Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

3ª Verificação de Aprendizagem
GAAL
08/07/2025
12.025 HE, 8 de julho
Turma K1 – 2025-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 2 pts

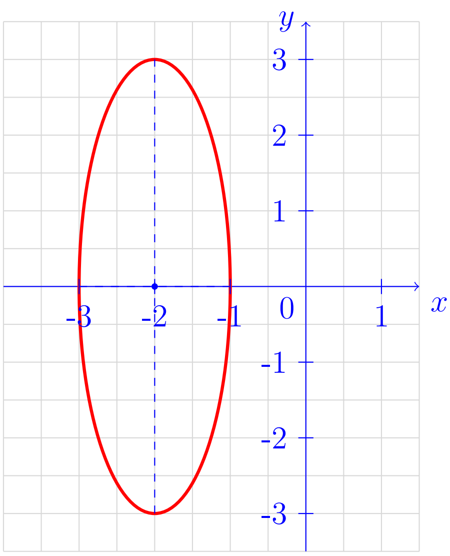
Reconheça e faça um esboço da cônica:

$$9x^2 + 36x + y^2 + 27 = 0$$

Solução: Completamento de quadrados:

$$\begin{aligned}
& 9x^2 + 36x + y^2 + 27 = 0 \\
\Longrightarrow\ & 9(x^2 + 4x + 4 - 4) + y^2 + 27 = 0 \\
\Longrightarrow\ & 9\left((x+2)^2 - 4\right) + y^2 + 27 = 0 \\
\Longrightarrow\ & 9(x+2)^2 - 36 + y^2 + 27 = 0 \\
\Longrightarrow\ & 9(x+2)^2 + y^2 = 9 \\
\Longrightarrow\ & (x+2)^2 + \frac{y^2}{9} = 1.
\end{aligned}$$

Daí, temos que a cônica é uma elipse transladada, cujo esboço é:



Questão 2. .... ______/ 3 pts

Considere o subespaço vetorial

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha - 2\beta + 4\delta - 3\gamma \\ 3\alpha + \beta + 5\delta + 5\gamma \\ -2\beta + 2\delta - 4\gamma \\ 3\alpha + \beta + 5\delta + 5\gamma \end{bmatrix} ;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}.$$

(a) [0,5 pts] V é subespaço de qual $\mathbb{R}^n$?

(b) [0,5 pts] Determine um conjunto gerador para V.

(c) [2 pts] Determine uma base e a dimensão de V.

Solução:

(a) V é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b)

$$V = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Colocando os vetores como colunas de uma matriz e escalonando:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vemos que os vetores são LD e que podemos tomar como base:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

Donde concluímos que $\dim V = 2$.

Questão 3. .... ______/ 5 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(a) [1 pt] Justifique o porquê de A ser ortogonalmente diagonalizável. O que isso significa?

(b) [1 pt] Determine os autovalores de A.

(c) [3 pts] Encontre uma diagonalização ortogonal para A.

Solução:

(a) A é ortogonalmente diagonalizável, pois é uma matriz simétrica. Isso significa que existe uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tais que $D = Q^t AQ$.

(b) Note que

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 6-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 9-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 10)(\lambda - 5)^2$$

Com isso temos que os autovalores são $\lambda = 10$ e $\lambda = 5$.

(c) Primeiramente, vamos determinar uma base para o autoespaço $E_5 = \ker(A - 5I)$. Resolvendo o sistema homogêneo correspondente:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x + 2z = 0,$$

donde,

$$E_5 = \left\{ \begin{bmatrix} -2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} ; \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

e uma base para E_5 é dada pelo vetores

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Note que estes dois vetores já são ortogonais e $\vec{v}_1$ é unitário! Como A é ortogonalmente diagonalizável, sabemos que o autovetor de E_{10} tem que ser ortogonal aos dois de E_5, portanto, basta tomá-lo usando o produto vetorial:

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, resta normalizar $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$:

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

e

$$\|\vec{v}_3\| = \sqrt{5} \Rightarrow \vec{u}_3 = \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \\ \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

Logo a diagonalização é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$