Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Prova de
GAAL
19/08/2024 – 2024-1
Turma K1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Considere os vetores $\vec{v}_1 = (3,\ 1,\ -1)$ e $\vec{v}_2 = (1,\ 0,\ 3)$.

(a) [0,5 pts] Verifique se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são ortogonais.

(b) [1 pt] Determine um vetor $\vec{v}_3$ que seja ortogonal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ simultaneamente.

(c) [1,5 pts] Escreva $\vec{v} = (4,\ -2,\ 1)$ como combinação linear de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

Solução:

(a) Note que

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (3,\ 1,\ -1) \cdot (3,\ 1,\ -1) = 0,$$

portanto são ortogonais.

(b) Basta tomar o produto vetorial

$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (3,\ -10,\ -1)\,.$$

(c) Queremos determinar x, y, z tais que

$$\vec{v} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3.$$

Multiplicando-se esta equação por $\vec{v}_1$, temos que

$$\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = x\|\vec{v}_1\|^2 \Rightarrow 9 = 11x \Rightarrow x = \frac{9}{11}.$$

Multiplicando-se esta equação por $\vec{v}_2$, temos que

$$\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = y\|\vec{v}_2\|^2 \Rightarrow 7 = 10y \Rightarrow y = \frac{7}{10}.$$

Por fim, multiplicando-se esta equação por $\vec{v}_3$, temos que

$$\vec{v} \cdot \vec{v}_3 = z\|\vec{v}_3\|^2 \Rightarrow 31 = 110z \Rightarrow z = \frac{31}{110}.$$

Logo,

$$\vec{v} = \frac{9}{11}\vec{v}_1 + \frac{7}{10}\vec{v}_2 + \frac{31}{110}\vec{v}_3.$$

DON'T PANIC

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Seja V o subespaço gerado pelos vetores.

$$\vec{v}_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)\,,\ \vec{v}_2 = (0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0)\,,\ \vec{v}_3 = (2,\ -3,\ -6,\ -6,\ 0)$$

$$\vec{v}_4 = (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 0)\,,\ \vec{v}_5 = (1,\ -4,\ -8,\ -8,\ 0)$$

que forma uma base para o espaço gerado por eles.

(a) [0,5 pts] V é subespaço de qual $\mathbb{R}^n$?

(b) [1,5 pts] Determine um subconjunto de $G = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ que forma uma base de V.

(c) [0,5 pts] Qual a dimensão de V?

(d) [0,5 pts] Escreva os vetores de G, que não estão na base, como combinação linear dos vetores da base.

Solução:

(a) V é um subespaço de $\mathbb{R}^5$.

(b) Para isso, vamos escrever a matriz cujas colunas são os vetores $\vec{v}_i$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos obter a forma escalonada reduzida de A

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & -8 \\ 0 & 2 & -6 & 2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{c} L_3 \to L_3 - 2L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - L_2$$

Portanto, a base de V buscada é:

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}.$$

(c) Portanto, $\dim(V) = 2$.

(d) Da matriz B vemos que

$$\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$$

$$\vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_5 = \vec{v}_1 - 4\vec{v}_2$$

DON'T PANIC

Questão 3. .... ______/ 4 pts

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) [1,5 pts] Determine os autovalores de A.

(b) [2 pts] Detemine uma base para cada autoespaço.

(c) [0,5 pts] A é diagonalizável? Justifique. Se sim, determine a matriz P que diagonaliza A e a matriz diagonal D semelhante a A.

Solução:

(a) Primeiramente, vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 4 & -\lambda - 1 & -4 \\ -2 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 3)(\lambda + 1)^2.$$

Com isso, os autovalores são:

$$\lambda = -1 \text{ e } \lambda = 3.$$

(b)

Autoespaço associado à $\lambda = -1$: Note que

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ cuja forma escalonada reduzida é, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que o autoespaço é:

$$E_{-1} = \{(\gamma,\ \beta,\ \gamma)\,;\, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para este subespaço é:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Autoespaço associado à $\lambda = 3$: Note que

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \text{ cuja forma escalonada reduzida é, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que o autoespaço é:

$$E_3 = \{(-\gamma,\ -2\gamma,\ \gamma)\,;\, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para este subespaço é:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

DON'T PANIC

(c) Sim, A é diagonalizável pois $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formado por autovetores. Por fim, as matrizes P e D são:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$