Multiplicações sucessivas podem ser tratadas de modo análago. A ideia é utilizar as tabelas de adição e de multiplicação para reduzir o resultado do cálculo para 0, 1 ou 2.

Essas ideias podem ser generalizadas para vetores de modo direto.

Exemplo 1.14

Em $\mathbb{Z}_3^5$, considere $\mathbf{u} = [2, 2, 0, 1, 2]$ e $\mathbf{v} = [1, 2, 2, 2, 1]$. Assim

$$\begin{aligned} \mathbf{u} + \mathbf{v} &= [2, 2, 0, 1, 2] + [1, 2, 2, 2, 1] \\ &= [2 + 1, 2 + 2, 0 + 2, 1 + 2, 2 + 1] \\ &= [0, 1, 2, 0, 0] \end{aligned}$$

Vetores em $\mathbb{Z}_3^5$, são chamados ***vetores ternários de comprimento* 5**.

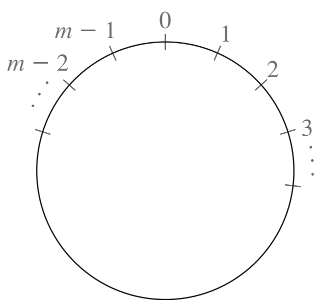


Figura 1.22
Aritmética módulo m

De modo geral, temos o conjunto $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m - 1\}$ de ***inteiros módulo m*** (que corresponde a um relógio de m horas, como ilustrado na figura 1.22). Um vetor de comprimento n cujas componentes estão em $\mathbb{Z}_m$ é chamado um **vetor m-ário de comprimento *n***. O conjunto de todos os *vetores m-ários de comprimento n* é denotado $\mathbb{Z}_m^n$.

Exercícios 1.1

1. Desenhe os seguintes vetores em posição padrão em $\mathbb{R}^2$:

(a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(b)** $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **(d)** $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. Desenhe os vetores do exercício 1 com suas origens no ponto $(2, -3)$.

3. Desenhe os seguintes vetores na posição padrão em $\mathbb{R}^3$:

(a) $\mathbf{a} = [0, 2, 0]$ **(b)** $\mathbf{b} = [3, 2, 1]$
(c) $\mathbf{c} = [1, -2, 1]$ **(d)** $\mathbf{d} = [-1, -1, -2]$

4. Se os vetores do exercício 3 forem transladados de modo que suas extremidades estejam no ponto (3, 2, 1), ache os pontos correspondentes às suas origens.

5. Para cada um dos seguintes pares de pontos, desenhe o vetor $\overrightarrow{AB}$. Depois, determine e redesenhe $\overrightarrow{AB}$ na posição padrão.

(a) $A = (1, -1)$, $B = (4, 2)$
(b) $A = (0, -2)$, $B = (2, -1)$
(c) $A = (2, \frac{3}{2})$, $B = (\frac{1}{2}, 3)$
(d) $A = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, $B = (\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$

6. Um excursionista anda 4 km no sentido norte e depois 5 km no sentido nordeste. Desenhe os vetores deslocamento que representam o passeio do excursionista e o vetor que representa o deslocamento real do ponto de partida.

Os exercícios de 7 a 10 se referem aos vetores do exercício 1. Determine os vetores indicados e mostre como os resultados podem ser obtidos geometricamente.

7. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **8.** $\mathbf{b} - \mathbf{c}$
9. $\mathbf{d} - \mathbf{c}$ **10.** $\mathbf{a} + \mathbf{d}$

Os exercícios 11 e 12 se referem aos vetores do exercício 3. Determine os vetores indicados.

11. $2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ **12.** $3\mathbf{b} - 2\mathbf{c} + \mathbf{d}$

13. Ache as componentes dos vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, em que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ aparecem na figura 1.23.

14. Na figura 1.24, A, B, C, D, E e F são os vértices de um hexágono regular centrado na origem.

Expresse cada um dos seguintes vetores em função de $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$:

(a) $\overrightarrow{AB}$ **(b)** $\overrightarrow{BC}$
(c) $\overrightarrow{AD}$ **(d)** $\overrightarrow{CF}$
(e) $\overrightarrow{AC}$ **(f)** $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}$

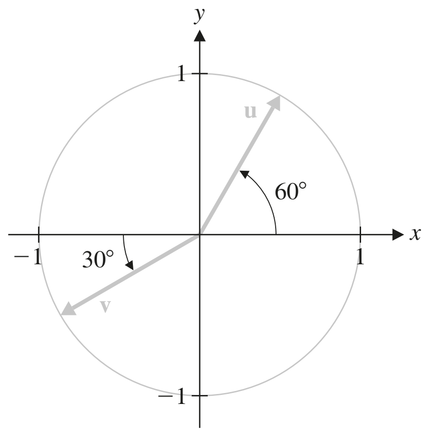


Figura 1.23

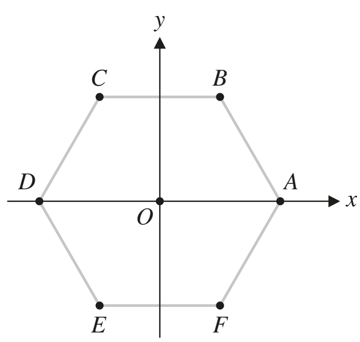


Figura 1.24

Nos exercícios 15 e 16, simplifique a expressão vetorial dada. Indique quais propriedades do Teorema 1.1 você usou.

15. $2(\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) + 3(2\mathbf{b} + \mathbf{a})$

16. $-3(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + 2(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) + 3(\mathbf{c} - \mathbf{b})$

Nos exercícios 17 e 18, encontre o vetor **x** *em função dos vetores* **a** *e* **b**.

17. $\mathbf{x} - \mathbf{a} = 2(\mathbf{x} - 2\mathbf{a})$

18. $\mathbf{x} + 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = 3(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - 2(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$

Nos exercícios 19 e 20, desenhe os eixos coordenados relativos a ***u*** *e* ***v*** *e localize* ***w***.

19. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

20. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = -\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

Nos exercícios 21 e 22, desenhe os eixos coordenados usuais no mesmo diagrama que os eixos relativos a **u** *e* **v**. *Use estes últimos para obter* **w** *como combinação linear de* **u** *e* **v**.

21. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

22. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

23. Desenhe diagramas para ilustrar as propriedades (d) e (e) do Teorema 1.1.

24. Escreva demonstrações algébricas das propriedades (d) a (g) do Teorema 1.1.

Nos exercícios de 25 a 28, **u** *e* **v** *são vetores binários. Determine* **u** + **v** *em cada caso.*

25. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **26.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{u} = [1, 0, 1, 1], \mathbf{v} = [1, 1, 1, 1]$

28. $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0], \mathbf{v} = [0, 1, 1, 1, 0]$

29. Escreva as tabelas de adição e de multiplicação para $\mathbb{Z}_4$.

30. Escreva as tabelas de adição e de multiplicação para $\mathbb{Z}_5$.

Nos exercícios 31 a 43, realize os cálculos indicados.

31. $2 + 2 + 2$ em $\mathbb{Z}_3$ **32.** $2 \cdot 2 \cdot 2$ em $\mathbb{Z}_3$

33. $2(2 + 1 + 2)$ em $\mathbb{Z}_3$ **34.** $3 + 1 + 2 + 3$ em $\mathbb{Z}_4$

35. $2 \cdot 3 \cdot 2$ em $\mathbb{Z}_4$ **36.** $3(3 + 3 + 2)$ em $\mathbb{Z}_4$

37. $2 + 1 + 2 + 2 + 1$ em $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, e $\mathbb{Z}_5$

38. $(3 + 4)(3 + 2 + 4 + 2)$ em $\mathbb{Z}_5$

39. $8(6 + 4 + 3)$ em $\mathbb{Z}_9$ **40.** 2^{100} em $\mathbb{Z}_{11}$

41. $[2, 1, 2] + [2, 0, 1]$ em $\mathbb{Z}_3^3$ **42.** $2[2, 2, 1]$ em $\mathbb{Z}_3^3$

43. $2([3, 1, 1, 2] + [3, 3, 2, 1])$ em $\mathbb{Z}_4^4$ e $\mathbb{Z}_5^4$

Nos exercícios de 44 a 55, resolva às equações dadas ou indique que não há solução.

44. $x + 3 = 2$ em $\mathbb{Z}_5$ **45.** $x + 5 = 1$ em $\mathbb{Z}_6$

46. $2x = 1$ em $\mathbb{Z}_3$ **47.** $2x = 1$ em $\mathbb{Z}_4$

48. $2x = 1$ em $\mathbb{Z}_5$ **49.** $3x = 4$ em $\mathbb{Z}_5$

50. $3x = 4$ em $\mathbb{Z}_6$ **51.** $6x = 5$ em $\mathbb{Z}_8$

52. $8x = 9$ em $\mathbb{Z}_{11}$ **53.** $2x + 3 = 2$ em $\mathbb{Z}_5$

54. $4x + 5 = 2$ em $\mathbb{Z}_6$ **55.** $6x + 3 = 1$ em $\mathbb{Z}_8$

56. **(a)** Para quais valores de a, $x + a = 0$ possui uma solução em $\mathbb{Z}_5$?

(b) Para quais valores de a e b, $x + a = b$ possui uma solução em $\mathbb{Z}_6$?

(c) Para quais valores de a, b e m, $x + a = b$ possui uma solução em $\mathbb{Z}_m$?

57. **(a)** Para quais valores de a, $ax = 1$ possui uma solução em $\mathbb{Z}_5$?

(b) Para quais valores de a, $ax = 1$ possui uma solução em $\mathbb{Z}_6$?

(c) Para quais valores de a e m, $ax = 1$ possui uma solução em $\mathbb{Z}_m$?

Exercícios 1.2

Nos exercícios de 1 a 6, calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ CAS **4.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3{,}2 \\ -0{,}6 \\ -1{,}4 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 4{,}1 \\ -0{,}2 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{u} = [1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0], \mathbf{v} = [4, -\sqrt{2}, 0, -5]$

CAS **6.** $\mathbf{u} = [1{,}12, -3{,}25, 2{,}07, -1{,}83]$,
$\mathbf{v} = [-2{,}29, 1{,}72, 4{,}33, -1{,}54]$

Nos exercícios de 7 a 12, determine $\|\boldsymbol{u}\|$ *do exercício dado e dê um vetor unitário no sentido de* $\mathbf{u}$.

7. Exercício 1 **8.** Exercício 2 **9.** Exercício 3

CAS **10.** Exercício 4 **11.** Exercício 5 CAS **12.** Exercício 6

Nos exercícios de 13 a 16, encontre a distância $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ *entre* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *do exercício dado.*

13. Exercício 1 **14.** Exercício 2

15. Exercício 3 CAS **16.** Exercício 4

17. Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e k é um escalar, explique por que as seguintes expressões não fazem sentido:

(a) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$ (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$
(c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (d) $k \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{w})$

Nos exercícios de 18 a 23, determine se o ângulo entre $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *é agudo, obtuso ou um ângulo reto.*

18. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **19.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

20. $\mathbf{u} = [4, 3, -1], \mathbf{v} = [1, -1, 1]$

CAS **21.** $\mathbf{u} = [0{,}9, 2{,}1, 1{,}2], \mathbf{v} = [-4{,}5, 2{,}6, -0{,}8]$

22. $\mathbf{u} = [1, 2, 3, 4], \mathbf{v} = [-3, 1, 2, -2]$

23. $\mathbf{u} = [1, 2, 3, 4], \mathbf{v} = [5, 6, 7, 8]$

Nos exercícios de 24 a 29, encontre o ângulo entre $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *do exercício dado.*

24. Exercício 18 **25.** Exercício 19

26. Exercício 20 CAS **27.** Exercício 21

CAS **28.** Exercício 22 CAS **29.** Exercício 23

30. Sejam $A = (-3, 2)$, $B = (1, 0)$ e $C = (4, 6)$. Prove que ΔABC é um triângulo retângulo.

31. Sejam $A = (1, 1, -1)$, $B = (-3, 2, -2)$ e $C = (2, 2, -4)$. Prove que ΔABC é um triângulo retângulo.

CAS **32.** Determine o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma aresta adjacente.

33. Um cubo possui quatro diagonais. Mostre que não existem duas dessas diagonais que sejam perpendiculares entre si.

34. Um paralelograma possui diagonais determinadas pelos vetores

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Mostre que este paralelograma é um losango (todos os lados têm o mesmo comprimento) e determine o comprimento do lado.

35. O retângulo ABCD tem vértices nos pontos $A = (1, 2, 3)$, $B = (3, 6, -2)$, e $C = (0, 5, -4)$. Determine as coordenadas do vértice D.

36. Um avião está voando para o leste com velocidade de 200 milhas por hora. Um vento está vindo do norte a 40 milhas por hora. Qual é a velocidade resultante do avião?

37. Um barco está indo para o norte, em um rio, a 4 milhas por hora. Se a correnteza do rio está fluindo para o leste a 3 milhas por hora, determine a velocidade resultante do barco.

38. Ana está pilotando um barco a motor por um rio de 2 km de largura. Em água parada, o barco teria velocidade de 20 km/h, e a correnteza do rio está com 5 km/h. Ana vai de uma margem do rio para uma doca que está exatamentente na outra margem do rio, diretamente oposta a ela. Ela pilota o barco em uma direção perpendicular à correnteza.

(a) Quão longe da doca Ana irá atracar?
(b) Quanto tempo demorará para Ana cruzar o rio?

39. Beto consegue nadar a uma velocidade de 2 milhas por hora em água parada. A correnteza de um rio está fluindo a uma velocidade de 1 milha por hora. Se Beto quer cruzar o rio a nado para chegar em um ponto exatamente oposto a ele, a qual ângulo em relação à margem do rio ele deverá nadar?

Nos exercícios de 40 a 45, determine a projeção de **v** *em* **u**. *Desenhe um esquema nos exercícios 40 e 41.*

40. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ **41.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

42. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ **43.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

CAS **44.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$

CAS **45.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3{,}01 \\ -0{,}33 \\ 2{,}52 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1{,}34 \\ 4{,}25 \\ -1{,}66 \end{bmatrix}$

A figura 1.39 sugere duas maneiras pelas quais os vetores podem ser usados para calcular a área de um triângulo. A área $\mathcal{A}$

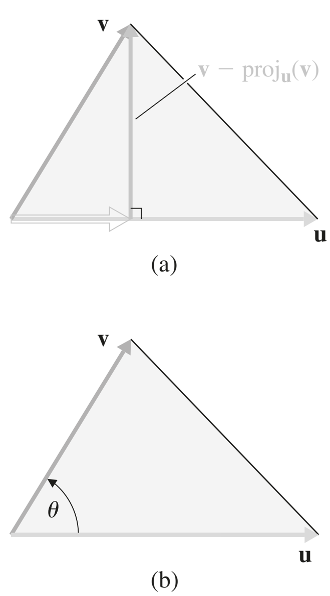


Figure 1.39

do triângulo na parte (a) é dada por $\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\|$, e a parte (b) sugere a forma trigonométrica da área de um triângulo: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\ \|\mathbf{v}\|\text{sen}\theta$. (Podemos usar a identidade $\text{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ para achar senθ.)

Nos exercícios 46 e 47, calcule a área do triângulo de vértices dados, usando ambos os métodos.

46. $A = (1, -1), B = (2, 2), C = (4, 0)$

47. $A = (3, -1, 4), B = (4, -2, 6), C = (5, 0, 2)$

Nos exercícios 48 e 49, encontre todos os valores do número k para os quais os dois vetores são ortogonais.

48. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k+1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ **49.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{bmatrix}$

50. Descreva todos os vetores $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que são ortogonais a $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

51. Descreva todos os vetores $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que são ortogonais a $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

52. Sob que condições as seguintes igualdades são verdadeiras para vetores **u** e **v** de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$?

(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ **(b)** $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$

53. Prove o teorema 1.2(b).

54. Prove o teorema 1.2(d).

Nos exercícios de 55 a 57, demostre as propriedades indicadas para a distância entre vetores.

55. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ para todos os vetores **u** e **v**

56. $d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + d(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ para todos os vetores **u**, **v** e **w**

57. $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ se e somente se $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

58. Prove que $\mathbf{u} \cdot k\mathbf{v} = k(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, para todos os vetores **u** e **v** em $\mathbb{R}^n$ e todos os escalares k.

59. Prove que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$, para quaisquer vetores **u** e **v** de $\mathbb{R}^n$. (*Sugestão*: substitua **u** por $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ na Desigualdade Triangular.)

60. Suponha conhecido que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$. Disso segue que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Em caso positivo, dê uma prova válida em $\mathbb{R}^n$; caso contrário, dê um *contra exemplo* (isto é, um conjunto específico de vetores **u**, **v** e **w** para os quais $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} . \mathbf{w}$, mas $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$).

61. Prove que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores **u** e **v** de $\mathbb{R}^n$.

62. **(a)** Prove que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores **u** e **v** de $\mathbb{R}^n$.

(b) Desenhe um diagrama mostrando **u**, **v**, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^2$ e use a prova da parte (a) para deduzir uma propriedade de paralelogramos.

63. Prove que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores **u** e **v** de $\mathbb{R}^n$.

64. **(a)** Prove que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ se e somente se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais.
(b) Desenhe um diagrama mostrando $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ em $\mathbf{R}^2$ e use a prova da parte (a) para deduzir uma propriedade de paralelogramos.

65. **(a)** Prove que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ são ortogonais em $\mathbb{R}^n$ se e somente se $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$.
(b) Desenhe um diagrama mostrando $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^2$ e use a prova da parte (a) para deduzir uma propriedade de paralelogramos.

66. Se $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{3}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1$, determine $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

67. Mostre que não existem vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ tais que $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3$.

68. **(a)** Prove que, se $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, então $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} + \mathbf{w}$.
(b) Prove que, se $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, então $\mathbf{u}$ é ortogonal a $s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, para quaisquer escalares s e t.

69. Prove que $\mathbf{u}$ é ortogonal a $\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$, para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, de que $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

70. **(a)** Prove que $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) = \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$.
(b) Prove que $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$.
(c) Explique geometricamente os resultados dos itens (a) e (b).

