Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação Suplementar de
GAAL
27/08/2024 – 2024-1
Turma K1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Considere os vetores

$$\vec{u} = (2,\ x-1,\ -1)\,,\ \text{e}\ \vec{v} = (3,\ 2,\ 0)\,.$$

(a) [1 pt] Determine o valor de x para que os vetores sejam ortogonais.

(b) [1 pt] Determine $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

(c) [1 pt] Determine a área do paralelogramo que tem como arestas os representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ com mesma origem.

(d) [1 pt] Determine uma equação para o plano que passa pela origem e é gerado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução:

(a) Note que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (2,\ x-1,\ -1) \cdot (3,\ 2,\ 0) = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2.$$

(b)

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2,\ -3,\ 13)\,.$$

(c) Sabemos que a área deste paralelogramo é dada pela norma de $\vec{w}$, portanto

$$\text{Área} = \|\vec{w}\| = \sqrt{4+9+169} = \sqrt{182}.$$

(d) Como $\vec{w}$ é ortogonal aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente, sabemos que a equação do plano é dada por:

$$2x - 3y + 13z = 0.$$

DON'T PANIC

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Determine conjunto solução do seguinte sistema linear

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 4 \end{cases}$$

Solução: Escrevendo o sisttema na forma matricial, temos:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

Vamos obter a forma escalonada reduzida de A

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \to L_2 - L_1 \\ L_4 \to L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -6 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to -L1 \\ L_2 \to -L2 \\ L_3 \to L_3 + 3L_2 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -6 & 6 \end{bmatrix} L_4 \to \tfrac{1}{3}L_4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} L_4 \to 7L_4 - 2L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_4 \to -\tfrac{1}{3}L_4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 5 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - 2L_4 \\ L_2 \to L_2 + L_4 \\ L_3 \to L_3 - 5L_4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_3 \to \tfrac{1}{7}L_4 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \to L_1 - 2L_3 \\ L_2 \to L_2 + 3L_3 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 + L2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como isso, o sistema inicial é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_5 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 - x_5 = 1 \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

O que nos fornece o conjunto solução:

$$S = \{(-x_5,\ 1,\ x_5 + 1,\ 0,\ x_5)\ ;\ x_5 \in \mathbb{R}\}$$

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) [2 pts] Determine os autovalores de A.

(b) [1 pt] A é diagonalizável? Justifique. Se sim, determine a matriz e a matriz diagonal D semelhante a A.

Solução:

(a) Vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -\lambda-3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda\,(\lambda-4)\,(\lambda-1)\,(\lambda+3)\,.$$

Com isso, os autovalores são:

$$\lambda = -3, \lambda = 0, \lambda = 1 \text{ e } \lambda = 4.$$

(b) Como a matriz possui 4 autovalores distintos, ela é diagonalizável. Neste caso, a matriz diagonal é:

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

DON'T PANIC