Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

1ª prova de
GAAL
29/04/2025
Turma K1 – 2025-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 7 pts

Considere o ponto $A = (1,\ 0,\ 1)$ e os vetores $\vec{u} = (1,\ -3,\ -1)$ e $\vec{v} = (-5,\ 1,\ 1)$.

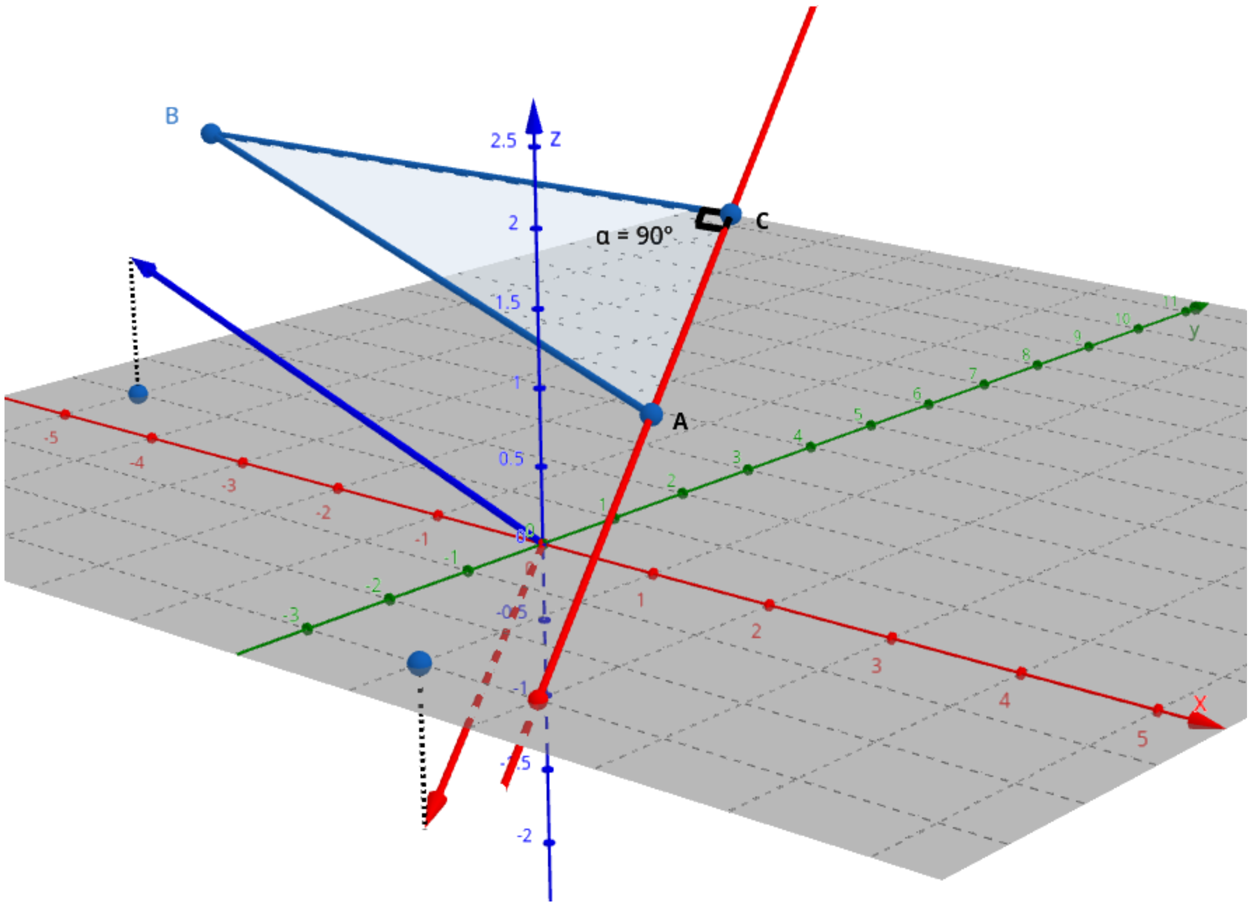
(a) [2 pts] Calcule o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(b) [1 pt] Determine as coordenadas do ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

(c) [1 pt] Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A e tem vetor diretor dado por $\vec{u}$.

(d) [2 pts] Determine o ponto C sobre a reta r tal que forme com A e B um triângulo retângulo, com ângulo reto em C.

(e) [1 pt] Indique na figura abaixo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.



Solução:

(a) Note que

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -9,\ \|\vec{u}\| = \sqrt{11},\ \|\vec{v}\| = 3\sqrt{3}.$$

Com isso,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = -\frac{\sqrt{33}}{11}.$$

Portanto,

$$\theta = \operatorname{acos}\left(-\frac{\sqrt{33}}{11}\right) \approx 2.12 \text{ rad} \approx 121.48°.$$

(b) Seja $B = (x, y, z)$, então

$$\overrightarrow{AB} = (x-1,\ y,\ z-1) = (-5,\ 1,\ 1).$$

Assim,

$$\begin{cases} x-1=-5 \\ y=1 \\ z-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \\ z=2, \end{cases}$$

donde, $B = (-4,\ 1,\ 2)$.

(c) Do item anterior, temos que

$$r : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -3t \\ z = 1-t,\ t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

(d) Do item anterior, sabemos que $C = (t+1,\ -3t,\ 1-t)$ para algum $t\in\mathbb{R}$. Como o ângulo reto é em C, então

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0.$$

Note que

$$\overrightarrow{CA} = (-t,\ 3t,\ t) \text{ e } \overrightarrow{CB} = (-t-5,\ 3t+1,\ t+1).$$

Donde,

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -t\,(-t-5) + t\,(t+1) + 3t\,(3t+1) = t\,(11t+9)$$

Portanto,

$$t\,(11t+9) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ or } t = -\frac{9}{11}.$$

Se $t=0$, então $C = A$, que não forma um triângulo. Então, temos apenas solução $t = -\frac{9}{11}$. Neste caso, o ponto C buscado é:

$$C = \left(\frac{2}{11},\ \frac{27}{11},\ \frac{20}{11}\right).$$

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 pts] Calcule o produto entre elas.

(b) [1 pt] Calcule A^tB^t.

Solução:

(a) A matrix A tem ordem 3×4 e a matrix B tem ordem 3×3, portanto o único produto possível é BA. Assim,

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A^tB^t = (BA)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$