71. A Desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|$ é equivalente à desigualdade que obtemos elevando ao quadrado ambos os lados: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\,\|\mathbf{v}\|^2$.

(a) Em $\mathbb{R}^2$, com $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, a desigualdade é escrita como

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)$$

Prove algebricamente essa desigualdade. (*Sugestão*: subtraia o lado esquerdo do lado direito e mostre que a diferença deve ser necessariamente não negativa.)
(b) Prove o análogo de (a) em $\mathbb{R}^3$.

72. A figura 1.40 mostra que, em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, $\|\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\|$.

(a) Prove que, de modo geral, esta desigualdade é verdadeira. [*Sugestão:* Prove que $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ é ortogonal a $\mathbf{v} - \text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$ e use o teorema de Pitágoras.]

(b) Prove que a desigualdade $\|\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\| \leq \|\mathbf{v}\|$ é equivalente à Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

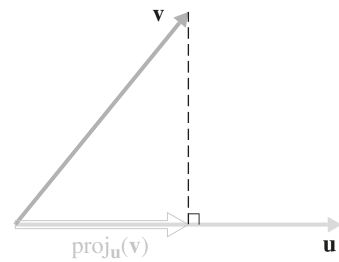


Figura 1.40

73. Use o fato de que $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = k\mathbf{u}$, para algum número k, juntamente com a figura 1.41, para determinar k e, desse modo, deduzir a fórmula para $\text{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$.

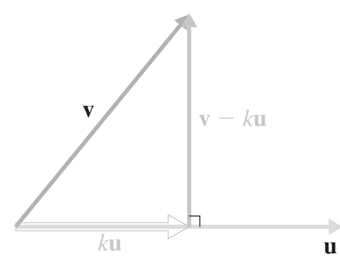


Figura 1.41

74. Utilizando indução matemática, prove a seguinte generalização para a Desigualdade Triangular:
$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_n\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\| + \cdots + \|\mathbf{v}_n\|$
para todo $n \geq 1$.

Etapa 4: A distância $d(B, \mathcal{P})$ de B a $\mathcal{P}$ é

$$\begin{aligned}\|\text{proj}_{\mathbf{n}}(\mathbf{v})\| &= \left|-\tfrac{2}{3}\right| \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \tfrac{2}{3} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Em geral, a distância $d(B, \mathcal{P})$ do ponto $B = (x_0, y_0, z_0)$ ao plano cuja equação geral é $ax + by + cz = d$ é dada pela fórmula

$$d(B, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{4}$$

Você será convidado a deduzir essa fórmula no exercício 40.

Exercícios 1.3

Nos exercícios 1 e 2, escreva uma equação para a reta que passa por P e possui **n** *como vetor normal (a) na forma normal e (b) na forma geral.*

1. $P = (0, 0), \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **2.** $P = (1, 2), \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 3 a 6, escreva uma equação para a reta que passa por P e tem vetor diretor **d** *(a) na forma vetorial e (b) na forma paramétrica.*

3. $P = (1, 0), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ **4.** $P = (-4, 4), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $P = (0, 0, 0), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ **6.** $P = (3, 0, -2), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 7 e 8, escreva uma equação para o plano que passa por P e possui vetor normal **n** *(a) na forma normal e (b) na forma geral.*

7. $P = (0, 1, 0), \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **8.** $P = (3, 0, -2), \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 9 e 10, escreva uma equação para o plano que passa por P e possui vetores diretores **u** *e* **v** *(a) na forma vetorial e (b) na forma paramétrica.*

9. $P = (0, 0, 0), \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

10. $P = (6, -4, -3), \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 11 e 12, dê uma equação vetorial da reta que passa por P e Q.

11. $P = (1, -2), Q = (3, 0)$

12. $P = (0, 1, -1), Q = (-2, 1, 3)$

Nos exercícios 13 e 14, dê uma equação vetorial para o plano que passa pelos pontos P, Q e R.

13. $P = (1, 1, 1), Q = (4, 0, 2), R = (0, 1, -1)$

14. $P = (1, 1, 0), Q = (1, 0, 1), R = (0, 1, 1)$

15. Ache equações paramétricas e uma equação vetorial para as retas de $\mathbb{R}^2$ que possuem as seguintes equações:

(a) $y = 3x - 1$ **(b)** $3x + 2y = 5$

16. Considere a equação vetorial $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$, em que p e q correspondem a pontos distintos P e Q de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que essa equação descreve o segmento de reta $\overline{PQ}$ quando t varia de 0 a 1.
(b) Para que valores de t temos $\mathbf{x}$ como ponto médio de $\overline{PQ}$? Qual é esse $\mathbf{x}$?
(c) Determine o ponto médio de $\overline{PQ}$ quando $P = (2, -3)$ e $Q = (0, 1)$.
(d) Determine o ponto médio de $\overline{PQ}$ quando $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (4, 1, -2)$.
(e) Determine os dois pontos que dividem o segmento $\overline{PQ}$ da parte (c) em três partes iguais.
(f) Determine os dois pontos que dividem o segmento $\overline{PQ}$ da parte (d) em três partes iguais.

17. Faça a sugestão de uma "prova vetorial" do fato de que, em $\mathbb{R}^2$, duas retas com coeficientes angulares m_1 e m_2 são perpendiculares se e somente se $m_1 m_2 = -1$.

18. A reta ℓ passa pelo ponto $P = (1, -1, 1)$ e tem vetor diretor $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para cada um dos seguintes planos $\mathcal{P}$, determine se ℓ e $\mathcal{P}$ são paralelos, perpendiculares ou nenhum desses dois:

(a) $2x + 3y - z = 1$ **(b)** $4x - y + 5z = 0$
(c) $x - y - z = 3$ **(d)** $4x + 6y - 2z = 0$

19. O plano $\mathcal{P}_1$ tem equação $4x - y + 5z = 2$. Para cada um dos planos $\mathcal{P}$ do exercício 18, determine se $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}$ são paralelos, perpendiculares ou nenhum desses dois.

20. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa por $P = (2, -1)$ e é perpendicular à reta de equação geral $2x - 3y = 1$.

21. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa por $P = (2, -1)$ e é paralela à reta de equação geral $2x - 3y = 1$.

22. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa por $P = (-1, 0, 3)$ e é perpendicular ao plano de equação geral $x - 3y + 2z = 5$.

23. Determine uma equação vetorial para a reta de R^3 que passa por $P = (-1, 0, 3)$ e é paralela à reta de equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= -2 - t \end{aligned}$$

24. Escreva uma equação na forma normal para o plano que passa por $P = (0, -2, 5)$ e é paralelo ao plano de equação geral $6x - y + 2z = 3$.

25. Os vértices de um cubo são os oito pontos (x, y, z) em que cada uma das coordenadas x, y e z valem 0 ou 1. (Veja a figura 1.34.)

(a) Encontre a equação geral para cada um dos planos que determinam as seis faces (lados) do cubo.
(b) Encontre a equação geral para o plano que contém a diagonal que vai da origem ao ponto (1, 1, 1) e é perpendicular ao plano xy.
(c) Encontre uma equação geral para o plano que contém as diagonais do lado mencionado no exemplo 1.22.

26. Encontre uma equação para o conjunto de todos os pontos equidistantes dos pontos $P = (1, 0, -2)$ e $Q = (5, 2, 4)$.

Nos exercícios 27 e 28, determine a distância do ponto Q à reta ℓ.

27. $Q = (2, 2)$, ℓ de equação $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

28. $Q = (0, 1, 0)$, ℓ de equação $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 29 e 30, determine a distância do ponto Q ao plano $\mathcal{P}$.

29. $Q = (2, 2, 2)$, $\mathcal{P}$ de equação $x + y - z = 0$

30. $Q = (0, 0, 0)$, $\mathcal{P}$ de equação $x - 2y + 2z = 1$

A figura 1.66 sugere uma maneira de usar vetores para localizar o ponto R da reta ℓ que está mais próximo de Q.

31. Encontre o ponto R de ℓ mais próximo de Q no exercício 27.

32. Encontre o ponto R de ℓ mais próximo de Q no exercício 28.

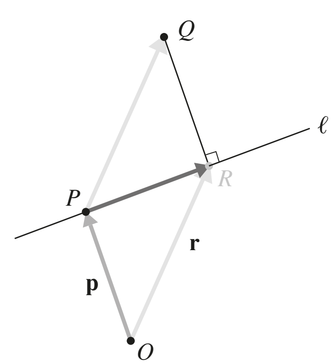


Figura 1.66
$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \overrightarrow{PR}$

A figura 1.67 sugere uma maneira de localizar o ponto R de $\mathcal{P}$ mais próximo de Q, usando vetores.

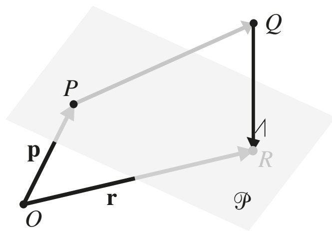


Figura 1.67
$\mathbf{r} = \mathbf{p} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

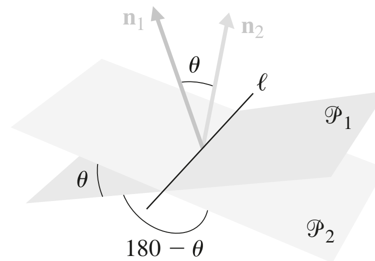


Figura 1.68

33. Encontre o ponto R de $\mathcal{P}$ mais próximo de Q no exercício 29.

34. Encontre o ponto R de $\mathcal{P}$ mais próximo de Q no exercício 30.

Nos exercícios 35 e 36, determine a distância entre as retas paralelas.

35. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 37 e 38, determine a distância entre os planos paralelos.

37. $2x + y - 2z = 0$ e $2x + y - 2z = 5$

38. $x + y + z = 1$ e $x + y + z = 3$

39. Prove a Equação (3) da página 43.

40. Prove a Equação (4) da página 44.

41. Prove que, em $\mathbb{R}^2$, a distância entre retas paralelas de equações $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c_1$ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = c_2$ é dada por $\dfrac{|c_1 - c_2|}{\|\mathbf{n}\|}$.

42. Prove que a distância entre planos paralelos de equações $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d_1$ e $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d_2$ é dada por $\dfrac{|d_1 - d_2|}{\|\mathbf{n}\|}$..

Se dois planos não paralelos $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ têm vetores normais $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$, e θ é o ângulo entre $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$, então definimos o ângulo entre $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ como sendo ou θ ou $180° - \theta$, o que for um ângulo agudo. (figura 1.68)

Nos exercícios 43 e 44, determine o ângulo agudo entre os planos com as dadas equações.

43. $x + y + z = 0$ e $2x + y - 2z = 0$

44. $3x - y + 2z = 5$ e $x + 4y - z = 2$

Nos exercícios 45 e 46, mostre que o plano e a reta com as dadas equações se interceptam, e então determine o ângulo agudo da interseção entre eles.

45. O plano dado por $x + y + 2z = 0$ e a reta dada por

$$x = 2 + t$$
$$y = 1 - 2t$$
$$z = 3 + t$$

46. O plano dado por $4x - y - z = 6$ e a reta dada por

$$x = t$$
$$y = 1 + 2t$$
$$z = 2 + 3t$$

*Os exercícios 47 e 48 apresentam abordagens para o problema de determiner uma projeção de um vetor sobre um plano. Como mostrado na figura 1.69, se $\mathcal{P}$ é um plano que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$ com vetor normal **n**, e **v** é um vetor de $\mathbb{R}^3$, então $\mathbf{p} = \mathrm{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v})$ é um vetor em $\mathcal{P}$ tal que $\mathbf{v} - c\mathbf{n} = \mathbf{p}$ par algum escalar c.*

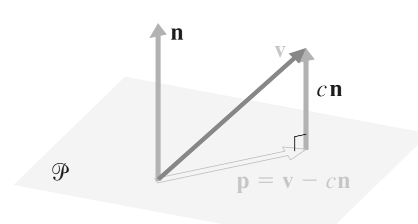


Figura 1.69
Projeção sobre um plano

47. Usando o fato de que $\mathbf{n}$ é ortogonal a todos os vetores em $\mathcal{P}$ (e, portanto, a $\mathbf{p}$), determine c e, assim, obtenha uma expressão para $\mathbf{p}$ em funçãode $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$.

48. Use o método do exercício 43 para determinar a projeção de

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

sobre os planos dados pelas seguintes equações:

(a) $x + y + z = 0$ **(b)** $3x - y + z = 0$

(c) $x - 2z = 0$ **(d)** $2x - 3y + z = 0$

Exercícios 2.1

Nos exercícios de 1 a 6, determine quais equações são lineares nas variáveis x, y e z. Se alguma equação não for linear, explique o motivo.

1. $x - \pi y + \sqrt[3]{5}z = 0$ **2.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

3. $x^{-1} + 7y + z = \text{sen}\left(\frac{\pi}{9}\right)$

4. $2x - xy - 5z = 0$ **5.** $3\cos x - 4y + z = \sqrt{3}$

6. $(\cos 3)x - 4y + z = \sqrt{3}$

Nos exercícios de 7 a 10, encontre uma equação linear que tenha o mesmo conjunto solução que a equação dada (possivelmente com alguma restrição nas variáveis).

7. $2x + y = 7 - 3y$ **8.** $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = 1$

9. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{xy}$ **10.** $\log_{10} x - \log_{10} y = 2$

Nos exercícios de 11 a 14, encontre o conjunto solução de cada equação.

11. $3x - 6y = 0$ **12.** $2x_1 + 3x_2 = 5$

13. $x + 2y + 3z = 4$ **14.** $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

Nos exercícios de 15 a 18, desenhe gráficos correspondentes aos sistemas lineares dados. Determine geometricamente se cada sistema tem uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução. Então resolva cada sistema algebricamente para confirmar sua resposta.

15. $\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ **16.** $\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x + y &= 7 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 3x - 6y &= 3 \\ -x + 2y &= 1 \end{aligned}$ **18.** $\begin{aligned} 0{,}10x - 0{,}05y &= 0{,}20 \\ -0{,}06x + 0{,}03y &= -0{,}12 \end{aligned}$

Nos exercícios de 19 a 24, resolva por substituição de trás para frente o sistema dado.

19. $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ y &= 3 \end{aligned}$ **20.** $\begin{aligned} 2u - 3v &= 5 \\ 2v &= 6 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2y - z &= 1 \\ 3z &= -1 \end{aligned}$ **22.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$ **24.** $\begin{aligned} x - 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$

Os sistemas dos exercícios 25 e 26 exibem um padrão "triangular inferior" que torna fácil resolvê-los por substituição de frente para trás. (Encontraremos substituição de frente para trás de novo no capítulo 3.) Resolva esses sistemas.

25. $\begin{aligned} x &= 2 \\ 2x + y &= -3 \\ -3x - 4y + z &= -10 \end{aligned}$ **26.** $\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 &= 5 \\ \tfrac{3}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$

Encontre as matrizes completas dos sistemas lineares dos exercícios 27 a 30.

27. $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ **28.** $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} x + 5y &= -1 \\ -x + y &= -5 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}$ **30.** $\begin{aligned} a - 2b + d &= 2 \\ -a + b - c - 3d &= 1 \end{aligned}$

Nos exercícios 31 e 32, encontre um sistema de equações lineares que tenha a matriz dada como sua matriz completa.

31. $\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

32. $\left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$

Nos exercícios de 33 a 38, resolva os sistemas lineares dos exercícios indicados.

33. Exercício 27 **34.** Exercício 28

35. Exercício 29 **36.** Exercício 30

37. Exercício 31 **38.** Exercício 32

39. (a) Encontre um sistema de duas equações lineares, nas variáveis x e y, cujo conjunto solução seja dado pelas equações paramétricas $x = t$ e $y = 3 - 2t$.

(b) Encontre uma outra solução paramétrica, para o sistema do item (a), na qual o parâmetro seja s e $y = s$.

40. (a) Encontre um sistema de duas equações lineares, nas variáveis x_1, x_2 e x_3, cujo conjunto solução seja dado pelas equações paramétricas $x_1 = t$, $x_2 = 1 + t$ e $x_3 = 2 - t$.

(b) Encontre uma outra solução paramétrica, para o sistema do item (a), na qual o parâmetro seja s e $x_3 = s$.

Nos exercícios de 41 a 44, os sistemas não são sistemas de equações lineares. Encontre substituições (mudanças de variáveis) que convertam cada sistema em um sistema linear e use esse sistema linear para ajudar a resolver o sistema dado.

41. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} = 0$
$\dfrac{3}{x} + \dfrac{4}{y} = 1$

42. $x^2 + 2y^2 = 6$
$x^2 - y^2 = 3$

43. $\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{sen} y = 2$
$\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} y + \cos z = 2$
$\operatorname{sen} y - \cos z = -1$

44. $-2^a + 2(3^b) = 1$
$3(2^a) - 4(3^b) = 1$

2.2 Métodos Diretos de Resolução de Sistemas Lineares

Nesta seção, veremos um procedimento geral e sistemático de resolução de sistema de equações lineares. Esse procedimento é baseado na ideia de reduzir a matriz completa do sistema dado a uma forma que possa então ser resolvida por substituição de trás para a frente. O método é *direto* no sentido de que leva diretamente à solução (se existir) em um número finito de passos. Na seção 2.5, consideraremos alguns métodos *indiretos* que funcionam de um modo completamente diferente.

As Matrizes e a Forma Escalonada

Há duas matrizes importantes associadas a um sistema linear. A ***matriz dos coeficientes*** contém os coeficientes das variáveis, e a ***matriz completa*** (que já vimos) é a matriz dos coeficientes acrescentada de uma coluna extra que contém os termos independentes.

