Gabarito

Questão 1. ....____/ 4 pts

Considere o plano $\alpha : x - 2y + z - 2 = 0$ e o ponto $P = (1,\ 0,\ 0)$.

(a) [1 pt] Preencha as lacunas para determinar as equações paramétricas da reta r que passa por P e é perpendicular ao plano.

Sabemos que $\vec{n} = \underline{(1,\ -2,\ 1)}$ é um vetor ortgonal ao plano α. Portanto é um vetor __diretor__ de r. Como P é um ponto de r, temos que

$$r : \begin{cases} x = \underline{\quad t+1 \quad} \\ y = \underline{\quad -2t \quad} \\ z = \underline{\quad t \quad} \end{cases}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

(b) [1 pt] Determine o ponto Q de interseção da reta r com o plano α.

(c) [1 pt] Determine as coordenadas dos **vetores unitários** que sejam ortogonal a $\vec{v} = (1,\ 0,\ 1)$ e à reta r simultaneamente.

(d) [1 pt] Determine o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e o vetor normal ao plano α.

Solução:

(b) Um ponto da reta r é da forma $r(t) = (t+1,\ -2t,\ t)$, substituindo na equação cartesiana do plano, temos que

$$(t+1) + -2(-2t) + 1(t) - 2 = 0 \Rightarrow 6t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}.$$

Com isso, temos que $Q = r\left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{7}{6},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\right)$.

(c) Sabemos que um vetor ortogonal a $\vec{v}$ e a r é dado por

$$\vec{w} = \vec{v} \times \vec{n} = (2,\ 0,\ -2)\,.$$

Normalizando, obtemos que um dos vetores é

$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{(2,\ 0,\ -2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Obviamente, o outro vetor é $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1$.

(d)

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{n}}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 0.955316618124509\,\text{rad} \approx 54.74°.$$

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Determine a solução geral do sistema linear

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ -3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

Solução: Vamos escalonar o sistema usando o método de Gauss-Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 1 & -2 & | & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & | & -1 \end{bmatrix} L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & | & 2 \end{bmatrix} L_3 \to L_3 + 2L_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & | & -3 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 6L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & | & -3 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - L_3 \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 & 4 & | & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & | & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to 1/6L_1 \\ L_2 \to 1/6L_2 \\ L_3 \to 1/6L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & | & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Com isso, o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \frac{2x_5}{3} = \frac{1}{2} \\ x_3 + \frac{x_5}{3} = \frac{1}{2} \\ x_4 - \frac{2x_5}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

donde, fazendo $x_2 = \alpha$ e $x_5 = \beta$, concluimos que a **solução geral** do sistema é:

$$S = \left\{ \left(\alpha - \frac{2\beta}{3} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\beta}{3}, \alpha, \frac{2\beta}{3} - \frac{1}{2}, \beta \right) ;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 pts] Calcule o determinante de A usando a expansão em cofatores para reduzir o deteminate a matrizes de ordem 3.

(b) [1 pt] A é invertível? Justifique. Se sim, qual é o determinante da inversa?

Solução:

(a)

$$\det(A) = -\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} + 2\det\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{\text{regra de Sarrus}}$$

$$= -(-7)\det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{matrix} -1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

$$-2 \quad -1 \quad -8 \qquad\qquad -4 \quad 1 \quad 4$$

$$= -14 + 2\Big([-4+1+4] - [-8-1-2]\Big)$$

$$= -14 + 2\Big([1] - [-11]\Big)$$

$$= -14 + 24 = 10.$$

(b) Sim, pois $\det(A) \neq 0$ e temos que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{10}$.