UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CAMPUS DE RIO DAS OSTRAS
Professor Reginaldo Demarque

2ª Prova de GAAL
21/01/2025
Turma K1– 2024-2

Gabarito

Questão 1. ....________/ 4 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}.$$

(a) [2 pts] Determine os autovalores de A.

(b) [2 pts] Determine uma base e a dimensão dos autoespaços de A.

Solução:

(a) Vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)(13-\lambda) - 27 = \lambda^2 - 20\lambda + 64.$$

Com isso,

$$p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 20\lambda + 64 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 16.$$

(b) Neste caso, a matriz possui dois autoespaços $E_4 = \ker(A - 4I)$ e $E_{16} = \ker(A - 16I)$. Vamos determiná-los.

Autoespaço E_4:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 3 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_4 = \left\{ \left(\sqrt{3}\beta,\ \beta \right);\ 13 \in \mathbb{R} \right\}$$

Portanto, uma base para E_4 é $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Donde concluímos que $\dim E_4 = 1$.

Autoespaço E_{16}: Da mesma forma,

$$A - 16I = \begin{pmatrix} -9 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{16} = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}\beta}{3},\ \beta \right);\ 13 \in \mathbb{R} \right\}$$

Portanto, fazendo $13 = \sqrt{3}$ uma base para E_{16} é $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$. Donde concluímos que $\dim E_{16} = 1$.

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Considere a seguinte cônica

$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0.$$

(a) [2 pts] Reduza a cônica à forma padrão via uma mudança de variáveis adequada.

(b) [1 pt] Qual cônica é essa?

(c) [1 pt] Faça um esboço da cônica.

Solução:

(a) Para isso, considere a matriz assciada à forma quadrática da equação.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}.$$

Como A é simétrica ela é ortogonalmente diagonalizável. Note que esta é a mesma matriz da Questão 1. Neste caso, a mudança de coordenadas é dada pela matriz ortogonal Q que diagonaliza A. Então, para obter Q basta normalizar os autovetores obtidos anteriormente.

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_1\| = 2 \Rightarrow \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

Analogamente,

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \|v_2\| = 2 \Rightarrow \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Logo,

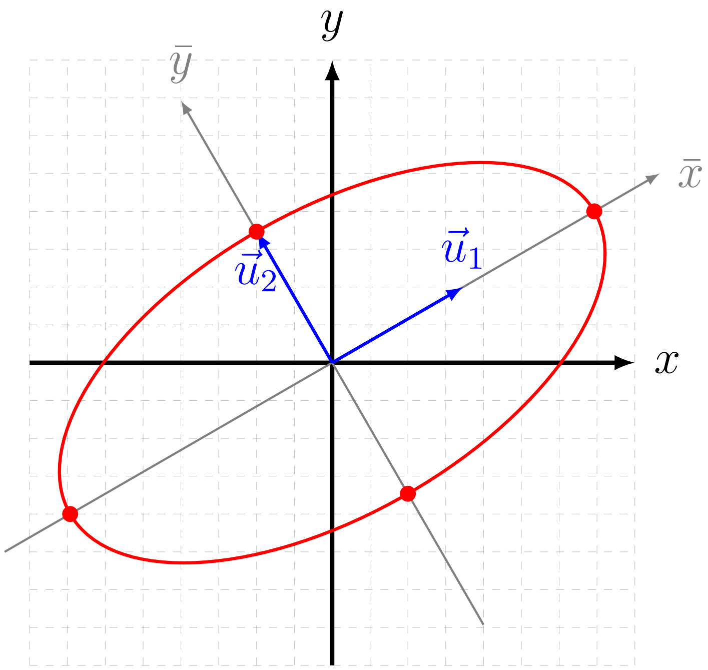
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ e a mudança de variáveis: } \overline{X} = Q^t X.$$

Com isso, como os autovalores são $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 16$ temos que

$$7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 16 = 0 \Rightarrow 4\bar{x}^2 + 16\bar{y}^2 = 16 \Rightarrow \frac{\bar{x}^2}{4} + \bar{y}^2 = 1.$$

(b) Na forma padrão, reconhecemos essa cônica como uma Elipse.

(c) A seguir, temos o esboço desta elípse.


y
$\bar{y}$
$\bar{x}$
x
$\vec{u}_1$
$\vec{u}_2$

Questão 3. .... ______/ 2 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) [1 pt] Calcule o determinante de A.

(b) [0,5 pts] A é invertível? Justifique.

(c) [0,5 pts] Qual a dimensão do núcleo da matriz A?

Solução:

(a) Vamos calcular o determinante usando a expansão por cofatores da primeira linha.

$$\det(A) = 2\det\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2(-6) - 12 = -24.$$

(b) Como $\det(A) \neq 0$, sabemos que a matriz é invertível.

(c) Como A é invertível, temos que o sistema homogêneo $AX = 0$ possui apenas a solução trivial $X = 0$, logo $\dim(\ker(A)) = 0$.