Para o sistema

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 3 \\ x + 5z &= 1 \\ -x + 3y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

a matriz dos coeficientes é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

e a matriz completa é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Note que, se uma variável estiver faltando (como a variável y na segunda equação), seu coeficiente 0 será colocado na matriz na posição correspondente. Se denotarmos a matriz dos coeficientes de um sistema linear por A e o vetor coluna dos termos independentes por $\mathbf{b}$, a forma da matriz completa será $[A \mid \mathbf{b}]$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como t pode ter um dos valores 0 ou 1, existem exatamente duas soluções:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observação: Sistemas lineares sobre $\mathbb{Z}_p$ nunca podem ter infinitas soluções. (Por quê não?) Mais precisamente, quando há mais de uma solução, o número de soluções é finito e é função tanto do número de variáveis livres como de p. (Veja o exercício 59.)

Exercícios 2.2

Nos exercícios de 1 a 8, determine se a matriz dada está na forma escalonada por linhas. Se estiver, decida se ela também está na forma escalonada reduzida por linhas.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 9 a 14, use operações elementares com as linhas para reduzir a matriz dada às formas (a) escalonada por linhas e (b) escalonada reduzida por linhas.

9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ -3 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

15. Reverta as operações elementares com as linhas usadas no exemplo 2.9 para mostrar que podemos converter

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \quad \text{em}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

16. Em geral, qual é a operação elementar com linhas que desfaz cada uma das três operações elementares com linhas $L_i \leftrightarrow L_j$, kL_i, e $L_i + kL_j$?

Nos exercícios 17 e 18, mostre que as matrizes dadas são equivalentes por linha e encontre uma sequência de operações elementares com as linhas que convertem A em B.

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

19. O que está errado com a seguinte "demonstração" de que toda matriz com pelo menos duas linhas é equivalente por linha a uma matriz com uma linha nula?

Efetue $L_2 + L_1$ e $L_1 + L_2$. Agora as linhas 1 e 2 são idênticas. Efetue agora $L_2 - L_1$ para conseguir uma linha de zeros na segunda linha.

20. Qual o efeito resultante ao efetuar as seguintes operações elementares sobre linhas em uma matriz (com pelo menos duas linhas)?

$$L_2 + L_1, L_1 - L_2, L_2 + L_1, -L_1$$

21. Alunos, com frequência, realizam o seguinte tipo de cálculo para introduzir um zero na matriz:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{3L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Entretanto, $3L_2 - 2L_1$ *não* é uma operação elementar com as linhas. Por que não? Mostre como poderíamos obter o mesmo resultado usando apenas operações elementares com as linhas.

22. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Mostre que as linhas podem ser usadas para criar um 1 líder no topo da primeira coluna. Qual você prefere e por quê?

23. Qual é o posto de cada uma das matrizes dos exercícios 1 a 8?

24. Quais são as possíveis formas escalonadas reduzidas de matrizes 3×3?

Nos exercícios de 25 a 34, resolva o sistema de equações dado usando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss-Jordan.

25. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -x + 3y + z &= 5 \\ 3x + y + 7z &= 2 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 2w + 3x - y + 4z &= 1 \\ 3w - x + z &= 1 \\ 3w - 4x + y - z &= 2 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 2r + s &= 3 \\ 4r + s &= 7 \\ 2r + 5s &= -1 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= 2 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 &= 2 \\ \tfrac{1}{6}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - 3x_4 + x_5 &= -1 \\ \tfrac{1}{3}x_1 - 2x_3 - 4x_5 &= 8 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} \sqrt{2}x + y + 2z &= 1 \\ \sqrt{2}y - 3z &= -\sqrt{2} \\ -y + \sqrt{2}z &= 1 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} w + x + 2y + z &= 1 \\ w - x - y + z &= 0 \\ x + y &= -1 \\ w + x + z &= 2 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} a + b + c + d &= 4 \\ a + 2b + 3c + 4d &= 10 \\ a + 3b + 6c + 10d &= 20 \\ a + 4b + 10c + 20d &= 35 \end{aligned}$

Nos exercícios de 35 a 38, determine, sem efetuar nenhum cálculo, se um sistema linear com a matriz completa dada tem uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução. Justifique suas respostas.

35. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$

36. $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right]$

37. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{array}\right]$

38. $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right]$

39. Mostre que, se $ad - bc \neq 0$, o sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

tem uma única solução.

Nos exercícios de 40 a 43, para que valor(es) de k, se houver, o sistema terá (a) nenhuma solução, (b) uma única solução e (c) infinitas soluções?

40. $\begin{aligned} kx + 2y &= 3 \\ 2x - 4y &= -6 \end{aligned}$

41. $\begin{aligned} x + ky &= 1 \\ kx + y &= 1 \end{aligned}$

42. $\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ x + y + z &= k \\ 2x - y + 4z &= k^2 \end{aligned}$

43. $\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ kx + y + z &= -2 \end{aligned}$

44. Dê exemplos de sistemas homogêneos com m equações lineares, em n variáveis com $m = n$ e com $m > n$, que tenham (a) infinitas soluções e (b) uma única solução.

Nos exercícios 45 e 46, encontre a reta interseção de cada par de planos dados.

45. $3x + 2y + z = -1$ e $2x - y + 4z = 5$

46. $4x + y + z = 0$ e $2x - y + 3z = 2$

47. **(a)** Dê um exemplo de três planos cuja interseção seja uma reta (figura 2.4).

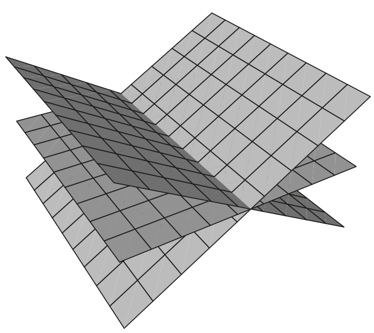


Figura 2.4

(b) Dê um exemplo de três planos que não tenham nenhum ponto em comum, mas se interceptem dois a dois (figura 2.5).

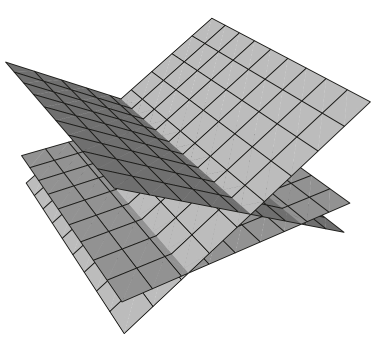


Figura 2.5

(c) Dê um exemplo de três planos, de modo que exatamente dois deles sejam paralelos (figura 2.6).

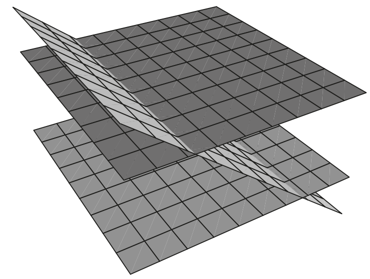


Figura 2.6

(d) Dê um exemplo de três planos que se interceptem em um único ponto (figura 2.7).

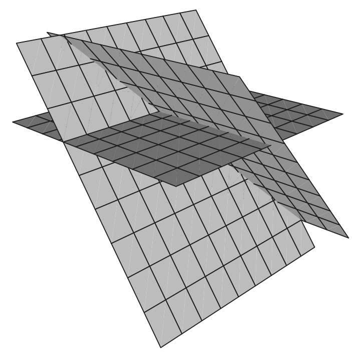


Figura 2.7

Nos exercícios 48 e 49, determine se as retas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ *se interceptam e, em caso afirmativo, encontre o ponto de interseção.*

48. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

49. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

50. Sejam $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Descreva todos os pontos $Q = (a, b, c)$ tais que a reta que passa por Q e tem vetor diretor $\mathbf{v}$ intercepta a reta de equação $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$.

51. Lembre-se de que o produto vetorial dos vetores **u** e **v** é um vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal a ambos os vetores **u** e **v**. (Veja Investigação: O Produto Vetorial, no capítulo 1.) Se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

mostre que existem infinitos vetores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

que satisfazem $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ simultaneamente e que todos são múltiplos de

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

52. Sejam $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Mostre que as retas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ são reversas. Encontre equações vetoriais de um par de planos paralelos, cada um deles contendo uma das retas.

Nos exercícios de 53 a 58, resolva o sistema de equações lineares sobre o corpo $\mathbb{Z}_p$ indicado.

53. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

54. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_2$

55. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x + z &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

56. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

57. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_7$

58. $\begin{aligned} x_1 + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 3x_3 &= 2 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

59. Prove o seguinte corolário do Teorema do Posto: seja A uma matriz $m \times n$ com elementos em $\mathbb{Z}_p$. Qualquer sistema de equações lineares possível, com matriz dos coeficientes igual a A, tem exatamente $p^{n\text{-posto}(A)}$ soluções sobre $\mathbb{Z}_p$.

60. Quando p não é primo, um cuidado extra é necessário ao resolvermos um sistema linear (ou, na verdade, qualquer equação) sobre $\mathbb{Z}_p$. Usando o método de eliminação de Gauss, resolva o seguinte sistema sobre $\mathbb{Z}_6$. Quais complicações surgem?

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

Projeto de Texto

Uma História sobre o Método de Eliminação de Gauss

Como observado no resumo biográfico de Gauss apresentado nesta seção, Gauss, de fato, não "inventou" o método de eliminação de Gauss. De alguma forma, tal método já era conhecido desde o século III a.C. e aparece em textos matemáticos por toda Europa e Ásia.

Escreva um texto sobre a história dos métodos de eliminação para resolução de sistemas de equações lineares. Qual papel Gauss, de fato, teve nesta história, e por que seu nome se vinculou ao método?

1. S. Athloen e R. McLaughlin, Gauss-Jordan reduction: A brief history, *American Mathematical Monthly* 94 (1987), pp. 130–142.
2. Joseph F. Grcar, Mathematicians of Gaussian Elimination, *Notices of the AMS,* Vol. 58, N°. 6 (2011), pp. 782–792. (Disponível em http://www.ams.org/notices/201106/index.html)
3. Roger Hart, *The Chinese Roots of Linear Algebra* (Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2011).
4. Victor J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (3ª edição) (Reading, MA: Addison Wesley Longman, 2008).

dos demais. Se necessário, reindexamos os vetores de modo que possamos escrever $\mathbf{v}_m = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{m-1}\mathbf{v}_{m-1}$. Então, as operações elementares com as linhas, $L_m - c_1L_1, L_m - c_2L_2, \ldots, L_m - c_{m-1}L_{m-1}$, aplicadas à matriz A, criarão uma linha nula na linha m. Logo, o posto$(A) < m$.

Reciprocamente, assuma que posto$(A) < m$. Existe então uma sequência de operações com linhas que irá criar uma linha nula. Um argumento de substituição sucessiva, análogo ao usado no exemplo 2.25, pode ser usado para mostrar que $\mathbf{0}$ é uma combinação linear não trivial de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Assim, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes.

Em algumas situações, podemos deduzir sem nenhum trabalho que um conjunto de vetores é linearmente dependente. Essa situação ocorre, por exemplo, quando o vetor nulo pertence ao conjunto (como no exemplo 2.22). Outro exemplo é quando há "vetores demais" para serem independentes. O teorema a seguir resume esse caso. (Veremos uma versão mais aguçada desse resultado no capítulo 6.)

Teorema 2.8 Qualquer conjunto de m vetores de $\mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se $m > n$.

Demonstração Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vetores (coluna) de $\mathbb{R}^n$, e A a matriz $n \times m$ $[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_m]$ com esses vetores como suas colunas. Pelo teorema 2.6, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes se e somente se o sistema linear homogêneo de matriz completa $[A \mid \mathbf{0}]$ tiver uma solução não trivial. Mas, de acordo com o teorema 2.6, esse será sempre o caso se A tiver mais colunas do que linhas; é esse o caso aqui, já que o número de colunas m é maior que o número de linhas n.

Exemplo 2.26

Os vetores $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ são linearmente dependentes, pois não pode haver mais do que dois vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$. (Note que, se quisermos encontrar a relação de dependência entre esses três vetores, devemos resolver o sistema linear homogêneo cuja matriz dos coeficientes tem os vetores dados como colunas. Faça isso!)

Exercícios 2.3

Nos exercícios de 1 a 6, determine se o vetor $\mathbf{v}$ *é uma combinação linear dos demais vetores.*

1. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

2. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

3. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

4. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

5. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},$
$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

CAS **6.** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3{,}2\\2{,}0\\-2{,}6\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1{,}0\\0{,}4\\4{,}8\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}3{,}4\\1{,}4\\-6{,}4\end{bmatrix},$
$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}-1{,}2\\0{,}2\\-1{,}0\end{bmatrix}$

*Nos exercícios 7 e 8, determine se o vetor **b** pertence ao conjunto gerado pelas colunas da matriz A.*

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix}$

9. Mostre que $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

10. Mostre que $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

11. Mostre que $\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

12. Mostre que $\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

Nos exercícios de 13 a 16, descreva (a) geometricamente e (b) algebricamente o conjunto gerado pelos vetores dados.

13. $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

17. A equação geral do plano que contém os pontos (1, 0, 3), (−1, 1, −3) e a origem é da forma $ax + by + cz = 0$. Ache *a, b,* e *c.*

18. Prove que **u**, **v** e **w** estão todos em ger(**u**, **v**, **w**).

19. Prove que **u**, **v**, e **w** estão todos em ger(**u**, **u** + **v**, **u** + **v** + **w**).

20. **(a)** Prove que, se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ e $T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, então $\text{ger}(S) \subseteq \text{ger}(T)$. (*Sugestão:* refraseie esta questão em termos de combinações lineares.)

(b) Deduza que, se $\mathbb{R}^n = \text{ger}(S)$, então $\mathbb{R}^n = \text{ger}(T)$ também.

21. **(a)** Suponha que o vetor **w** seja uma combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, e que cada $\mathbf{u}_i$ seja uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Prove que **w** é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ e, portanto, $\text{ger}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) \subseteq \text{ger}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$.

(b) Na parte (a), suponha também que cada $\mathbf{v}_j$ seja combinação linear de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Prove que $\text{ger}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \text{ger}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$.

(c) Use o resultado da parte (b) para provar que

$$\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

[*Sugestão:* sabemos que $\mathbb{R}^3 = \text{ger}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.]

Use o método do exemplo 2.23 e o teorema 2.6 para determinar se os conjuntos de vetores nos exercícios de 22 a 31 são linearmente independentes. Se, para algum deles, a resposta puder ser determinada por inspeção (isto é, sem contas), diga por quê. Para quaisquer conjuntos linearmente dependentes, encontre a relação de dependência entre os vetores.

22. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 32 a 41, determine se os conjuntos de vetores no exercício dado são linearmente independentes, *convertendo os vetores em vetores-linha e usando o método do exemplo 2.25 e do teorema 2.7. Para os conjuntos linearmente dependentes, encontre uma relação de dependência entre os vetores.*

32. Exercício 22 **33.** Exercício 23

34. Exercício 24 **35.** Exercício 25

36. Exercício 26 **37.** Exercício 27

38. Exercício 28 **39.** Exercício 29

40. Exercício 30 **41.** Exercício 31

42. **(a)** Qual será o posto de uma matriz A $n \times n$ se suas colunas, vistas como vetores de $\mathbb{R}^n$, forem linearmente independentes? Explique.

(b) Qual será o posto de uma matriz A $n \times n$ se suas linhas, vistas como vetores de $\mathbb{R}^n$, forem linearmente independentes? Explique.

43. **(a)** Se os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem linearmente independentes, também serão os vetores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} + \mathbf{w}$ linearmente independentes? Justifique sua resposta.

(b) Se os vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem linearmente independentes, também serão os vetores $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ linearmente independentes? Justifique sua resposta.

44. Prove que dois vetores são linearmente dependentes se e somente se um deles for um múltiplo escalar do outro. (*Sugestão*: considere separadamente o caso em que um dos vetores é $\mathbf{0}$.)

45. Dê uma demonstração "vetor-linha" para o Teorema 2.8.

46. Demonstre que todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente.

47. Suponha que $S = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\}$ seja um conjunto de vetores de algum $\mathbb{R}^n$ e que $\mathbf{v}$ seja uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k$. Se $S' = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$, mostre que ger($S$) = ger($S'$). [*Sugestão*: o exercício 21(b) é útil aqui.]

48. Seja $\{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ um conjunto de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathbf{v}$ um vetor de $\mathbb{R}^n$. Suponha que $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$ com $c_1 \neq 0$. Prove que $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_k\}$ é linearmente independente.

2.4 Aplicações

Há uma quantidade muito grande de aplicações de sistemas de equações lineares para que se possa fazer justiça a elas em uma única seção. Esta seção introduzirá algumas poucas aplicações, com o objetivo de ilustrar diversas situações em que elas surgem.

Alocação de Recursos

Uma grande quantidade de aplicações dos sistemas de equações lineares envolve a alocação de recursos limitados sujeitos a um conjunto de restrições.

Exemplo 2.27 Um biólogo colocou três espécies de bactéria (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A, B e C). A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2300 unidades de A, 800 unidades de B e 1500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a tabela 2.2. Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento?

Tabela 2.2

	Bactéria da Espécie I	Bactéria da Espécie II	Bactéria da Espécie III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

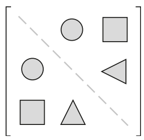


Figura 3.1
Uma matriz simétrica

Então, A é simétrica, pois $A^T = A$; entretanto, B não é simétrica, já que

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \neq B.$$

Uma matriz simétrica tem a propriedade de ser a sua própria "imagem espelhada" na diagonal principal. A figura 3.1 ilustra essa propriedade para uma matriz 3×3. As formas geométricas correspondentes representam elementos iguais; os elementos da diagonal (que estão na linha pontilhada) são arbitrários.

Uma definição de matriz simétrica elemento a elemento também é útil. Ela é simplesmente a descrição algébrica da propriedade da "reflexão".

Uma matriz quadrada é simétrica se e somente se $A_{ij} = A_{ji}$ para todo i e j.

Exercícios 3.1

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nos exercícios de 1 a 16, calcule a matriz indicada (se possível).

1. $A + 2D$

2. $3D - 2A$

3. $B - C$

4. $C - B^T$

5. AB

6. BD

7. $D + BC$

8. BB^T

9. $E(AF)$

10. $F(DF)$

11. FE

12. EF

13. $B^TC^T - (CB)^T$

14. $DA - AD$

15. A^3

16. $(I_2 - D)^2$

17. Dê um exemplo de uma matriz 2×2 não nula tal que $A^2 = O$.

18. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$. Ache matrizes B e C de ordem 2×2 tais que $AB = AC$, mas $B \neq C$.

