Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª Chamada da Prova de
GAAL
20/08/2024 – 2024-1
Turma K1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Considere os vetores

$$\vec{u} = (2,\ 1,\ -1)\,,\ \text{e}\ \vec{v} = (1,\ 2,\ -1)\,.$$

(a) [2 pts] Determine o ângulo entre eles.

(b) [0,5 pts] Diga se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI ou LD. Justifique.

(c) [0,5 pts] Determine um vetor que seja ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$ simultaneamente.

Solução:

(a) Note que

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 5,\ \ \|\vec{u}\| = \sqrt{6}\ \text{e}\ \|\vec{v}\| = \sqrt{6}.$$

Com isso,

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} = \frac{5}{6}.$$

Portanto,

$$\theta = \text{acos}\left(\frac{5}{6}\right) \approx 0.585685543457151\ \text{rad}\,.$$

(b) Basta tomar o produto vetorial

$$\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = (1,\ 1,\ 3)\,.$$

DON'T PANIC

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) [2 pts] Determine $\ker(A)$.

(b) [1 pt] Determine uma base para o $\ker(A)$.

Solução:

(a) Sabemos que $\ker(A)$ é o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^5$, formado pelos vetores $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tais que

$$AX = \vec{0}.$$

Para isso, vamos obter a forma escalonada reduzida de A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_2 \to L_2 - 2L_1 \\ L_3 \to L_3 - 2L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -3 & -7 & -4 \\ 0 & 3 & -3 & -7 & -4 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_3 \to 2L_3 - 3L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_3 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_3 \to \tfrac{1}{7}L_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_1 \to L_1 - 4L_2 \\ L_2 \to L_2 + 7L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_2 \to \tfrac{1}{2}L_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Convertendo para sistemas, temos:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

E, assim

$$\ker(A) = \{(-2x_3 + x_5,\ x_3 - x_5,\ x_3,\ -x_5,\ x_5),\ x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Assim, uma base é:

$$\mathcal{B} = \{(-2,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0), (1,\ -1,\ 0,\ -1,\ 1)\}.$$

(c) E portanto, $\dim \ker(A) = 2$.

DON'T PANIC

Questão 3. .... ______/ 4 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) [1,5 pts] Determine os autovalores de A.

(b) [2 pts] Detemine uma base para cada autoespaço.

(c) [0,5 pts] A é diagonalizável? Justifique. Se sim, determine a matriz P que diagonaliza A e a matriz diagonal D semelhante a A.

Solução:

(a) Primeiramente, vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2 (\lambda - 1)^2 .$$

Com isso, os autovalores são:

$$\lambda = 1 \text{ e } \lambda = 2.$$

(b)

Autoespaço associado à $\lambda = 1$: Note que

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ cuja forma escalonada reduzida é, } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que o autoespaço é:

$$E_1 = \{(\alpha,\ \beta,\ 0,\ 0)\,;\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para este subespaço é:

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0)\}.$$

Autoespaço associado à $\lambda = 2$: Note que

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ cuja forma escalonada reduzida é, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que o autoespaço é:

$$E_2 = \{(-2\gamma,\ -4\gamma,\ \gamma,\ 0)\,;\, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para este subespaço é:

$$\mathcal{B}_2 = \{(-2,-4,1,0)\}.$$

DON'T PANIC

(c) A não é diagonalizável pois A é uma matriz de ordem 4 que possui apenas 3 autovetores linearmente independentes.