar{y}^2}{2} = 1.$$

(b) Na forma padrão, reconhecemos essa cônica como uma Elipse.

Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Calcule o seu determinante e decida se é invertível ou não.

Solução:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \; C_4 \to C_4 - 3C_1 \; = \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 5 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular o determinante da matrix 3×3 usando a regra de Sarrus:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{matrix}}_{\text{regra de Sarrus}}$$

$$= (\text{-}0 \; -4 \; +1) - (\text{-}0 \; \text{-}0 \; \text{-}0) = -3.$$

Logo, $\det(A) = -15$.