19. Uma fábrica produz três produtos (banheiras, pias e tanques) e os envia para armazenamento em dois depósitos. O número de unidades de cada produto enviadas para cada depósito é dado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 75 \\ 150 & 100 \\ 100 & 125 \end{bmatrix}$$

(em que a_{ij} é o número de unidades enviadas do produto i para o depósito j, e os produtos são colocados em ordem alfabética). O custo de remessa de uma unidade de cada produto, por caminhão, é: \$1,50 por banheira, \$1,00 por pia e \$2,00 por tanque. Os custos unitários correspondentes ao envio por trem são: \$1,75, \$1,50 e \$1,00. Organize esses custos em uma matriz B e use multiplicação de matrizes para mostrar como a fábrica pode comparar os custos de remessa — por caminhão e por trem — de seus produtos para cada um dos dois depósitos.

20. Em relação ao exercício 19, suponha que o custo unitário de distribuição dos produtos para as lojas seja o mesmo para todos os produtos, mas que varie dependendo do depósito por causa das distâncias envolvidas. Custa \$0,75 para distribuir uma unidade do depósito 1 e \$1,00 para distribuir uma unidade do depósito 2. Organize esses custos em uma matriz C e use multiplicação de matrizes para calcular o custo total de distribuição de cada produto.

Nos exercícios 21 e 22, escreva o sistema de equações lineares dado como uma equação matricial da forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

21. $\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 4 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} -x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 \qquad &= -2 \\ x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$

Nos exercícios de 23 a 28, sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

23. Use a representação matriz-coluna do produto para escrever cada coluna de AB como combinação linear das colunas de A.

24. Use a representação matriz-linha do produto para escrever cada linha de AB como combinação linear das linhas de B.

25. Calcule o produto externo da expansão de AB.

26. Use a representação matriz-coluna do produto para escrever cada coluna de BA como combinação linear das colunas de B.

27. Use a representação matriz-linha do produto para escrever cada linha de BA como combinação linear das linhas de A.

28. Calcule o produto externo da expansão de BA.

Nos exercícios 29 e 30, assuma que o produto AB faz sentido.

29. Prove que, se as colunas de B são linearmente dependentes então as colunas de AB também o são.

30. Prove que, se as linhas de A são linearmente dependentes então as linhas de AB também o são.

Nos exercícios de 31 a 34, calcule AB usando multiplicação por blocos com o particionamento indicado.

31. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

32. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{array}\right]$

33. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

34. $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$

35. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $A^2, A^3, \ldots, A^7$.
(b) O que é A^{2015}? Por quê?

36. Seja $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Determine B^{2015}. Justifique.

37. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre uma fórmula para A^n $(n \geq 1)$ e demonstre a sua fórmula usando indução matemática.

38. Seja $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$.

(b) Prove, usando indução matemática, que

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix} \text{ para } n \geq 1$$

39. Em cada um dos itens a seguir, ache a matriz $A = [\, a_{ij} \,]$ de ordem 4×4 que satisfaz a condição dada:

(a) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ **(b)** $a_{ij} = j - i$

(c) $a_{ij} = (i-1)^j$ **(d)** $a_{ij} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{(i+j-1)\pi}{4}\right)$

40. Em cada um dos itens a seguir, ache a matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem 6×6 que satisfaz a condição dada:

(a) $a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{se } i \leq j \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$ **(b)** $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i - j| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |i - j| > 1 \end{cases}$

(c)
(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } 6 \leq i + j \leq 8 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$

41. Prove o teorema 3.1(a).

O próximo teorema diz que os resultados do exemplo 3.21 são verdadeiros em geral.

Teorema 3.5

a. Se A é uma matriz quadrada, então $A + A^T$ é uma matriz simétrica.
b. Para toda matriz A, as matrizes AA^T e A^TA são simétricas.

Demonstração Iremos provar (a) e deixar (b) como exercício 34. Verificamos simplesmente que

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$$

(usando propriedades da transposta e a comutatividade da adição de matrizes). Assim, $A + A^T$ é igual à sua transposta e, portanto, por definição, é simétrica.

Exercícios 3.2

Nos exercícios de 1 a 4, determine X, dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. $X - 2A + 3B = O$

2. $2X = A - B$

3. $2(A + 2B) = 3X$

4. $2(A - B + X) = 3(X - A)$

Nos exercícios de 5 a 8, escreva B como combinação linear das outras matrizes, se possível.

5. $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$
$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$
$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$
$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$
$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 9 a 12, ache a expressão geral do conjunto gerado pelas matrizes dadas, como no exemplo 3.17.

9. ger(A_1, A_2) do exercício 5

10. ger(A_1, A_2, A_3) do exercício 6

11. ger(A_1, A_2, A_3) do exercício 7

12. ger(A_1, A_2, A_3, A_4) do exercício 88

Nos exercícios de 13 a 16, determine se as matrizes dadas são linearmente independentes.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix},$
$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

17. Prove o teorema 3.2 (a) - (d).

18. Prove o teorema 3.2 (e) - (h).

19. Prove o teorema 3.3 (c).

20. Prove o teorema 3.3 (d).

21. Prove a parte do teorema 3.3 (e) que não foi provada no texto.

22. Prove que, para matrizes A e B quadradas, $AB = BA$ se e somente se $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

Nos exercícios de 23 a 25, se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, *encontre condições sobre a, b, c e d para que AB = BA.*

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **25.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

26. Ache condições sobre a, b, c e d para que

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comute com $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

27. Ache condições sobre a, b, c e d para que

$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comute com todas as matrizes 2×2.

28. Prove que, se AB e BA estiverem definidas, então AB e BA são matrizes quadradas.

Dizemos que uma matriz quadrada é ***triangular superior*** *quando todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero. Assim, a forma de uma matriz triangular superior é*

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

em que os elementos marcados por $*$ *são arbitrários. Uma definição mais formal de uma tal matriz* $A = [a_{ij}]$ *é que* $a_{ij} = 0$ *se* $i > j$.

29. Prove que o produto de duas matrizes triangulares superiores de ordem $n \times n$ é uma matriz triangular superior.

30. Prove o teorema 3.4 (a)–(c).

31. Prove o teorema 3.4 (e).

32. Usando indução, prove que

$(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)^T = A_1^T + A_2^T + \cdots + A_n^T$ para todo $n \geq 1$.

33. Usando indução, prove que

$(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_1^T$ para todo $n \geq 1$.

34. Prove o teorema 3.5 (b).

35. **(a)** Prove que, se A e B são matrizes $n \times n$ simétricas, $A + B$ também é simétrica.

(b) Prove que, se A é uma matriz $n \times n$ simétrica, kA também é simétrica, para todo escalar k.

36. **(a)** Dê um exemplo para mostrar que, se A e B são matrizes $n \times n$ simétricas, AB não necessariamente é simétrica.

(b) Prove que, se A e B são matrizes $n \times n$ simétricas, AB é simétrica se e somente se $AB = BA$.

Dizemos que uma matriz quadrada é ***antissimétrica*** *se* $A^T = -A$.

37. Quais das seguintes matrizes são antissimétricas?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **(b)** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **(d)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

38. Dê uma definição termo a termo de matriz antissimétrica.

39. Prove que a diagonal principal de uma matriz antissimétrica precisa ser formada unicamente por zeros.

40. Prove que, se A e B são matrizes $n \times n$ antissimétricas, $A + B$ também é antissimétrica.

41. Se A e B são matrizes 2×2 antissimétricas, sob que condições a matriz AB é antissimétrica?

42. Prove que, se A é uma matriz $n \times n$ então $A - A^T$ é antissimétrica.

43. **(a)** Prove que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica. (*Sugestão:* use o teorema 3.5 e o exercício 42).

(b) Ilustre o item (a) usando a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

O ***traço*** *de uma matriz* $A = [a_{ij}]$ *de ordem* $n \times n$ *é a soma dos elementos da sua diagonal principal e é denotado por tr(A). Ou seja,*

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

44. Se A e B são matrizes $n \times n$, prove as seguintes propriedades do traço:

(a) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

(b) $\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$, em que k é um escalar

45. Prove que, se A e B são matrizes $n \times n$ então $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

46. Se A é uma matriz qualquer, $\mathrm{tr}(AA^T)$ é igual a quê?

47. Mostre que não existem matrizes A e B de ordem 2×2 tais que $AB - BA = I_2$.

e não há frações em $\mathbb{Z}_3$. Precisamos usar inversos multiplicativos em vez de divisão.

No lugar de $1/\det A = 1/2$, usamos 2^{-1}; isto é, vamos encontrar um número x que satisfaz a equação $2x = 1$ em $\mathbb{Z}_3$. É fácil ver que $x = 2$ é a solução que queremos: em $\mathbb{Z}_3$, $2^{-1} = 2$, pois $2(2) = 1$. A fórmula para A^{-1} agora se torna

$$A^{-1} = 2^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

que concorda com a nossa primeira solução.

Exercícios 3.3

Nos exercícios de 1 a 10, ache a inversa da matriz dada (se ela existir) usando o teorema 3.8.

1. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -1{,}5 & -4{,}2 \\ 0{,}5 & 2{,}4 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 3{,}55 & 0{,}25 \\ 8{,}52 & 0{,}60 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/c & 1/d \end{bmatrix}$, em que a, b, c e d são todos não nulos.

Nos exercícios de 11 a 12, resolva os sistemas dados usando o método do exemplo 3.25.

11. $\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ 5x + 3y &= 2 \end{aligned}$ **12.** $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$

13. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine A^{-1} e use-a para resolver os três sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$.

(b) Resolva os três sistemas simultaneamente reduzindo por linhas a matriz completa $[A \mid \mathbf{b}_1\, \mathbf{b}_2\, \mathbf{b}_3]$, por meio do método de eliminação de Gauss-Jordan.

(c) Conte cuidadosamente o número total de multiplicações individuais que você efetuou em (a) e em (b). Você deve descobrir que, mesmo para esse exemplo 2×2, um dos métodos usa menos operações. Para sistemas maiores, a diferença é ainda mais acentuada, e isso explica por que sistemas computacionais não usam um desses métodos para resolver sistemas lineares.

14. Prove o teorema 3.9(b).

15. Prove o teorema 3.9(d).

16. Prove que a matriz identidade I_n de ordem $n \times n$ é invertível e que $I_n^{-1} = I_n$.

17. **(a)** Dê um contraexemplo para mostrar que, em geral, $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

(b) Sob que condições em A e B é verdade que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$? Prove sua afirmação.

18. Por indução, prove que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são matrizes invertíveis de mesmo tamanho, o produto $A_1A_2\cdots A_n$ é invertível e $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

19. Dê um contraexemplo para mostrar que, em geral, $(A + B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

Nos exercícios de 20 a 23, resolva a equação matricial em X. Simplifique suas respostas tanto quanto possível. (Nas palavras de Albert Einstein, "Tudo deve ser feito tão simples quanto possível, mas não mais simples".) Assuma que todas as matrizes são invertíveis.

20. $XA^2 = A^{-1}$ **21.** $AXB = (BA)^2$

22. $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$ **23.** $ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$

Nos exercícios de 24 a 30, sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Em cada caso, ache a matriz elementar E que satisfaça a equação dada.

24. $EA = B$ **25.** $EB = A$ **26.** $EA = C$

27. $EC = A$ **28.** $EC = D$ **29.** $ED = C$

30. Existe uma matriz elementar E tal que $EA = D$? Por quê?

Nos exercícios de 31 a 38, ache a inversa da matriz elementar dada.

31. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c \neq 0$ **38.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c \neq 0$

Nos exercícios 39 e 40, ache uma sequência de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que $E_k \cdots E_2E_1A = I$. Use essa sequência para escrever A e A^{-1} como produtos de matrizes elementares.

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ **40.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

41. Prove o teorema 3.13 para o caso de $AB = I$.

42. **(a)** Prove que se A é invertível e $AB = O$, então $B = O$.
(b) Dê um contraexemplo para mostrar que o resultado da parte (a) pode falhar se A não for invertível.

43. **(a)** Prove que, se A é invertível e $BA = CA$, então $B = C$.
(b) Dê um contraexemplo para mostrar que o resultado da parte (a) pode falhar se A não for invertível.

44. Uma matriz quadrada A é chamada ***idempotente*** se $A^2 = A$. (A palavra *idempotente* vem do Latim *idem*, que significa “mesmo”, e *potere*, que significa “ter poder ou potência”.
(a) Ache três matrizes 2×2 idempotentes.
(b) Prove que a única matriz $n \times n$ idempotente invertível é a matriz identidade.

45. Mostre que, se A é uma matriz quadrada que satisfaz a equação $A^2 - 2A + I = O$, então $A^{-1} = 2I - A$.

46. Prove que, se uma matriz simétrica é invertível, sua inversa também é simétrica.

47. Prove que, se A e B são matrizes quadradas e AB é invertível, A e B são ambas invertíveis.

Nos exercícios de 48 a 63, use o método de Gauss-Jordan para achar a inversa da matriz dada (se existir).

48. $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ **49.** $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

50. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ **51.** $\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$

52. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **53.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

54. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$

56. $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}$ **57.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

58. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$ **60.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{Z}_2$

61. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{Z}_5$ **62.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{Z}_3$

63. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ em $\mathbb{Z}_7$

O particionamento de matrizes quadradas grandes às vezes pode tornar mais fácil o cálculo de suas inversas, particularmente se os blocos tiverem uma forma adequada. Nos exercícios de 64 a 68, verifique, por multiplicação por blocos, que a inversa de uma matriz, particionada como apresentado, resulta na matriz dada. (Assuma que todas as inversas existem, quando necessário.)

64. $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$

65. $\begin{bmatrix} O & B \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -(BC)^{-1} & (BC)^{-1}B \\ C(BC)^{-1} & I - C(BC)^{-1}B \end{bmatrix}$

66. $\begin{bmatrix} I & B \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - BC)^{-1} & -(I - BC)^{-1}B \\ -C(I - BC)^{-1} & I + C(I - BC)^{-1}B \end{bmatrix}$

67. $\begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}$

$= \begin{bmatrix} -(BD^{-1}C)^{-1} & (BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ D^{-1}C(BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} - D^{-1}C(BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$

68. $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$, em $P = (A - BD^{-1}C)^{-1}$, $Q = -PBD^{-1}$, $R = -D^{-1}CP$, e $S = D^{-1} + D^{-1}CPBD^{-1}$

Nos exercícios de 69 a 72, particione as matrizes dadas de modo que você possa aplicar uma das fórmulas dos exercícios 64 a 68, e então calcule a inversa usando aquela fórmula.

69. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

70. A matriz do exercício 58.

71. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

72. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

3.4 A Fatoração *LU*

Assim como é natural (e esclarecedor) fatorar um número natural como um produto de outros números naturais — por exemplo, $30 = 2 \times 3 \times 5$ — frequentemente também é útil fatorar matrizes como produto de outras matrizes. Qualquer representação de uma matriz como um produto de outras duas ou mais matrizes é uma **fatoração matricial**. Por exemplo,

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

é uma fatoração matricial.

Algumas fatorações são mais úteis do que outras. Nesta seção, iremos introduzir uma fatoração que surge na solução de sistemas de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss e se adapta particularmente bem a implementações em computadores. Nos capítulos subsequentes, iremos estudar outras fatorações matriciais igualmente úteis. O assunto é, de fato, muito rico. Há livros e cursos inteiros dedicados a ele.

Considere um sistema de equações lineares da forma $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, sendo A uma matriz $n \times n$. Nosso objetivo é mostrar que o método de eliminação de Gauss implicitamente fatora A num produto de matrizes que nos permite resolver facilmente o sistema dado (e qualquer outro sistema com a mesma matriz dos coeficientes).

O exemplo a seguir ilustra a ideia básica.

Exemplo 3.33

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução Como $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 4\mathbf{e}_3$,

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Deve ficar claro que o vetor das coordenadas de todo vetor (coluna) de $\mathbb{R}^n$) em relação à base canônica é simplesmente o próprio vetor.

Exemplo 3.54

No exemplo 3.44, vimos que $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ são três vetores pertencentes ao mesmo subespaço (plano que passa pela origem) S de $\mathbb{R}^3$, e que $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma base de S. Como $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$, temos

$$[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Veja a figura 3.3.

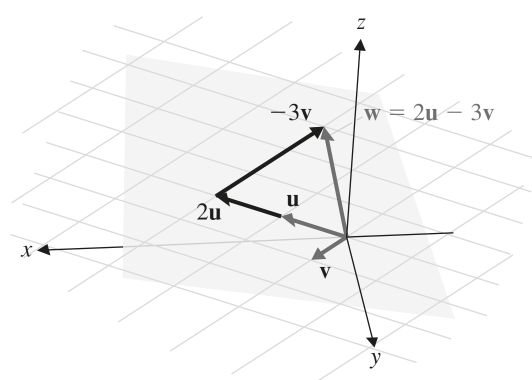


Figura 3.3
As coordenadas de um vetor em relação a uma base

Exercícios 3.5

Nos exercícios de 1 a 4, seja S a coleção de vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^2$ *que satisfazem a propriedade dada. Em cada caso, ou prove que S forma um subespaço de* $\mathbb{R}^2$*, ou dê um contraexemplo para mostrar que S não forma um subespaço.*

1. $x = 0$ **2.** $x \geq 0, y \geq 0$

3. $y = 2x$ **4.** $xy \geq 0$

Nos exercícios de 5 a 8, seja S a coleção de vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *que satisfazem a propriedade dada. Em cada caso, ou prove que S forma um subespaço de* $\mathbb{R}^3$*, ou dê um contraexemplo para mostrar que S não forma um subespaço.*

5. $x = y = z$ **6.** $z = 2x, y = 0$

7. $x - y + z = 1$ **8.** $|x - y| = |y - z|$

9. Prove que toda reta que passa pela origem de $\mathbb{R}^3$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

10. Suponha que S seja formado por todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ que estão no eixo das abscissas ou das ordenadas (ou em ambos). (S é a *reunião* dos dois eixos.) S é um subespaço de $\mathbb{R}^2$? Por quê?

