Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Considere a cônica de equação:

$$4x^2 + 24x - y^2 + 2y + 31 = 0$$

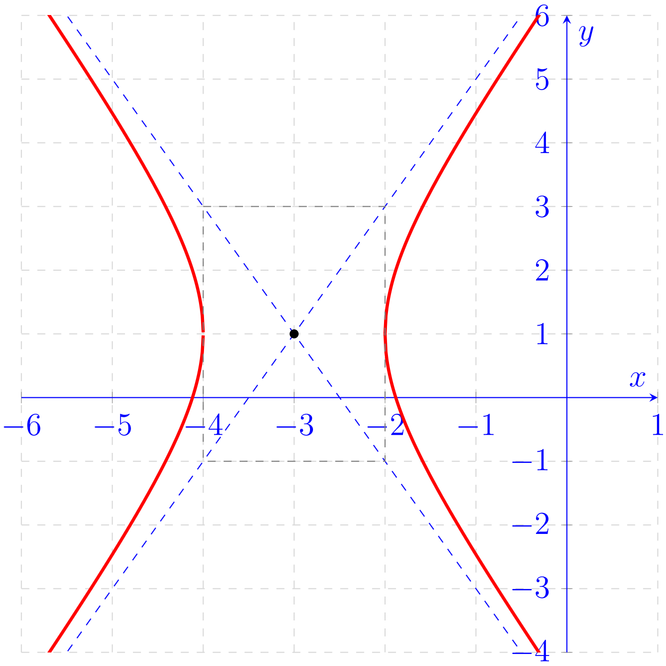
(a) [2 pts] Coloque a equação da cônica na forma padrão. E reconheça-a.

(b) [1 pt] Faça um esboço da cônica.

Solução: Completamento de quadrados:

$$\begin{aligned}
&4x^2 + 24x - y^2 + 2y + 31 = 0\\
\Longrightarrow\ &4(x^2 + 6x^2) - (y^2 - 2y) + 31 = 0\\
\Longrightarrow\ &4(x^2 + 6x^2 + 9 - 9) - (y^2 - 2y + 1 - 1) + 31 = 0\\
\Longrightarrow\ &4((x+3)^2 - 9) - ((y-1)^2 - 1) + 31 = 0\\
\Longrightarrow\ &4(x+3)^2 - 36 - (y-1)^2 + 1 + 31 = 0\\
\Longrightarrow\ &4(x+3)^2 - (y-1)^2 = 4\\
\Longrightarrow\ &(x+3)^2 - \frac{(y-1)^2}{4} = 1
\end{aligned}$$

Daí, temos que a cônica é uma hipérbole transladada, cujo esboço é:



Questão 2. .... ______/ 4 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & -28 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) [0,5 pts] A é ortogonalmente diagonalizável? Justifique

(b) [1 pt] Determine os autovalores de A.

(c) [2,5 pts] A é diagonalizável? Em caso afirmativo, encontre as matrizes D e P.

Solução:

(a) Não, pois A não é simétrica.

(b) Note que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda - 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda - 3 & 0 \\ 4 & -28 & 9 - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 9)(\lambda + 3)^2$$

Com isso temos que os autovalores são $\lambda = 9$ e $\lambda = -3$.

(c) Primeiramente, vamos determinar uma base para o autoespaço $E_{-3} = \ker(A + 3I)$. Resolvendo o sistema homogêneo correspondente:

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & -28 & 12 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x - 7y + 3z = 0,$$

donde,

$$E_{-3} = \left\{ \begin{bmatrix} 7\alpha - 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

e uma base para E_{-3} é dada pelo vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, $\dim E_{-3} = 2$ e como $\dim E_9 = 1$, temos que A é diagonalizável.

Agora, vamos determinar uma base para o autoespaço $E_9 = \ker(A - 9I)$. Resolvendo o sistema homogêneo correspondente:

$$A + 9I = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 4 & -28 & 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} ,$$

donde,

$$E_9 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} ;\ \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

e uma base para E_9 é dada pelo vetor

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Com isso, temos as matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Questão 3. ....______/ 3 pts

Considere as retas

$$r : \begin{cases} x = t - 3 \\ y = 1 - t \\ z = 2t + 1, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = t - 5 \\ y = 3 \\ z = -t - 3, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) [1 pt] Determine o ponto de interseção das retas r e s.

(b) [2 pts] Determine a equação do plano que contêm as retas r e s.

Solução:

(a) Igualando a variável y, vemos que $t = -2$ em r. Neste caso, o ponto de interseção é $A = (-5, \ 3, \ -3)$

(b) Como o plano contém ambas as retas, um vetor normal ao plano é o produto vetorial entre os vetores diretor $\vec{v_r} = (1, \ -1, \ 2)$ e $\vec{v_s} = (1, \ 0, \ -1)$ de r e s, respectivamente. Assim,

$$\vec{N} = (1, \ -1, \ 2) \times (1, \ 0, \ -1) = (1, \ 3, \ 1) \,.$$

Neste caso, o plano tem equação da forma

$$d + x + 3y + z = 0.$$

Substituindo o ponto A nesta equação, temos:

$$d + 1 = 0 \Rightarrow d = -1.$$

Logo a equação do plano é:

$$x + 3y + z - 1 = 0.$$