Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação Suplementar de GAAL
04/02/2025
Turma K1– 2024-2

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 5 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 pts] Determine os autovalores de A.

(b) [1 pt] Usando o item anterior, diga se A é invertível ou não. Justifique.

(c) [1 pt] A é diagonalizável? Justifique. Se sim, determine uma matriz diagonal D semelhante a A.

(d) [1 pt] Qual o determinante de A?

Solução:

(a) Vamos calcular o polinômio característico.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda-2 & 2 & 3 \\ -2 & 3-\lambda & 2 \\ -4 & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}, \; C_1 \to C_1 + C_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 1-\lambda & 2 & 5-\lambda \end{pmatrix}, \; L_3 \to L_3 - L_1 \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-1) \end{aligned}$$

Com isso, os autovalores são:

$$\lambda = 1, \; \lambda = 2 \text{ e } \lambda = 3.$$

(b) A é invertível, pois 0 não é autovalor, isso significa que $\det(A) \neq 0$.

(c) Como a matriz possui 3 autovetores LI, ela é diagonalizável. Neste caso, uma matriz diagonal é:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Como A é semelhante a D, sabemos que $\det(A) = \det(D) = 6$.

Questão 2. .... ______/ 5 pts

Considere a seguinte cônica

$$11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0.$$

(a) [2 pts] Reduza a cônica à forma padrão via uma mudança de variáveis adequada.

(b) [1 pt] Qual cônica é essa?

(c) [2 pts] Faça um esboço da cônica.

Solução:

(a) Para isso, considere a matriz assciada à forma quadrática da equação.

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

Como A é simétrica ela é ortogonalmente diagonalizável. Neste caso, a mudança de coordenadas é dada pela matriz ortogonal Q que diagonaliza A. Para isso, vamos determinar os autovetores de A.

Vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 11-\lambda & 12 \\ 12 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(11-\lambda) - 144 = \lambda^2 - 15\lambda - 100.$$

Com isso,

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 20.$$

(b) Neste caso, a matriz possui dois autoespaços $E_{-5} = \ker(A + 5I)$ e $E_{20} = \ker(A - 20I)$. Vamos determiná-los.

Autoespaço E_{-5}:

$$A + 5I = \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-5} = \left\{ \left(-\frac{3\beta}{4},\ \beta \right);\ \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Portanto, uma base para E_{-5} é $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Então, para obter Q basta normalizar os autovetores obtidos anteriormente.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{v}_1\| = \frac{5}{4} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

Analogamente,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_2\| = \frac{5}{4} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \text{ e a mudança de variáveis: } \overline{X} = Q^t X.$$

Com isso, como os autovalores são $\lambda_1 = 20$ e $\lambda_2 = -5$ temos que

$$11x^2 + 24xy + 4y^2 - 15 = 0 \Rightarrow 20\bar{x}^2 - 5\bar{y}^2 = 15 \Rightarrow \frac{4\bar{x}^2}{3} - \frac{\bar{y}^2}{3} = 1.$$

(c) Na forma padrão, reconhecemos essa cônica como uma hipérbole.

(d) A seguir, temos o esboço da cônica