Nos exercícios 11 e 12, determine se **b** *está em col(A) e se* **w** *está em lin(A), como no exemplo 3.41.*

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

13. No exercício 11, determine se $\mathbf{w}$ está em lin(A), utilizando o método descrito na observação após o exemplo 3.41.

14. No exercício 12, determine se $\mathbf{w}$ está em lin(A), utilizando o método descrito na observação após o exemplo 3.41.

15. Se A é a matriz do exercício 11, então $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ está em anul(A)?

16. Se A é a matriz do exercício 12, então $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ está em anul(A)?

Nos exercícios de 17 a 20, encontre bases para lin(A), col(A) e (A).

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **18.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 21 a 24, encontre bases para lin(A) e col(A) nos exercícios citados, usando A^T.

21. Exercício 17 **22.** Exercício 18

23. Exercício 19 **24.** Exercício 20

25. Explique cuidadosamente por que suas respostas para os exercícios 17 e 21 são ambas corretas, embora pareçam haver diferenças.

26. Explique cuidadosamente por que suas respostas para os exercícios 18 e 22 são corretas, embora pareçam haver diferenças.

Nos exercícios de 27 a 30, determine uma base para o conjunto gerado pelos vetores dados.

27. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **28.** $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

29. $[2 \quad -3 \quad 1], [1 \quad -1 \quad 0], [4 \quad -4 \quad 1]$

30. $[0 \quad 1 \quad -2 \quad 1], [3 \quad 1 \quad -1 \quad 0], [2 \quad 1 \quad 5 \quad 1]$

Nos exercícios 31 e 32, para cada subespaço gerado pelos vetores dados, ache uma base formadas por um subconjunto desses vetores.

31. Exercício 29 **32.** Exercício 30

33. Prove que, se R é uma matriz escalonada, uma base para lin(A) consiste nas linhas não nulas de R.

34. Prove que, se as colunas de A são linearmente independentes, elas formam necessariamente uma base para col(A).

Nos exercícios de 35 a 38, dê o posto e a nulidade das matrizes nos exercícios citados.

35. Exercício 17

36. Exercício 18

37. Exercício 19

38. Exercício 20

39. Se A é uma matriz 3×5, explique por que as colunas de A devem ser linearmente dependentes.

40. Se A é uma matriz 4×2, explique por que as linhas de A devem ser linearmente dependentes.

41. Se A é uma matriz 3×5, quais são os possíveis valores de nulidade(A)?

42. Se A é uma matriz 4×2, quais são os possíveis valores de nulidade(A)?

Nos exercícios 43 e 44, ache todos os valores possíveis para posto(A) em função dos valores de a.

43. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -2 & 4a & 2 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **44.** $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & a \end{bmatrix}$

Responda aos exercícios de 45 a 48 considerando a matriz cujas colunas são os vetores dados.

45. Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$?

46. Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$?

47. Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$?

48. Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$?

49. Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{Z}_2^3$?

50. Os vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{Z}_3^3$?

Nos exercícios 50 e 51, mostre que $\mathbf{w}$ *está em ger*$(\mathcal{B})$ *e ache o vetor das coordenadas* $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$.

51. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

52. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 53 a 56, calcule o posto e a nulidade das matrizes dadas sobre o $\mathbb{Z}_p$ *indicado.*

53. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_2$ **54.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

55. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

56. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_7$

57. Se A é uma matriz $m \times n$, prove que todo vetor em anul(A) é ortogonal a todo vetor em lin(A).

58. Se A e B são matrizes $n \times n$ de posto n, prove que AB tem posto n.

59. (a) Prove que posto$(AB) \leq$ posto(B). [*Sugestão*: reveja o exercício 29 da seção 3.1.]

(b) Dê um exemplo em que posto$(AB) <$ posto(B).

60. (a) Prove que posto$(AB) \leq$ posto(A). [*Sugestão*: reveja o exercício 30 da seção 3.1 ou use transpostas e o exercício 59(a).]

(b) Dê um exemplo em que posto$(AB) <$ posto(A).

61. (a) Prove que, se U é invertível, então posto$(UA) =$ posto(A). [*Sugestão*: $A = U^{-1}(UA)$.]

(b) Prove que, se V é invertível, então posto$(AV) =$ posto(A).

62. Prove que uma matriz A $m \times n$ tem posto 1 se e somente se A pode ser escrita como o produto externo $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ de um vetor $\mathbf{u}$ em $\mathbb{R}^m$ por $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$.

63. Se uma matriz A *de ordem* $m \times n$ tem posto r, prove que A pode ser escrita como a soma de r matrizes, cada uma tendo posto 1. [*Sugestão*: ache um meio de utilizar o exercício 62.]

64. Prove que, para matrizes A e B *de ordem* $m \times n$, posto$(A + B) \leq$ posto(A) + posto(B).

65. Seja A uma matriz de ordem $n \times n$ tal que $A^2 = O$. Prove que posto$(A) \leq n/2$. [*Sugestão: Mostre que* col$(A) \subseteq$ anul(A) e use o Teorema do Posto.]

66. Seja A uma matriz $n \times n$ antissimétrica. (Veja a página 162).

(a) Prove que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$ para todo $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^n$.

(b) Prove que $I + A$ é invertível. [*Sugestão:* Mostre que anul$(I + A) = \{\mathbf{0}\}$.]

3.6 Introdução às Transformações Lineares

Nesta seção, começamos a explorar um dos temas da introdução deste capítulo. Lá, vimos que matrizes podem ser usadas para transformar vetores, agindo como um tipo de "função" da forma $\mathbf{w} = T(\mathbf{v})$, em que a variável independente $\mathbf{v}$ e a variável dependente $\mathbf{w}$ são vetores. Tornaremos agora mais precisa essa noção, e veremos diversos exemplos de tais transformações matriciais, que nos guiarão para o conceito de *transformação linear* — uma ideia forte que encontraremos repetidas vezes daqui em diante.

Observação Você deve lembrar que uma equação polinomial com coeficientes reais (como a equação do segundo grau do exemplo 4.5) pode não admitir raízes reais; neste caso, ela possui raízes *complexas*. (Veja o apêndice C.) Também é possível calcular autovalores e autovetores quando os elementos da matriz são de $\mathbb{Z}_p$, com p primo. Assim, é importante especificar o contexto no qual pretendemos trabalhar antes de determinar os autovalores de uma matriz. Entretanto, a menos que seja expresso o contrário, consideraremos como números *reais* os autovalores de uma matriz composta igualmente por números reais.

Exemplo 4.6

Interprete a matriz do exemplo 4.5 como uma matriz sobre $\mathbb{Z}_3$ e encontre seus autovalores nesse corpo.

Solução A resolução procede exatamente como antes, exceto pelo fato de trabalharmos com inteiros módulo 3. Portanto, a equação $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ se transforma em $\lambda^2 + 2 = 0$. Esta última é equivalente a $\lambda^2 = -2 = 1$, e obtemos $\lambda = 1$ e $\lambda = -1 = 2$ como autovalores em $\mathbb{Z}_3$. (Confira que obteríamos a mesma resposta se *primeiramente* reduzíssemos A, módulo 3, para obter $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e depois trabalhássemos com essa matriz.)

Exemplo 4.7

Determine os autovalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (a) sobre $\mathbb{R}$ e (b) sobre os números complexos $\mathbb{C}$.

Solução Precisamos resolver a equação

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

(a) Sobre $\mathbb{R}$ ela não admite soluções, logo, A não possui autovalores reais.

a + bi

(b) Sobre $\mathbb{C}$, as soluções são $\lambda = i$ e $\lambda = -i$. (Veja o apêndice C.)

Na próxima seção, estenderemos a noção de determinante de matrizes 2×2 a matrizes $n \times n$, o que nos permitirá determinar autovalores para matrizes quadradas arbitrárias. (De fato, isso não é bem verdade — mas poderemos ao menos ser capazes de encontrar, para cada matriz especificada, uma equação polinomial cujas soluções sejam os autovalores da matriz.)

Exercícios 4.1

Nos exercícios de 1 a 6, mostre que **v** *é um autovetor de A e determine o autovalor correspondente.*

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 7 a 12, mostre que λ é um autovalor de A e encontre um autovetor associado a esse autovalor.

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \lambda = 3$

8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \lambda = -1$

9. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \lambda = 1$

10. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \lambda = -6$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = -1$

12. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \lambda = 2$

Nos exercícios de 13 a 18, encontre os autovalores e autovetores de A geometricamente.

13. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (reflexão relativa ao eixo y)

14. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (reflexão relativa à reta $y = x$)

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (projeção sobre o eixo x)

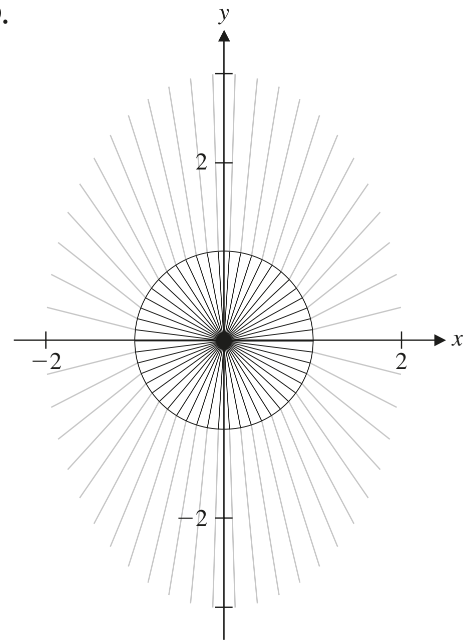
16. $A = \begin{bmatrix} \frac{16}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix}$ (projeção sobre a reta que passa pela origem e tem vetor diretor $\begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$)

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (ampliação por um fator 2 horizontalmente e por um fator 3 verticalmente)

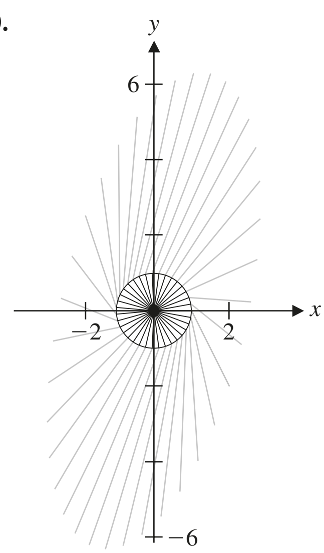
18. $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (rotação, no sentido anti-horário, de 90° a partir da origem)

Nos exercícios de 19 a 22, os vetores unitários **x** *de* $\mathbb{R}^2$ *e suas imagens A***x** *sob a ação de uma matriz* 2×2 *A estão desenhados como na figura 4.7, colocando-se as origens dos segundos de forma a coincidir com a extremidade final dos primeiros. Faça uma estimativa para os autovetores e autovalores de A de cada "autofigura".*

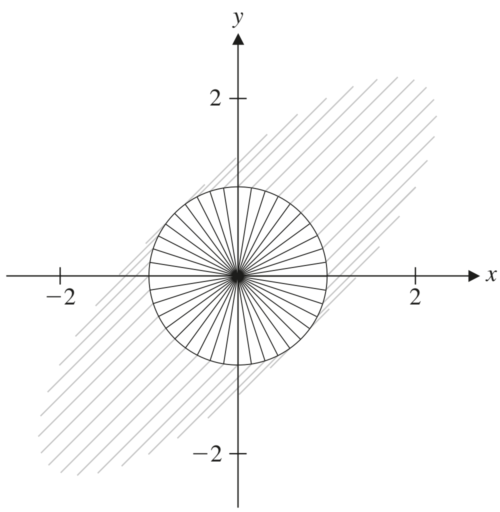
19.



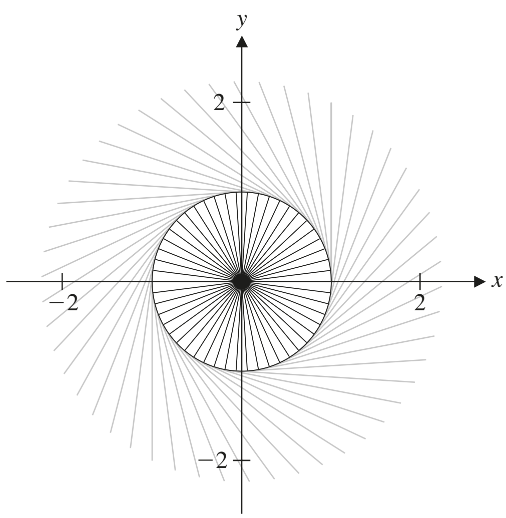
20.



21.



22.



Nos exercícios de 23 a 26, utilize o método do exemplo 4.5 para determinar todos os autovalores da matriz A. Explicite bases para cada um dos autoespaços associados. Ilustre os autoespaços e o efeito de se multiplicar os autovetores por A como na figura 4.8.

23. $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ **26.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 27 a 30, encontre todos os autovalores da matriz A sobre os números complexos $\mathbb{C}$. Determine bases para cada um dos autoespaços associados.

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ **28.** $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ **30.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 31 a 34, encontre todos os autovalores da matriz A sobre o $\mathbb{Z}_p$ indicado.

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_3$ **32.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

33. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_5$ **34.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

35. (a) Mostre que os autovalores da matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

são as soluções da equação do segundo grau $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A = 0$, em que $\operatorname{tr}(A)$ é o traço de A. (Veja página 162.)

(b) Mostre que os autovalores da matriz A da parte (a) são

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\left(a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}\right)$$

(c) Mostre que o traço e o determinante da matriz A da parte (a) são dados por

$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{e} \quad \det A = \lambda_1\lambda_2$$

em que λ_1 e λ_2, são os autovalores de A.

36. Considere novamente a matriz A do exercício 35. Determine condições sobre a, b, c e d de forma que A tenha:

(a) dois autovalores reais distintos,
(b) um autovalor real e
(c) nenhum autovalor real.

37. Mostre que os autovalores da matriz triangular superior

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

são $\lambda = a$ e $\lambda = d$, e encontre os autoespaços associados.

38. Sejam a e b números reais. Encontre os autovalores e os autoespaços associados de

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

sobre os números complexos.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) nasceu em Leipzig e estudou direito, teologia, filosofia e matemática. É provavelmente mais conhecido por ter desenvolvido (como Newton, independentemente) as principais idéias dos cálculos diferencial e integral. No entanto, também são impressionantes suas contribuições para outros ramos da matemática. Ele desenvolveu a noção de determinante, conhecia versões da Regra de Cramer e do teorema da Expansão de Laplace antes que outros tivessem dado os créditos a eles e lançou os fundamentos para a teoria de matrizes, por meio do trabalho que fez sobre as formas quadráticas. Leibniz foi também o primeiro a desenvolver o sistema de numeração binária da aritmética. Acreditava na importância de uma boa notação e, além da notação familiar para derivadas e integrais, introduziu uma espécie de notação com índices subscritos para os coeficientes de um sistema línear, que é, essencialmente, a notação que usamos hoje.

No final do século XIX, a teoria dos determinantes havia se desenvolvido a ponto de livros inteiros serem dedicados a ela, incluindo, em 1867, o livro *Uma teoria elementar de determinantes*, de Dodgson, e uma coleção monumental de cinco volumes de Thomas Muir, que apareceu no início do século XX. Mesmo que a sua história seja fascinante, determinantes hoje têm um interesse mais teórico do que prático. A Regra de Cramer é um método incorrigivelmente ineficaz na resolução de sistemas de equações lineares, enquanto métodos numéricos substituíram todo o uso que antes era feito de determinantes no cálculo de autovalores. Os determinantes são, no entanto, empregados para propiciar aos estudantes uma compreensão inicial do polinômio característico (como nas seções 4.1 e 4.3).

Exercícios 4.2

Calcule os determinantes dos exercícios de 1 a 6 usando expansão de cofatores pela primeira linha e pela primeira coluna.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Calcule os determinantes dos exercícios de 7 a 15 usando expansão de cofatores por qualquer linha ou coluna que pareça conveniente.

7. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \operatorname{tg}\ \theta \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & 0 & b \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \end{vmatrix}$

Nos exercícios de 16 a 18, calcule os determinantes 3×3 indicados, usando o método do exemplo 4.9.

16. O determinante do exercício 6.

17. O determinante do exercício 8.

18. O determinante do exercício 11.

19. Verifique que o método indicado em (2) coincide com a equação (1) para um determinante 3×3.

20. Verifique que a definição (4) coincide com a definição de um determinante 2×2, quando $n = 2$.

21. Prove o teorema 4.2. (*Sugestão*: seria apropriada uma prova por indução neste caso.)

Nos exercícios de 22 a 25, encontre o determinante indicado usando operações elementares com linhas e/ou colunas e o teorema 4.3 para reduzir a matriz a uma matriz escalonada por linhas.

22. O determinante do exercício 1.

23. O determinante do exercício 9.

24. O determinante do exercício 13.

25. O determinante do exercício 14.

Nos exercícios de 26 a 34, empregue propriedades de determinantes para calcular o valor do determinante indicado por inspeção direta. Explique seu raciocínio.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

29. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

33. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Nos exercícios de 35 a 40, encontre os determinantes, assumindo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

35. $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} 2a & b/3 & -c \\ 2d & e/3 & -f \\ 2g & h/3 & -i \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

38. $\begin{vmatrix} a-c & b & c \\ d-f & e & f \\ g-i & h & i \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} a+2g & b+2h & c+2i \\ 3d+2g & 3e+2h & 3f+2i \\ g & h & i \end{vmatrix}$

41. Prove o teorema 4.3(a).

42. Prove o teorema 4.3(f).

43. Prove o lema 4.5.

44. Prove o teorema 4.7.

Nos exercícios 45 e 46, utilize o teorema 4.6 para encontrar todos os valores de k para os quais A é invertível.

45. $A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 2 & k \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 47 a 52, suponha que A e B sejam matrizes $n \times n$ com $\det A = 3$ e $\det B = -2$. Ache os determinantes indicados.

