Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(a) [1,5 pts] Determine A^{-1}.

(b) [0,5 pts] Escreve o sistema $AX = B$.

(c) [1 pt] Determine a solução deste sistema.

Solução:

(a)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \to L_1 - 2L_2 \\ L_3 \to L_3 - L_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} L_1 \to L_1 - 4L_3 \\ L_2 \to L_2 + L_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Logo, temos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y + z = -1 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases}$$

(c) Como A é invertível, sabemos que a solução é dada por $X = A^{-1}B$, donde,

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação de Aprendizagem 1
GAAL
12.025 HE, 15 de setembro
15/09/2025
Turma K1 – 2025-2

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Suponha que a matriz aumentada de um sistema foi transformada, usando-se operações elementares sobre as suas linhas, na seguinte matriz escalonada.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

(a) [1 pt] Circule os pivôs da matriz aumentada e indique com uma seta, as colunas correspondentes às variáveis livres.

(b) [0,5 pts] Qual é o posto da matriz dos coeficientes e da matriz aumentada?

(c) [0,5 pts] Classifique o sistema quanto a única solução, nenhuma solução ou infinitas soluções. **Justifique.**

(d) [1 pt] Dê o conjunto solução do sistema.

Solução:

(a)

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & \downarrow & & & \downarrow & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 7 & 0 & 0 & -8 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

(b) $\text{posto}(A) = 3$ e $\text{posto}(A|B) = 3$.

(c) Do item anterior, temos que o sistema possui solução. Como o sistema tem 5 variáveis e $\text{posto}(A) = 3 < 5$, então o sistema tem infinitas soluções.

(d) A matriz corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_5 = -3 \\ x_3 + 6x_5 = 5 \\ x_4 + 3x_5 = 9, \end{cases}$$

Donde, o conjunto solução é:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -7\alpha + 8\beta - 3 \\ \alpha \\ 5 - 6\beta \\ 9 - 3\beta \\ \beta \end{bmatrix} \; ; \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \right\}$$

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Calcule o determinante da seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 13 & -7 & -2 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\det\begin{bmatrix} 13 & -7 & -2 & 19 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \; C_2 \to C_2 + C_3 \; = \det\begin{bmatrix} 13 & -9 & -2 & 19 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \; C_1 \to C_1 - 2C_3$$

$$= \det\begin{bmatrix} 17 & -9 & -2 & 19 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} = +1 \cdot \det\begin{bmatrix} 17 & -9 & 19 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \; L_2 \to L_2 - 2L_3$$

$$= \det\begin{bmatrix} 17 & -9 & 19 \\ 0 & 0 & 9 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = -9 \cdot \det\begin{bmatrix} 17 & -9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = -9(17-9) = -72$$

Alternativamente, podemos calcular o determinante da matrix 3×3 usando a regra de Sarrus:

$$\det\begin{bmatrix} 17 & -9 & 19 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \det \underbrace{\begin{pmatrix} 17 & -9 & 19 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} 17 & -9 \\ -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{matrix}}_{\text{regra de Sarrus}}$$

$$= (-102 + 27 - 38) - (-38 + 51 - 54) = -72.$$

Questão 4. .... ______/ 1 pts

Seja $A = (a_{ij})_{4\times 4}$ uma matriz com determinante diferente de zero. E seja

$$B = \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & 0 & 5a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 5a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 5a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & \det(A) & 0 & 0 \\ a_{11}+3a_{21} & a_{12}+3a_{22} & 0 & 5a_{13}+15a_{23} & a_{14}+3a_{24} \end{bmatrix}$$

Calcule $\dfrac{\det(B)}{\det(A^2)}$

Solução:

$$\begin{aligned}
\det B &= -\det(A)\det \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & 5a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} & a_{34} \\ a_{11}+3a_{21} & a_{12}+3a_{22} & 5a_{13}+15a_{23} & a_{14}+3a_{24} \end{bmatrix} \quad L_4 \to L_4 - 3L_2 \\
&= -\det(A)\det \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & 5a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & 5a_{13} & a_{14} \end{bmatrix} \\
&= -5\det(A)\det \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix} \quad L_4 \leftrightarrow L_1 \\
&= 5\det(A)\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\
&= 5\det(A)\det(A) = 5\det(A^2).
\end{aligned}$$

Assim, $\det(B) = 5\det(A^2)$, logo

$$\frac{\det(B)}{\det(A^2)} = 5.$$