Gabarito

Questão 1. ....________/ 6 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & -3 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 pts] Determine os autovalores de A.

(b) [2 pts] Determine a dimensão dos autoespaços.

(c) [2 pts] A é diagonalizável? Justifique. Se sim, determine a matriz e a matriz diagonal D semelhante a A.

Solução:

(a) Vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -5 & -3 \\ 2 & -\lambda - 2 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 4-\lambda & 0 \\ 2 & -4 & -4 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Com isso, os autovalores são:

$$\lambda = -1, \ \lambda = 1 \text{ e } \lambda = 2$$

(b) Como a matriz possui 4 autovetores LI, ela é diagonalizável. Neste caso, a matriz diagonal é:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Considere a seguinte cônica

$$21x^2 + 6xy + 13y^2 - 132 = 0.$$

(a) [2 pts] Reduza a cônica à forma padrão via uma mudança de variáveis adequada.

(b) [1 pt] Qual cônica é essa?

(c) [1 pt] Faça um esboço da cônica.

Solução:

(a) Para isso, considere a matriz assciada à forma quadrática da equação.

$$A = \begin{pmatrix} 21 & 3 \\ 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

Como A é simétrica ela é ortogonalmente diagonalizável. Neste caso, a mudança de coordenadas é dada pela matriz ortogonal Q que diagonaliza A. Para isso, vamos determinar os autovetores de A.

Vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 21-\lambda & 3 \\ 3 & 13-\lambda \end{pmatrix} = (13-\lambda)(21-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 34\lambda + 264.$$

Com isso,

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 34\lambda + 264 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 12,\ \lambda_2 = 22.$$

(b) Neste caso, a matriz possui dois autoespaços $E_{12} = \ker(A - 12I)$ e $E_{22} = \ker(A - 22I)$. Vamos determiná-los.

Autoespaço E_{12}:

$$A - 12I = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \left\{ \left(-\frac{\beta}{3},\ \beta \right);\ \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Portanto, uma base para E_4 é $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Então, para obter Q basta normalizar os autovetores obtidos anteriormente.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_1\| = \frac{\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix},$$

Analogamente,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{30} \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{10}}{10} & -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ \frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{3\sqrt{10}}{10} \end{pmatrix} \text{ e a mudança de variáveis: } \overline{X} = Q^t X.$$

Com isso, como os autovalores são $\lambda_1 = 22$ e $\lambda_2 = 12$ temos que

$$21x^2 + 6xy + 13y^2 - 132 = 0 \Rightarrow 22\bar{x}^2 + 12\bar{y}^2 = 132 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{6} + \frac{\bar{y}^2}{11} = 1.$$

(c) Na forma padrão, reconhecemos essa cônica como uma Elipse.