47. $\det(AB)$

48. $\det(A^2)$

49. $\det(B^{-1}A)$

50. $\det(2A)$

51. $\det(3B^T)$

52. $\det(AA^T)$

Nos exercícios de 53 a 56, A e B são matrizes $n \times n$.

53. Prove que $\det(AB) = \det(BA)$.

54. Se B é invertível, prove que $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$.

55. Se A é idempotente (ou seja, se $A^2 = A$), ache todos os possíveis valores do $\det(A)$.

56. Uma matriz quadrada A é chamada **nilpotente** se $A^m = O$ para algum $m > 1$. (A palavra *nilpotente* vem do latim *nil*, que significa “nenhum”, e *potere*, que significa “potência”. Uma matriz nilpotente, assim, tem a propriedade de virar “uma nulidade” — ou seja, a matriz nula — quando elevada a alguma potência.) Ache todos os valores possíveis do det(A), se A for nilpotente.

Nos exercícios de 57 a 60, use a Regra de Cramer para resolver os sistemas de equações lineares dados.

57. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

58. $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$

59. $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ y + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$

60. $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x - y &= 3 \end{aligned}$

Nos exercícios de 61 a 64, use o teorema 4.12 para calcular a inversa da matriz dos coeficientes para o exercício mencionado.

61. Exercício 57 **62.** Exercício 58

63. Exercício 59 **64.** Exercício 60

65. Se A é uma matriz $n \times n$ invertível, mostre que adj A também é invertível e que

$$(\text{adj } A)^{-1} = \frac{1}{\det A} A = \text{adj } (A^{-1})$$

66. Se A é uma matriz $n \times n$, prove que

$$\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$$

67. Verifique que, se $r < s$, as linhas r e s de uma matriz podem ser intercambiadas com a realização de $2(s - r) - 1$ intercâmbios de linhas adjacentes.

68. Prove que o Teorema da Expansão de Laplace se verifica para a expansão de cofatores pela j-ésima coluna.

69. Seja A uma matriz quadrada que pode ser particionada como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & S \end{array}\right]$$

em que P e S são matrizes quadradas. Diz-se que essa matriz está na ***forma de bloco triangular (superior)***. Prove que

$$\det A = (\det P)(\det S)$$

(*Sugestão*: tente uma prova por indução no número de linhas de P.)

70. **(a)** Dê um exemplo para mostrar que, se A pode ser particionada como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right]$$

em que P, Q, R e S são todas matrizes quadradas, então não é necessariamente verdadeiro que

$$\det A = (\det P)(\det S) - (\det Q)(\det R)$$

(b) Suponha que A seja particionada como na parte (a), e que P seja invertível. Considere

$$B = \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & O \\ \hline -RP^{-1} & I \end{array}\right]$$

Calcule o det(BA) utilizando o exercício 69 e use o resultado para mostrar que

$$\det A = \det P \det(S - RP^{-1}Q)$$

[A matriz $S - RP^{-1}Q$ é denominada ***complemento de Schur*** de P em A, em referência a Issai Schur (1875-1941), que nasceu em Belarus mas viveu a maior parte de sua vida na Alemanha. Ele é conhecido principalmente pelo seu trabalho fundamental na teoria de representações de grupos, mas também trabalhou em teoria dos números, em análise e em outras áreas.]

(c) Suponha que A está particionada como na parte (a), que P é invertível e que $PR = RP$. Prove que

$$\det A = \det(PS - RQ)$$

Projeto de texto

O que Veio Primeiro: a Matriz ou o Determinante?

O modo como matrizes e determinantes são ensinados hoje em dia — matrizes antes de determinantes — tem pouca semelhança com a forma que estes tópicos foram desenvolvidos historicamente. Há uma breve história dos determinates ao final da seção 4.2.

Escreva um texto sobre a história das matrizes e dos determinantes. Como as notações utilizadas para cada um deles evoluiu ao longo do tempo? Quem foram os matemáticos mais importantes envolvidos e quais foram suas contribuições?

1. Florian Cajori, *A History of Mathematical Notations* (New York: Dover, 1993).
2. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics* (6ª edição) (Philadelphia: Saunders College Publishing, 1990).
3. Victor J. Katz, *A History of Mathematics: An Introduction* (3ª edição) (Reading, MA: Addison Wesley Longman, 2008).
4. Eberhard Knobloch, Determinants, em Ivor Grattan-Guinness, ed., *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences* (London: Routledge, 2013).

Demonstração A prova é indireta. Vamos assumir que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente *dependentes* e mostrar que essa hipótese nos leva a uma contradição.

Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes, um desses vetores deve poder ser expresso como uma combinação linear dos vetores anteriores. Seja $\mathbf{v}_{k+1}$ o primeiro dos vetores v_i que podem assim ser expressos. Em outras palavras, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ são linearmente independentes, mas existem escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ tais que

$$\mathbf{v}_{k+1} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \tag{1}$$

Multiplicando por A, à esquerda, os dois lados da equação (1) e utilizando o fato de que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$ para cada i, temos

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = A\mathbf{v}_{k+1} &= A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) \\ &= c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 + \cdots + c_kA\mathbf{v}_k \\ &= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\mathbf{v}_k \end{aligned} \tag{2}$$

Agora, multiplicamos os dois lados da equação (1) por λ_{k+1} para obter

$$\lambda_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = c_1\lambda_{k+1}\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_{k+1}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_{k+1}\mathbf{v}_k \tag{3}$$

Quando subtraímos a equação (3) da equação (2), obtemos

$$0 = c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\mathbf{v}_k$$

A independência linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ implica que

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1}) = c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1}) = \cdots = c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1}) = 0$$

Como os autovalores λ_i são todos distintos, os termos entre parênteses $(\lambda_i - \lambda_{k+1})$, $i = 1, \ldots, k$, são todos não nulos. Logo, $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. Isso implica que

$$\mathbf{v}_{k+1} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_k = 0$$

o que é impossível, pois o autovetor v_{k+1} não pode ser zero. Assim, temos uma contradição, o que significa que a hipótese assumida — $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes — é falsa. Daí segue que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ têm que ser linearmente independentes.

Exercícios 4.3

Nos exercícios de 1 a 12, determine: (a) o polinômio característico de A, (b) os autovalores de A, (c) uma base para cada um dos autoespaços de A e (d) as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

13. Prove o teorema 4.18(b).

14. Prove o teorema 4.18(c). [*Sugestão*: faça uma combinação das demonstrações das partes (a) e (b) e veja a quarta observação que segue o teorema 3.9. (página 169).]

Nos exercícios 15 e 16, A é uma matriz 2×2 *com autovetores* $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *e* $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *associados aos autovalores* $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ *e* $\lambda_2 = 2$, respectivamente, *e* $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

15. Determine $A^{10}\mathbf{x}$.

16. Determine $A^k\mathbf{x}$. O que acontece quando k aumenta muito (isto é, $k \to \infty$)?

Nos exercícios 17 e 18, A é uma matriz 3×3 *com autovetores* $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, *e* $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, e $\lambda_3 = 1$, e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

17. Determine $A^{20}\mathbf{x}$.

18. Determine $A^k\mathbf{x}$. O que acontece quando k aumenta muito (isto é, $k \to \infty$)?

19. (a) Mostre que, para qualquer matriz quadrada A, A^T e A têm o mesmo polinômio característico e, portanto, os mesmos autovalores.

(b) Dê um exemplo de uma matriz 2×2 A na qual A^T e A tenham autoespaços distintos.

20. Mostre que $\lambda = 0$ é o único autovalor de uma matriz nilpotente A (ou seja, $A^m = O$ para algum $m > 1$).

21. Mostre que $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$ são os únicos autovalores possíveis para uma matriz idempotente A (ou seja, $A^2 = A$).

22. Se $\mathbf{v}$ é um autovetor de A associado ao autovalor λ e c é um escalar, mostre que $\mathbf{v}$ é um autovetor de $A - cI$ associado ao autovalor $\lambda - c$.

23. (a) Determine os autovalores e os autoespaços de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Usando o teorema 4.18 e o exercício 22, encontre os autovalores e os autoespaços de A^{-1}, $A - 2I$ e $A + 2I$.

24. Sejam A e B matrizes $n \times n$ com autovalores λ e μ, respectivamente.

(a) Dê um exemplo para mostrar que $\lambda + \mu$ não é necessariamente autovalor de A + B.

(b) Dê um exemplo para mostrar que $\lambda\mu$ não é necessariamente um autovalor de AB.

(c) Suponha que $\mathbf{x}$ seja um autovetor associado a ambos λ e μ . Mostre que, neste caso, $\lambda + \mu$ é um autovalor de $A + B$ e $\lambda\mu$ é um autovalor de AB.

25. Se A e B são duas matrizes equivalentes por reduções por linhas, elas têm necessariamente os mesmos autovalores? Prove que sim ou dê um contraexemplo.

Seja p(x) o polinômio

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

A ***matriz companheira*** *de p(x) é a matriz* $n \times n$

$$C(p) = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

26. Encontre a matriz companheira de $p(x) = x^2 - 7x + 12$ e depois determine o polinômio característico de $C(p)$.

27. Encontre a matriz companheira de $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 12$ e depois determine o polinômio característico de $C(p)$.

28. (a) Mostre que a matriz companheira $C(p)$ de $p(x) = x^2 + ax + b$ tem polinômio característico $\lambda^2 + a\lambda + b$.

(b) Mostre que, se λ é um autovalor da matriz companheira $C(p)$ da parte (a), $\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $C(p)$ associado a λ.

29. (a) Mostre que a matriz companheira $C(p)$ de $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tem polinômio característico $-(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)$.

(b) Mostre que se λ é um autovalor de uma matriz companheira $C(p)$ da parte (a), $\begin{bmatrix} \lambda^2 \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$ é um autovetor de $C(p)$ associado a λ.

30. Construa uma matriz 2×2 não triangular, com autovalores 2 e 5. (*Sugestão*: use o exercício 28.)

31. Construa uma matriz 3×3 não triangular, com autovalores -2, 1 e 3. (*Sugestão*: use o exercício 29.)

32. (a) Prove, por indução matemática, que, para $n \geq 2$, a matriz companheira $C(p)$ de $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ tem polinômio característico igual a $(-1)^n p(\lambda)$. [*Sugestão*: faça a expansão de cofatores pela última coluna. Você poderá achar útil introduzir o polinômio $q(x) = (p(x) - a_0)/x$.]

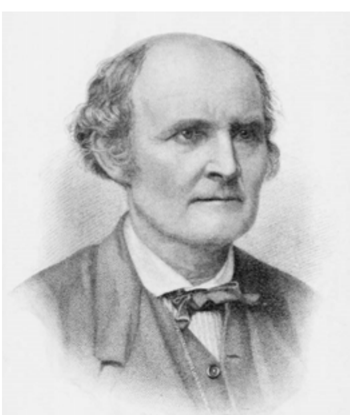
(b) Mostre que, se λ é um autovalor da matriz companheira $C(p)$ na equação (4), o autovetor associado a λ é dado por

$$\begin{bmatrix} \lambda^{n-1} \\ \lambda^{n-2} \\ \vdots \\ \lambda \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ e A é uma matriz quadrada, podemos definir uma matriz quadrada $p(A)$ por

$$p(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$$

*Um teorema importante da álgebra linear avançada afirma que, se $c_A(\lambda)$ é o polinômio característico da matriz A, então $c_A(A) = O$ (em palavras, toda matriz satisfaz a sua equação característica). Esse é o célebre **Teorema de Cayley-Hamilton**, em homenagem a* Arthur Cayley (1821-1895), cuja foto está abaixo, *e a Sir William Rowan Hamilton* (veja a página 2). *Cayley provou esse teorema em 1858. Hamilton o descobriu, independentemente, em seu trabalho sobre os quatérnios, que são uma generalização dos números complexos.*



Bettmann/ CORBIS

33. Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Ou seja, determine o polinômio característico $c_A(\lambda)$ de A e mostre que $c_A(A) = O$.

34. Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

O Teorema de Cayley-Hamilton pode ser usado para determinar potências e inversas de matrizes. Por exemplo, se A é uma matriz 2×2 com polinômio característico $c_A(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, então $A^2 + aA + bI = O$, e assim

$$A^2 = -aA - bI$$

e

$$\begin{aligned} A^3 = AA^2 &= A(-aA - bI) \\ &= -aA^2 - bA \\ &= -a(-aA - bI) - bA \\ &= (a^2 - b)A + abI \end{aligned}$$

É fácil ver que, por aplicações sucessivas desse procedimento, podemos expressar qualquer potência positiva de A como uma combinação linear de I e A. De $A^2 + aA + bI = O$, também obtemos $A(A + aI) = -bI$, e assim

$$A^{-1} = -\frac{1}{b}A - \frac{a}{b}I$$

desde que $b \neq 0$.

35. Para a matriz A do exercício 33, utilize o Teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^2, A^3 e A^4, expressando cada uma como uma combinação linear de I e A.

36. Para a matriz A do exercício 34, utilize o Teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^3 e A^4, expressando cada uma como uma combinação linear de I, A e A^2.

37. Para a matriz A do exercício 33, utilize o Teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^{-1} e A^{-2}, expressando cada uma como uma combinação linear de I e A.

38. Para a matriz A do exercício 34, utilize o Teorema de Cayley-Hamilton para encontrar A^{-1} e A^{-2}, expressando cada uma como uma combinação linear de I, A e A^2.

39. Mostre que, se a matriz quadrada A pode ser particionada na forma

$$A = \left[\begin{array}{c:c} P & Q \\ \hdashline O & S \end{array}\right]$$

em que P e S são matrizes quadradas, então o polinômio característico de A é $c_A(\lambda) = c_P(\lambda)c_S(\lambda)$. (*Sugestão*: use o exercício 69 da seção 4.2.)

40. Seja $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ um conjunto completo de autovalores (incluindo repetições) da matriz $n \times n$ A. Prove que

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \quad \text{e}$$
$$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$$

[*Sugestão:* o polinômio característico de A se fatora da seguinte maneira:

$$\det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

Encontre o termo independente e o coeficiente de λ^{n-1} nos lados esquerdo e direito dessa equação.]

41. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Prove que a soma de *todos* os autovalores de $A + B$ é a soma de todos os autovalores de A com os de B individualmente. Prove que o produto de *todos* os autovalores de AB é o produto de todos os autovalores de A com os de B individualmente. (Compare este exercício com o exercício 24.)

42. Prove o teorema 4.19.

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, obtendo A, temos $A = PDP^{-1}$ e, pelo teorema 4.22(f), $A^n = PD^nP^{-1}$ para todo $n \geq 1$.
Como

$$D^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

temos que

$$\begin{aligned} A^n = PD^nP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{2(-1)^n + 2^n}{3} & \dfrac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} \\ \dfrac{2(-1)^{n+1} + 2^{n+1}}{3} & \dfrac{(-1)^{n+2} + 2^{n+1}}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como foi solicitado somente A^{10}, isso é mais do que necessitávamos. Mas agora podemos simplesmente fazer $n = 10$ para encontrar

$$A^{10} = \begin{bmatrix} \dfrac{2(-1)^{10} + 2^{10}}{3} & \dfrac{(-1)^{11} + 2^{10}}{3} \\ \dfrac{2(-1)^{11} + 2^{11}}{3} & \dfrac{(-1)^{12} + 2^{11}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 342 & 341 \\ 682 & 683 \end{bmatrix}$$

Exercícios 4.4

Nos exercícios de 1 a 4, mostre que A e B não são matrizes semelhantes.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 5 a 7, é dada uma diagonalização da matriz A na forma $P^{-1}AP = D$. Explicite os autovalores de A e as bases para os autoespaços associados.

5. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 8 a 15, determine se A é diagonalizável e, quando for, encontre uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **9.** $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **11.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **13.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **15.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 16 a 23, utilize o método do exemplo 4.29 para calcular a potência indicada da matriz.

16. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^9$ **17.** $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{10}$

18. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-6}$ **19.** $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k$

20. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^8$ **21.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2015}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^k$ **23.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^k$

Nos exercícios de 24 a 29, ache todos os valores (reais) de k para os quais A é diagonalizável.

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ **25.** $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **27.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **29.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$

30. Prove o teorema 4.21(c).

31. Prove o teorema 4.22(b).

32. Prove o teorema 4.22(c).

33. Prove o teorema 4.22(e).

34. Prove o teorema 4.22(f).

35. Prove o teorema 4.22(g).

36. Se A e B são matrizes invertíveis, mostre que AB e BA são semelhantes.

37. Prove que, se A e B são matrizes semelhantes, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. (*Sugestão*: descubra uma maneira de usar o exercício 45 da seção 3.2.)

Em geral, é difícil mostrar que duas matrizes são semelhantes. No entanto, se duas matrizes semelhante são diagonalizáveis, a tarefa começa a ser mais fácil. Nos exercícios de 38 a 41, mostre que A e B são semelhantes mostrando que elas são semelhantes a uma mesma matriz diagonal. Depois, encontre uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = B$.

38. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

41. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

42. Prove que, se A é semelhante a B, A^T é semelhante a B^T.

43. Prove que, se A é diagonalizável, A^T também é.

44. Seja A uma matriz invertível. Prove que, se A é diagonalizável, A^{-1} também é.

45. Prove que, se A é uma matriz diagonalizável com um único autovalor λ, então A tem a forma $A = \lambda I$. (Uma matriz dessas é chamada de ***matriz escalar***.)

46. Sejam A e B matrizes $n \times n$, cada uma com n autovalores distintos. Prove que A e B têm os mesmos autovetores se e somente se $AB = BA$.

47. Sejam A e B matrizes semelhantes. Prove que as multiplicidades algébricas dos autovalores de A e de B são iguais.

48. Sejam A e B matrizes semelhantes. Prove que as multiplicidades geométricas dos autovalores de A e de B são iguais. [*Sugestão*: mostre que, se $B = P^{-1}AP$, então todo autovetor de B tem a forma $P^{-1}\mathbf{v}$ para algum autovetor $\mathbf{v}$ de A.]

49. Prove que se A é uma matriz diaginalizável tal que todo autovalor de A é ou 0 ou 1 então A é idempotente (isto é, $A^2 = A$).

