Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Gabarito

Questão 1. .... ________/ 2,5 pts

Considere a cônica

$$4x^2 - y^2 + 3y - \frac{25}{4} = 0.$$

(a) [1 pt] Coloque a cônica na forma padrão.

(b) [0,5 pts] Reconheça a cônica.

(c) [1 pt] Faça um esboço.

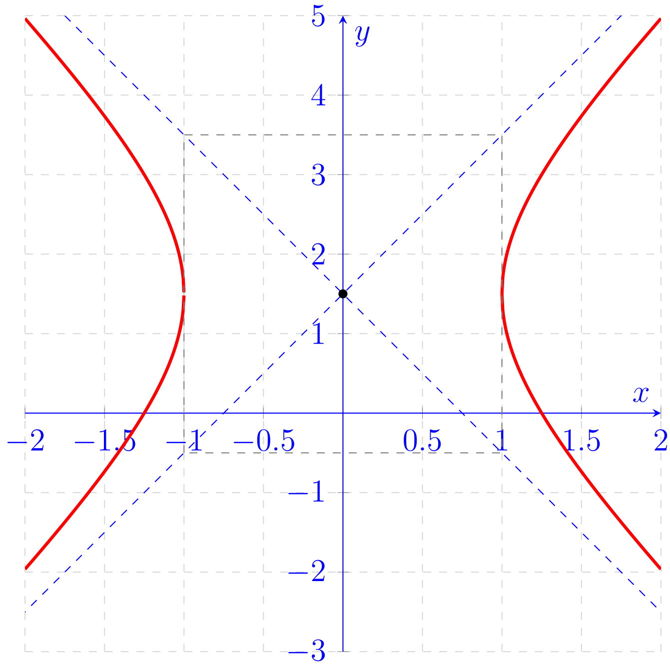
Solução:

(a) Completamento de quadrados:

$$
\begin{aligned}
& 4x^2 - y^2 + 3y - \frac{25}{4} = 0 \\
\Longrightarrow\ & 4x^2 - (y^2 - 3y) - \frac{25}{4} = 0 \\
\Longrightarrow\ & 4x^2 - \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4} - \frac{9}{4}\right) - \frac{25}{4} = 0 \\
\Longrightarrow\ & 4x^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{4} - \frac{25}{4} = 0 \\
\Longrightarrow\ & 4x^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right) = 4 \\
\Longrightarrow\ & x^2 - \frac{(y - \frac{3}{2})}{4} = 1
\end{aligned}
$$

(b) A cônica é uma hipérbole transladada.

(c)


y
x
5
4
3
2
1
−1
−2
−3
−2
−1.5
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2

Questão 2. .... ______/ 2 pts

Considere o plano $\alpha : 2x - y + 3z + 4 = 0$.

(a) [0,5 pts] Determine o ponto P de interseção do plano α com o eixo x.

(b) [0,5 pts] Determinar as equações paramétricas da reta r que passa por P e é perpendicular ao plano.

(c) [1 pt] Determine o ângulo entre o vetor normal ao plano α e o vetor $\vec{v} = (-1,\ 0,\ 3)$.

Solução:

(a) Fazendo $y = z = 0$ na equação do plano, temos que

$$P = (-2,\ 0,\ 0)\,.$$

(b) Sabemos que $\vec{n} = (2,\ -1,\ 3)$ é um vetor ortogonal ao plano α. Portanto é um vetor diretor de r. Como P é um ponto de r, temos que

$$r : \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = -t \\ z = 3t \end{cases},\quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

(c)

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|} = \frac{7}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{14}} = \frac{\sqrt{35}}{10}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{35}}{10}\right) \approx 0.937744490405147\,\text{rad} \approx 53.73°.$$

Questão 3. .... ______/ 4 pts

Considere o ponto $C = (2, -1)$ e a reta r que passa pela origem e pelo ponto $A = (1, 3)$.

(a) [0,5 pts] Determine as equações paramétricas da reta r.

(b) [1 pt] Determine uma equação cartesiana da reta s que passa por C e é perpendicular a r.

(c) [1 pt] Determine o ponto P de interseção entre r e s.

(d) [1,5 pts] Determine a equação do círculo centrado em C e que passa pelo P.

Solução:

(a) Como a reta r passa pela origem, então um vetor diretor é $\overrightarrow{OA} = (1, 3)$, portanto

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 3t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Temos que $\overrightarrow{OA} = (1, 3)$ é perpendicular a s, portanto a equação da reta s é da forma

$$s : \ c + x + 3y = 0.$$

Substituindo-se C neste equação, obtemos $c = 1$. Donde concluímos que

$$s : \ x + 3y + 1 = 0.$$

(c) Substituindo as coordenadas de r obtidas no item (a) na equação cartesiana de s, temos que

$$10t + 1 = 0 \Longrightarrow t = -\frac{1}{10}.$$

Portanto,

$$P = \left(-\frac{1}{10}, -\frac{3}{10}\right).$$

(d) Vamos determinar o raio do círculo.

$$r = d(P, C) = \frac{7\sqrt{10}}{10}.$$

Logo, a equação do círculo é:

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{49}{10}.$$

Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Questão 4. .... ______/ 1,5 pts

Mostre que o ponto $P = (4,\ 3,\ 3)$ não pertence à reta $r : (x,\ y,\ z) = (2,\ 4,\ 1) + t\,(1,\ -1,\ 2)\,, t \in \mathbb{R}$ e obtenha a equação cartesiana do plano determinado por r e P.

Solução: Se P pertencesse à r então existiria $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{bmatrix} t+2 \\ 4-t \\ 2t+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \\ t = 1, \end{cases}$$

o que é uma contradição, portanto P não pode pertencer à r.

Equação do plano: Para isso, tome $A = (2,\ 4,\ 1) \in r$ e note que os seguintes vetores são paralelos ao plano.

$$\vec{v} = (1,\ -1,\ 2) \ \text{e}\ \overrightarrow{AP} = (2,\ -1,\ 2)\,.$$

Neste caso, um vetor normal ao plano é dado por:

$$\vec{n} = \vec{v} \times \overrightarrow{AP} = (0,\ 2,\ 1)\,.$$

Logo, como A pertence ao plano, a equação do plano é:

$$\overrightarrow{AX} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow 2y + z - 9 = 0.$$