Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação Suplementar
GAAL
12.025 HE, 21 de julho
21/07/2025
Turma K1 – 2025-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 1,5 pts

Considere a cônica de equação:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 - 4y - \frac{17}{4} = 0$$

(a) [1,5 pts] Coloque a equação da cônica na forma padrão.

Solução: Completamento de quadrados:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{4} - y^2 - 4y - \frac{17}{4} = 0\\
\Longrightarrow\ &\frac{x^2}{4} - (y^2 + 4y) - \frac{17}{4} = 0\\
\Longrightarrow\ &\frac{x^2}{4} - (y^2 + 4y + 4 - 4) - \frac{17}{4} = 0\\
\Longrightarrow\ &\frac{x^2}{4} - (y + 2)^2 + 4 - \frac{17}{4} = 0\\
\Longrightarrow\ &\frac{x^2}{4} - (y + 2)^2 = \frac{1}{4}\\
\Longrightarrow\ &x^2 - 4(y + 2)^2 = 1\\
\Longrightarrow\ &x^2 - \frac{(y + 2)^2}{\frac{1}{4}} = 1.
\end{aligned}$$

Daí, temos que a cônica é uma hipérbole transladada.

Questão 2. .... ______/ 4,5 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) [2 pts] Determine os autovalores de A.

(b) [0,5 pts] A é invertível? Justifique.

(c) [1,5 pts] Determine a dimensão de cada autoespaço.

(d) [0,5 pts] A é diagonalizável? Justifique.

Solução:

(a) Note que

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & -6 \\ 1 & -\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda - 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Usando cofatores com respeito à segunda coluna,

$$= -\lambda \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & -6 \\ 0 & -\lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda - 1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior, o determinante é o produto da diagonal principal,

$$\begin{aligned} &= -\lambda(1-\lambda)(-\lambda-1)(-\lambda-1) \\ &= \lambda\,(\lambda - 1)\,(\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

Com isso temos que os autovalores são $\lambda = -1$, $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

(b) Sabemos que $\dim E_0{=}1$ e $\dim E_1{=}1$. Para saber se A é diagonalizável basta calcular $\dim E_{-1}$. Neste caso, vamos resolver o sistema homogêneo correspondente:

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde, temos que o sistema tem 2 variáveis livres e portanto $\dim E_{-1} = 2$. Logo A é diagonalizável.

Questão 3. .... ______/ 4 pts

Considere o ponto $A = (3,\ 1,\ -2)$ e os vetores $\vec{u} = (1,\ -3,\ 0)$ e $\vec{v} = (-2,\ 1,\ 1)$.

(a) [0,5 pts] Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD? Justifique.

(b) [1 pt] Calcule o cosseno do ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(c) [1,5 pts] Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A e tem vetor diretor dado por $\vec{u} \times \vec{v}$.

(d) [1 pt] Determine a equação do plano que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta r.

Solução:

(a) São LI, pois não são múltiplos.

(b) Note que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -5,\ \|\vec{u}\| = \sqrt{10},\ \|\vec{v}\| = \sqrt{6}.$$

Com isso,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = -\frac{\sqrt{15}}{6}.$$

(c) Note que

$$\vec{v}_r = \vec{u} \times \vec{v} = (-3,\ -1,\ -5)\,.$$

Com isso,

$$r : \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 1 - t \\ z = -5t - 2,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(d) Como o plano é perpendicular à reta r, temos que um vetor normal deste plano é o vetor $(-3,\ -1,\ -5)$. Neste caso, a equação do plano é da forma:

$$d - 3x - y - 5z = 0.$$

Substituindo o ponto A nesta equação,

$$d = 0.$$

Logo a equação do plano é:

$$-3x - y - 5z = 0.$$