50. Seja A uma matriz nilpotente (isto é, $A^m = O$ para algum $m > 1$). Prove que se A é diagonalizável então A deve ser a matriz nula.

51. Suponha que A é uma matriz 6×6 com polinômio característico $c_A(\lambda) = (1 + \lambda)(1 - \lambda)^2(2 - \lambda)^3$.

(a) Prove que não é possível achar três vetores linearmente independentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ de $\mathbb{R}^6$ tal que $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2$ e $A\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3$.

(b) Se A é diagonalizável, quais são as dimensões dos autoespaços E_{-1}, E_1 e E_2?

52. Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(a) Prove que A é diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc > 0$ e é não diagonalizável se $(a - d)^2 + 4bc < 0$.

(b) Encontre dois exemplos para demonstrar que se $(a - d)^2 + 4bc = 0$ então A pode ou não ser diagonalizável.

4.5 Métodos Iterativos para o Cálculo de Autovalores

Até aqui, o único método que temos para o cálculo de autovalores de uma matriz é achar as soluções da equação característica. No entanto, esse método enfrenta vários problemas que o tornam praticável somente em um número pequeno de exemplos. O primeiro problema é que ele depende do cálculo de um determinante, o que, para matrizes grandes, é um processo muito demorado. O segundo problema é que a equação característica é uma equação polinomial, e não existem fórmulas para determinar as soluções de equações polinomiais de grau maior do que 4 (equações dos graus 2, 3 e 4 podem ser solucionadas utilizando a fórmula de Bhaskara e suas análogas). Assim, somos forçados a encontrar *aproximações* para os autovalores na maioria dos problemas práticos. Infelizmente, métodos para a determinação de raízes aproximadas de uma equação polinomial não são em geral confiáveis por não garantirem uma margem de erro desejável.

Tomaremos um outro caminho para contornar as dificuldades com os polinômios característicos. Vamos primeiro aproximar autovetores e depois usá-los para encontrar seus correspondentes autovalores. Nesta seção, vamos explorar algumas variações desse método, baseado em uma técnica iterativa simples.

Em 1824, o matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829) provou que uma equação polinomial genérica do quinto grau (uma quíntica) não era *solúvel por radicais;* ou seja, não há fórmula que determine suas soluções e que empregue somente as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes n-ésimas. Em um artigo escrito em 1830 e publicado postumamente em 1846, o matemático francês Evariste Galois (1811-1832) fez uma teoria mais completa em que estabeleceu condições sob as quais uma equação polinomial arbitrária poderia ser solúvel por radicais. O trabalho de Galois foi o instrumento que estabeleceu o ramo da álgebra chamado de *teoria de grupos*; sua própria abordagem das equações polinomiais é hoje conhecida como *teoria de Galois*.

O Método da Potência

O método da potência se aplica a matrizes $n \times n$ que tenham um ***autovalor dominante*** λ_1 — ou seja, um autovalor cujo valor absoluto seja maior que todos os outros autovalores. Por exemplo, se uma matriz tem autovalores -4, -3, 1 e 3, então -4 é o autovalor dominante, já que $4 = |-4| > |-3| \geq |3| \geq |1|$. Por outro lado, uma matriz com autovalores -4, -3, 3 e 4 não tem autovalor dominante.

O método da potência procede de forma iterativa para produzir uma sequência de escalares que converge para λ_1 e uma sequência de vetores que converge para o autovetor associado $\mathbf{v}_1$, o ***autovetor dominante***. Por simplicidade, vamos assumir que a matriz A é diagonalizável. O teorema a seguir fornece a base para o método da potência.

Olhando as matrizes ortogonais A e B do exemplo 5.7, você pode notar que não apenas suas colunas formam conjuntos ortonormais, mas também suas *linhas*. Na verdade, toda matriz ortogonal tem essa propriedade, como mostra o próximo teorema.

Teorema 5.7 Se Q é uma matriz ortogonal, suas linhas formam um conjunto ortonormal.

Demonstração Pelo teorema 5.5, sabemos que $Q^{-1} = Q^{T}$. Por isso

$$(Q^T)^{-1} = (Q^{-1})^{-1} = Q = (Q^T)^T$$

então Q^T é uma matrix ortogonal. Logo, as colunas de Q^T — que são exatamente as linhas de Q — formam um conjunto ortonormal.

O teorema final desta seção lista algumas outras propriedades das matrizes ortogonais.

Teorema 5.8 Seja Q uma matriz ortogonal.

a. Q^{-1} é ortogonal.
b. $\det Q = \pm 1$
c. Se λ é um autovalor de Q, então $|\lambda| = 1$.
d. Se Q_1 e Q_2 são matrizes ortogonais $n \times n$, então Q_1Q_2 também é.

Demonstração Provaremos a propriedade (c) e deixaremos as demonstrações das outras propriedades como exercícios.

(c) Sejam λ um autovalor de Q e $\mathbf{v}$ um autovetor associado a λ. Então, $Q\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, e, usando o teorema 5.6(b), temos

$$\|\mathbf{v}\| = \|Q\mathbf{v}\| = \|\lambda\mathbf{v}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{v}\|$$

Como $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, então $|\lambda| = 1$.

a + bi

Observação A propriedade (c) continua verdadeira para autovalores complexos. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é ortogonal com autovalores i e $-i$, ambos com módulo igual a 1.

Exercícios 5.1

Nos exercícios de 1 a 6, determine quais conjuntos de vetores são ortogonais.

1. $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 7 a 10, mostre que os vetores dados formam uma base ortogonal para $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Então, use o teorema 5.2 para expressar **w** *como combinação linear dos vetores dessa base. Dê o vetor de coordenadas $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$ de* **w** *em relação à base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.*

7. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

9. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 11 a 15, determine se o conjunto ortogonal de vetores dado é ortonormal. Caso não seja, normalize os vetores para formar um conjunto ortonormal.

11. $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{6}/3 \\ 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 16 a 21, determine se a matriz dada é ortogonal. Caso seja, ache sua inversa.

16. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} \cos\theta\,\operatorname{sen}\theta & -\cos\theta & -\operatorname{sen}^2\theta \\ \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/3 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

22. Prove o teorema 5.8(a).

23. Prove o teorema 5.8(b).

24. Prove o teorema 5.8(d).

25. Prove que toda matriz de permutação é ortogonal.

26. Se Q é uma matriz ortogonal, mostre que toda matriz obtida por rearranjo de linhas de Q também é ortogonal.

27. Seja Q uma matriz 2×2 ortogonal e sejam **x** e **y** vetores em $\mathbb{R}^2$. Se θ é o ângulo entre **x** e **y**, mostre que o ângulo entre $Q\mathbf{x}$ e $Q\mathbf{y}$ também é θ. (Isso prova que transformações lineares definidas por matrizes ortogonais *preservam ângulos* em $\mathbb{R}^2$, um fato que é verdadeiro em geral.)

28. (a) Mostre que uma matriz ortogonal 2×2 tem necessariamente a forma

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

em que $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ é um vetor unitário.

(b) Usando a parte (a), mostre que toda matriz ortogonal 2×2 tem a forma

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

em que $0 \le \theta < 2\pi$.

(c) Mostre que toda matriz 2×2 ortogonal corresponde a uma rotação ou a uma reflexão em $\mathbb{R}^2$.

(d) Mostre que uma matriz 2×2 ortogonal Q corresponde a uma rotação se det Q = 1, e a uma reflexão se det Q = −1.

Nos exercícios de 29 a 32, use o exercício 28 para determinar se a matriz dada representa uma rotação ou uma reflexão. Caso seja uma rotação, determine o ângulo de rotação; caso seja uma reflexão, determine a reta de reflexão.

29. $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

33. Sejam A e B matrizes ortogonais $n \times n$.

(a) Prove que $A(A^T + B^T)B = A + B$.

(b) Use a parte (a) para provar que, se $\det A + \det B = 0$, então $A + B$ não é invertível.

34. Seja $\mathbf{x}$ um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$. Particione $\mathbf{x}$ como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$$

Seja

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} x_1 & \mathbf{y}^T \\ \hline \mathbf{y} & I - \left(\dfrac{1}{1 - x_1}\right)\mathbf{y}\mathbf{y}^T \end{array}\right]$$

Prove que Q é ortogonal. (Esse procedimento fornece um método rápido para achar uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ com um primeiro vetor prescrito $\mathbf{x}$, uma construção que é frequentemente útil em aplicações.)

35. Prove que se uma matriz triangular superior é ortogonal, então ela tem que ser uma matriz diagonal.

36. Prove que se $n >$ m, então não existe uma matriz A de ordem $m \times n$ tal que $\| A\mathbf{x} \| = \| \mathbf{x} \|$ para todo $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^n$.

37. Seja $\mathcal{B} = \{\mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{v}_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

(a) Prove que, para quaisquer $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, vale

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_1) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_2) + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_n)(\mathbf{y} \cdot \mathbf{v}_n)$$

(Esta igualdade é chamada ***Identidade de Parseval.***)

(b) Com base na Identidade de Parseval, o que se pode concluir sobre a relação entre os produtos escalares $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ e $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \cdot [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}$?

5.2 Complementos e Projeções Ortogonais

Nesta seção, vamos generalizar dois conceitos que encontramos no capítulo 1. A noção de um vetor normal a um plano será estendida para complementos ortogonais, e a projeção de um vetor sobre outro dará origem ao conceito de projeção ortogonal sobre um subespaço.

W$^\perp$ é pronunciado como "*W* ortogonal."

Complementos Ortogonais

Um vetor $\mathbf{n}$, normal a um plano, é ortogonal a todo vetor nesse plano. Um plano que passa pela origem é um subespaço W de $\mathbb{R}^3$, assim como ger($\mathbf{n}$) é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Temos então dois subespaços de $\mathbb{R}^3$, com a propriedade de que todo vetor em um deles é ortogonal a todo vetor no outro. Essa é a ideia por trás da definição a seguir.

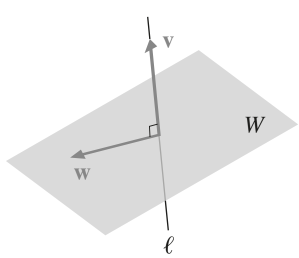


Figura 5.5
$\ell = W^\perp$ e $W = \ell^\perp$

Definição Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que um vetor $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$ é ***ortogonal a*** W se $\mathbf{v}$ for ortogonal a todo vetor em W. O conjunto de todos os vetores ortogonais a W é chamado ***complemento ortogonal de*** W e denotado por $W^\perp$. Isto é,

$$W^\perp = \{\mathbf{v} \text{ em } \mathbb{R}^n : \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{w} \text{ em } W\}$$

Exemplo 5.8

Se W é um plano que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$ e se ℓ é a reta que passa pela origem e é perpendicular a W (isto é, paralela ao vetor normal a W), então todo vetor $\mathbf{v}$ em ℓ é ortogonal a todo vetor $\mathbf{w}$ em W; portanto, $\ell = W^\perp$. Além disso, W consiste *precisamente* nos vetores $\mathbf{w}$ que são ortogonais a todo vetor $\mathbf{v}$ em ℓ; por isso temos também que $W = \ell^\perp$. A figura 5.5 ilustra essa situação.

As seções 5.1 e 5.2 ilustraram algumas das vantagens de trabalhar com bases ortogonais. Entretanto, não demonstramos ainda que todo subespaço *tem* uma base ortogonal, nem mostramos um método de construir uma base desse tipo (exceto em alguns exemplos particulares, como no exemplo 5.3). Essas questões serão o assunto da próxima seção.

Exercícios 5.2

Nos exercícios de 1 a 6, determine o complemento ortogonal $W^\perp$ de W e dê uma base de $W^\perp$.

1. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : 2x - y = 0 \right\}$

2. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : 3x + 4y = 0 \right\}$

3. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x + y - z = 0 \right\}$

4. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}$

5. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = t, y = -t, z = 3t \right\}$

6. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = \frac{1}{2}t, y = -\frac{1}{2}t, z = 2t \right\}$

Nos exercícios 7 e 8, determine bases para o espaço linha de A e para o espaço anulado por A. Verifique que cada vetor em lin(A) é ortogonal a todo vetor em anul(A).

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 9 e 10, encontre bases para o espaço coluna de A e para o espaço anulado por A^T, sendo A a matriz no exercício dado. Verifique que todo vetor em col(A) é ortogonal a todo vetor em anul(A^T).

9. Exercício 7 **10.** Exercício 8

Nos exercícios de 11 a 14, seja W o subespaço gerado pelos vetores dados. Ache uma base de $W^\perp$.

11. $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 15 a 18, determine a projeção ortogonal de $\mathbf{v}$ *sobre o subespaço W gerado pelos vetores* $\mathbf{u}_i$. *(Você pode assumir que os vetores* $\mathbf{u}_i$ *são ortogonais.)*

15. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

16. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

18. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios de 19 a 22, ache a decomposição ortogonal de $\mathbf{v}$ *em relação a W.*

19. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, W = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

20. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, W = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

21. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, W = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

22. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, W = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

23. Prove o teorema 5.9(c).

24. Prove o teorema 5.9(d).

25. Sejam W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e v um vetor em $\mathbb{R}^n$. Suponha que $\mathbf{w}$ e $\mathbf{w}'$ são vetores ortogonais com $\mathbf{w}$ em W, e que $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$. O vetor $\mathbf{w}'$ tem necessariamente que estar em $W^\perp$? Prove ou dê um contraexemplo.

26. Seja $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base ortogonal de $\mathbb{R}^n$, e seja $W = \text{ger}\,(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$. É necessariamente verdade que $W^\perp = \text{ger}(\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$? Prove ou dê um contraexemplo.

Nos exercícios de 27 a 29, seja W um subspaço de $\mathbb{R}^n$*, e seja* $\mathbf{x}$ *um vetor em* $\mathbb{R}^n$.

27. Prove que $\mathbf{x}$ está em W se e somente se $\text{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

28. Prove que $\mathbf{x}$ é ortogonal a W se e somente se $\text{proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

29. Prove que $\text{proj}_W(\text{proj}_W(\mathrm{x})) = \text{proj}_W(\mathrm{x})$.

30. Seja $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ um conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^n$, e seja $\mathbf{x}$ um vetor de $\mathbb{R}^n$.

(a) Prove que

$$\|\mathbf{x}\|^2 \geq |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_k|^2$$

(Esta desigualdade é chamanda Desigualdade de ***Bessel.***)

(b) Prove que a desigualdade de Bessel é uma igualdade se e somente se $\mathbf{x}$ está em ger(S).

5.3 O Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt e a Fatoração *QR*

Nesta seção, apresentaremos um método simples para construir uma base ortogonal (ou ortonormal) para qualquer subespaço de $\mathbb{R}^n$. Esse método nos levará a uma das mais úteis das fatorações de matrizes.

O Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Gostaríamos de poder achar uma base ortogonal para um subespaço W de $\mathbb{R}^n$. A ideia é começar com uma base $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ de W e "ortogonalizar" um vetor de cada vez. Ilustraremos essa construção básica com o subespaço W do exemplo 5.3.

Exemplo 5.12 Seja $W = \text{ger}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, onde

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Construa uma base ortogonal para W.

Solução Começando por $\mathbf{x}_1$, obtemos um segundo vetor ortogonal a ele tomando a componente ortogonal de $\mathbf{x}_2$ em relação a $\mathbf{x}_1$ (figura 5.10).

- A fatoração QR pode ser estendida para matrizes arbitrárias de um modo um pouco diferente. Se A é uma matriz $m \times n$, é possível encontrar uma sequência de matrizes ortogonais $Q_1, \ldots, Q_{m-1}$ tais que $Q_{m-1} \cdots Q_2Q_1A$ seja uma matriz $m \times n$ triangular superior R. Então, $A = QR$, sendo $Q = (Q_{m-1} \cdots Q_2Q_1)^{-1}$ uma matriz ortogonal. Examinaremos essa abordagem na investigação "A Fatoração QR Modificada".

Exemplo 5.15 Determine uma fatoração QR de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução As colunas de A são exatamente os vetores do exemplo 5.13. A base ortonormal para col(A), produzida pelo Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, foi

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 3\sqrt{5}/10 \\ 3\sqrt{5}/10 \\ \sqrt{5}/10 \\ \sqrt{5}/10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ 0 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$Q = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \mathbf{q}_3] = \begin{bmatrix} 1/2 & 3\sqrt{5}/10 & -\sqrt{6}/6 \\ -1/2 & 3\sqrt{5}/10 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{5}/10 & \sqrt{6}/6 \\ 1/2 & \sqrt{5}/10 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix}$$

Do teorema 5.16, $A = QR$ para alguma matriz triangular superior R. Para achar R, usamos o fato de que Q tem colunas ortonormais e, consequentemente,

$$Q^TA = Q^TQR = IR = R$$

Calculamos

$$R = Q^TA = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3\sqrt{5}/10 & 3\sqrt{5}/10 & \sqrt{5}/10 & \sqrt{5}/10 \\ -\sqrt{6}/6 & 0 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1/2 \\ 0 & \sqrt{5} & 3\sqrt{5}/2 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}/2 \end{bmatrix}$$

Exercícios 5.3

Nos exercícios de 1 a 4, são dados vetores que formam uma base para $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Aplique o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal. Normalize então a base encontrada para obter uma base ortonormal.

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 5 e 6, são dados vetores que formam uma base para um subespaço W de $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$. Aplique o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortogonal para W.

5. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 7 e 8, determine a decomposição ortogonal de **v** *em relação ao subespaço W.*

7. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, *W como no exercício 5.*

8. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, *W como no exercício 6.*

Use o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt para determinar uma base ortogonal para os espaços coluna das matrizes dos exercícios 9 e 10.

9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

11. Ache uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenha o vetor $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

12. Ache uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Nos exercícios 13 e 14, preencha a matriz com os elementos que estão faltando, de modo a tornar a matriz Q ortogonal.

13. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & * \\ 0 & 1/\sqrt{3} & * \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & * \end{bmatrix}$

14. $Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 2/\sqrt{14} & * & * \\ 1/2 & 1/\sqrt{14} & * & * \\ 1/2 & 0 & * & * \\ 1/2 & -3/\sqrt{14} & * & * \end{bmatrix}$

Nos execícios 15 e 16, determine uma fatoração QR da matriz no exercício dado.

15. Exercício 9 **16.** Exercício 10

Nos exercícios 17 e 18, as colunas de Q foram obtidas pela aplicação do Processo de Ortogonalização de Gram--Schmidt às colunas da matriz A. Ache a matriz triangular superior R de maneira que $A = QR$.

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

19. Se A é uma matriz ortogonal, ache uma fatoração QR de A.

20. Prove que A é invertível se e somente se $A = QR$, sendo Q ortogonal e R triangular superior com elementos não nulos na diagonal.

Nos exercícios 21 e 22, use o método sugerido pelo exercício 20 para calcular a inversa da matriz A no exercício dado.

21. Exercício 9 **22.** Exercício 15

23. Seja A uma matriz $m \times n$ com colunas linearmente independentes. Usando a propriedade (c) do Teorema Fundamental, dê uma demonstração alternativa para o fato de que a matriz triangular superior R de uma fatoração QR tem que ser invertível.

24. Seja A uma matriz $m \times n$ com colunas linearmente independentes, e seja $A = QR$ uma fatoração QR de A. Mostre que A e Q têm o mesmo espaço coluna.

Solução Começamos normalizando os vetores para obter uma base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2\}$, com

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

Agora, calculamos a matriz A, cuja decomposição espectral é

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1^T + \lambda_2 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_2^T \\ &= 3\begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \\ &= 3\begin{bmatrix} \frac{9}{25} & \frac{12}{25} \\ \frac{12}{25} & \frac{16}{25} \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} \frac{16}{25} & -\frac{12}{25} \\ -\frac{12}{25} & \frac{9}{25} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É fácil verificar que A tem as propriedades desejadas. (Faça isso.)

Exercícios 5.4

Encontre uma diagonalização ortogonal para as matrizes nos exercícios de 1 a 10, determinando uma matriz ortogonal Q e uma matriz diagonal D tais que $Q^TAQ = D$.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11. Se $b \neq 0$, determine uma diagonalização ortogonal para a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

12. Se $b \neq 0$, determine uma diagonalização ortogonal para a matriz $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}$.

13. Sejam A e B matrizes ortogonalmente diagonalizáveis $n \times n$, e c um escalar. Use o Teorema Espectral para provar que as seguintes matrizes são ortogonalmente diagonalizáveis:

(a) $A + B$ **(b)** cA **(c)** A^2

14. Se A é uma matriz invertível e ortogonalmente diagonalizável, mostre que A^{-1} é ortogonalmente diagonalizável.

15. Se A e B são matrizes ortogonalmente diagonalizáveis com $AB = BA$, prove que AB é ortogonalmente diagonalizável.

16. Se A é uma matriz simétrica, mostre que todo autovalor de A é não negativo se e somente se $A = B^2$ para alguma matriz simétrica B.

Nos exercícios de 17 a 20, encontre a decomposição espectral da matriz no exercício dado.

17. Exercício 1 **18.** Exercício 2

19. Exercício 5 **20.** Exercício 8

Nos exercícios 21 e 22, determine uma matriz simétrica 2×2 com autovalores λ_1 e λ_2 e autovetores ortogonais associados $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

21. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

22. $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos exercícios 23 e 24, determine uma matriz simétrica 3×3 com autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 e autovetores ortogonais associados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

23. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

24. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -4, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$

$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

25. Seja $\mathbf{q}$ um vetor unitário de $\mathbb{R}^n$, e seja W, o subespaço gerado por q. Mostre que a projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{v}$ sobre W (como definida nas seções 1.2 e 5.2) é dada por

$$\text{proj}_W(\mathbf{v}) = (\mathbf{q}\mathbf{q}^T)\mathbf{v}$$

e que a matriz dessa projeção é $\mathbf{q}\mathbf{q}^T$. (*Sugestão*: lembre-se de que, para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x}^T\mathbf{y}$.)

26. Seja $\{\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k\}$ um conjunto ortonormal de vetores de $\mathbb{R}^n$, e seja W o subespaço gerado por esse conjunto.

(a) Mostre que a matriz da projeção ortogonal sobre W é dada por

$$P = \mathbf{q}_1\mathbf{q}_1^T + \cdots + \mathbf{q}_k\mathbf{q}_k^T$$

(b) Mostre que a matriz da projeção ortogonal P da parte (a) é simétrica e satisfaz $P^2 = P$.

(c) Seja $Q = [\mathbf{q}_1 \ \cdots \ \mathbf{q}_k]$ a matriz $n \times k$ cujas colunas formam uma base ortonormal de W. Mostre que $P = QQ^T$ e deduza que posto$(P) = k$.

27. Seja A uma matriz real $n \times n$, cujos autovalores são todos reais. Prove que existe uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior T tais que $Q^TAQ = T$. Esse resultado muito útil é conhecido como ***Teorema de Triangularização de Schur***. [*Sugestão*: adapte a demonstração do Teorema Espectral.]

28. Seja A uma matriz nilpotente (veja o exercício 56 na seção 4.2). Prove que existe uma matriz ortogonal Q tal que Q^TAQ é triangular superior com zeros em sua diagonal. [*Sugestão*: Use o exercício 27.]

5.5 Aplicações

Formas Quadráticas

Uma expressão da forma

$$ax^2 + by^2 + cxy$$

é chamada ***forma quadrática*** em x e y. Analogamente,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz$$

é uma forma quadrática em x, y e z. Em palavras, uma forma quadrática é uma soma de termos, cada qual com grau total igual a *dois* nas variáveis. Assim, $5x^2 - 3y^2 + 2xy$ é uma forma quadrática, enquanto que $x^2 + y^2 + x$ não é.

Podemos representar formas quadráticas usando matrizes:

$$ax^2 + by^2 + cxy = [x \quad y]\begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Respostas a Exercícios Ímpares Selecionados

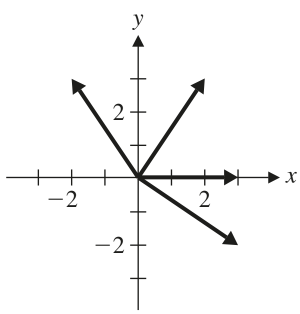
Respostas são fáceis. Fazer a pergunta correta é que é difícil.

—Doctor Who
"The Face of Evil,"
de Chris Boucher
BBC, 1977

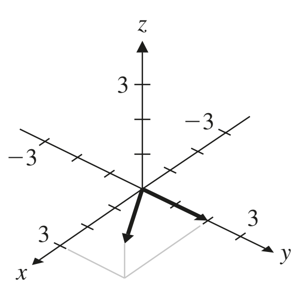
Capítulo 1

Exercícios 1.1

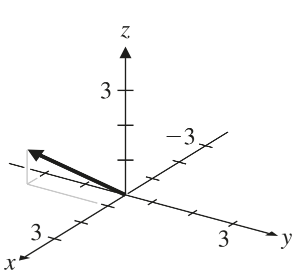
1.



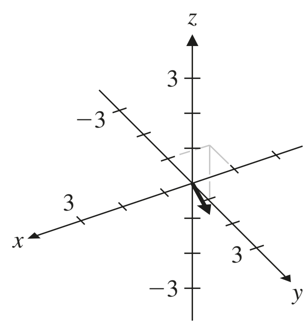
3. (a), (b)



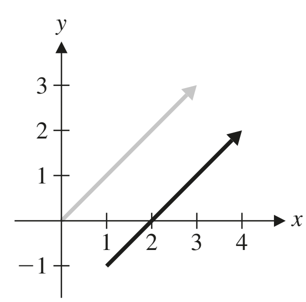
(c)



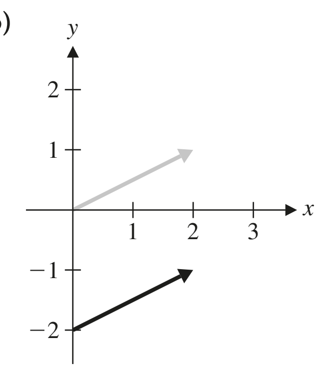
(d)



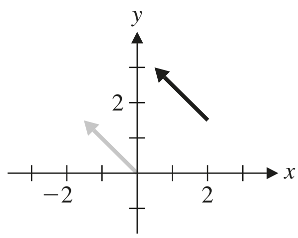
5. (a)



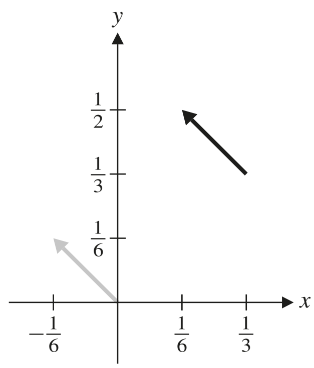
(b)



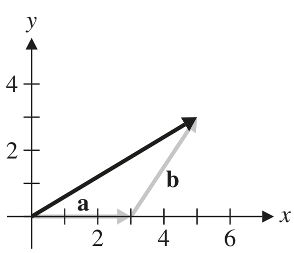
(c)



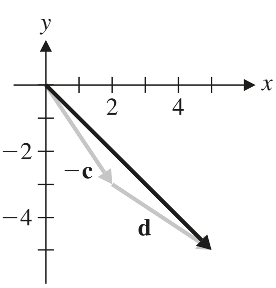
(d)



7. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [5, 3]$



9. $\mathbf{d} - \mathbf{c} = [5, -5]$



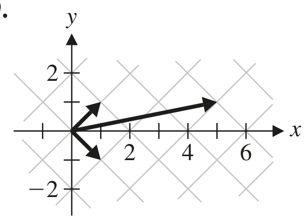
11. $[3, -2, 3]$

13. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1-\sqrt{3})/2 \\ (\sqrt{3}-1)/2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1+\sqrt{3})/2 \\ (1+\sqrt{3})/2 \end{bmatrix}$

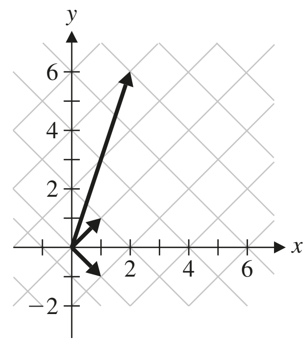
15. $5\mathbf{a}$

17. $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}$

19.



21. $\mathbf{w} = -2\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$



25. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [0, 1, 0, 0]$

29.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

31. 0 **33.** 1

35. 0 **37.** 2, 0, 3

39. 5 **41.** [1, 1, 0]

43. [0, 0, 2, 2], [2, 3, 1, 1] **45.** $x = 2$

47. Não tem solução **49.** $x = 3$

51. Não tem solução **53.** $x = 2$

55. $x = 1$, ou $x = 5$

57. **(a)** Para todo $a \neq 0$ **(b)** $a = 1, 5$

(c) a e m não podem ter fatores comuns diferentes de 1 [i.e., o máximo divisor comum (mdc) de a e m é 1].

Exercícios 1.2

1. -1 **3.** 11 **5.** 2

7. $\sqrt{5}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ **9.** $\sqrt{14}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}$

11. $\sqrt{6}$, $[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2}, 0]$
13. $\sqrt{17}$ **15.** $\sqrt{6}$
17. **(a)** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é um escalar, e não um vetor.
(c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ é um escalar e $\mathbf{u}$ é um vetor.
19. Agudo **21.** Agudo **23.** Agudo
25. 60° **27.** ≈88,10° **29.** ≈14,34°

31. Como $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0$, $\angle BAC$ é um ângulo reto.

33. Se tomarmos o cubo como sendo um cubo unitário (como na figua 1.34), as quatro diagonais serão dadas pelos vetores

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j \neq 0$ para todo $i \neq j$ (seis possibilidades), não há nenhum par de diagonais perpendiculares.
35. $D = (-2, 1, 1)$
37. 5 mi/h em um ângulo de ≈ 53,13° em relação à margem
39. 60°

41. $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ **43.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **45.** $\begin{bmatrix} -0{,}301 \\ 0{,}033 \\ -0{,}252 \end{bmatrix}$

47. $\mathcal{A} = \sqrt{45}/2$ **49.** $k = -2, 3$

51. $\mathbf{v}$ é da forma $k\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$, e k é um escalar.

67. Estaria em contradição com a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Exercícios 1.3

1. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ **(b)** $3x + 2y = 0$

3. **(a)** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $x = 1 - t$
$y = 3t$

5. **(a)** $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ **(b)** $x = t$, $y = -t$, $z = 4t$

7. **(a)** $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2$ **(b)** $3x + 2y + z = 2$

9. **(a)** $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $x = 2s - 3t$
$y = s + 2t$
$z = 2s + t$

11. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

15. **(a)** $x = t$
$y = -1 + 3t$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

17. Os vetores diretores das duas retas são dados por $\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ m_1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ m_2 \end{bmatrix}$. As retas serão perpendiculares se e somente se $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ forem ortogonais. Mas $\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = 0$ se e somente se $1 + m_1 m_2 = 0$, ou, equivalentemente, $m_1 m_2 = -1$.
19. **(a)** Perpendiculares **(b)** Paralelos
(c) Perpendiculares **(d)** Perpendiculares

21. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

25. **(a)** $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1$
(b) $x - y = 0$ **(c)** $x + y - z = 0$
27. $3\sqrt{2}/2$ **29.** $2\sqrt{3}/3$ **31.** $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
33. $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ **35.** $18\sqrt{13}/13$ **37.** $\frac{5}{3}$
43. ≈78,9° **45.** ≈80,4°

Exercícios 1.4

1. 13 N, com ângulo aproximado de 67,38 NE
3. $8\sqrt{3}$ N, em um ângulo de 30° com $\mathbf{f}_1$
5. 4 N, em um ângulo de 60° com $\mathbf{f}_2$
7. 5 N, em um ângulo de 60° com a força dada, $5\sqrt{3}$ N perpendicular à força de 5 N
9. $750\sqrt{2}$ N
11. 980 N
13. ≈ 117,6 N no cabo de 15 cm, ≈ 88,2 N no cabo de 20 cm

Questões de Revisão

1. (a) V **(c)** V **(e)** V **(g)** F **(i)** T

3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$ **5.** 120° **7.** $\begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}$

9. $2x + 3y - z = 7$ **11.** $\sqrt{6}/2$

13. Estaria em contradição com a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

15. $2\sqrt{6}/3$ **17.** $x = 2$ **19.** 3

Capítulo 2

Exercícios 2.1

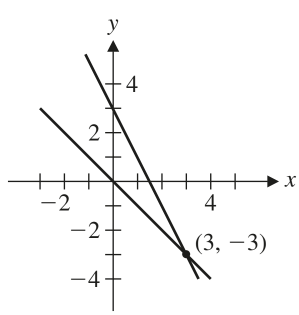
1. Linear **3.** Não é linear por causa do termo x^{-1}

5. Não é linear **7.** $2x + 4y = 7$

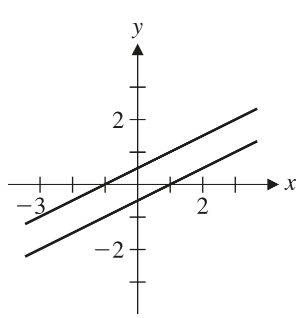
9. $x + y = 4(x, y \neq 0)$

11. $\left\{ \begin{bmatrix} 2t \\ t \end{bmatrix} \right\}$ **13.** $\left\{ \begin{bmatrix} 4 - 2s - 3t \\ s \\ t \end{bmatrix} \right\}$

15. Solução única, $x = 3, y = -3$



17. Sem solução



19. [7, 3] **21.** $[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$

23. [5, −2, 1, 1] **25.** [2, −7, −32]

27. $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$ **29.** $\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$

31. $\begin{aligned} y + z &= 1 \\ x - y &= 1 \\ 2x - y + z &= 1 \end{aligned}$ **33.** [1, 1]

35. [4, −1] **37.** Sem solução

39. (a) $\begin{aligned} 2x + y &= 3 \\ 4x + 2y &= 6 \end{aligned}$ **(b)** $\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}s \\ y &= s \end{aligned}$

41. Sejam $u = \dfrac{1}{x}$ e $v = \dfrac{1}{y}$. A solução é $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{1}{2}$.

43. Sejam $u = \text{tg}\, x$, $v = \text{sen}\, y$, $w = \cos z$. Uma solução possível é $x = \pi/4$, $y = -\pi/6$, $z = \pi/3$. (Existem infinitas soluções.)

Exercícios 2.2

1. Não **3.** Forma escalonada reduzida

5. Não **7.** Não

9. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **11. (b)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. Faça as seguintes operações elementares com as linhas, na ordem: $L_4 + 29L_3$, $8L_3$, $L_4 - 3L_2$, $L_2 \leftrightarrow L_3$, $L_4 - L_1$, $L_3 + 2L_1$, e, finalmente, $L_2 + 2L_1$.

17. Uma possibilidade é fazer as seguintes operações elementares com as linhas de A, na ordem: $L_2 - 3L_1$, $\frac{1}{2}L_2$, $L_1 + 2L_2$, $L_2 + 3L_1$, $L_1 \leftrightarrow L_2$.

19. *Sugestão:* tome uma matriz 2×2 qualquer e tente isso — cuidadosamente!

21. Na verdade, são duas operações elementares com as linhas combinadas: $3L_2$ e $L_2 - 2L_1$.

23. Exercício 1: 3; exercício 3: 2; exercício 5: 2; exercício 7: 3.

25. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ **27.** $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 24 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

33. Sem solução

35. Uma única solução

37. Infinitas soluções

39. *Sugestão:* prove que, se $ad - bc \neq 0$, o posto de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é 2. (Existem dois casos: $a = 0$ e $a \neq 0$.) Use o Teorema do Posto para deduzir que o sistema dado tem uma solução única.

41. **(a)** Não tem solução se $k = -1$
(b) Solução única se $k \neq \pm 1$
(c) Infinitas soluções se $k = 1$

43. **(a)** Não tem solução se $k = 1$
(b) Solução única se $k \neq -2, 1$
(c) Infinitas soluções se $k = -2$

45. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ -7 \end{bmatrix}$

49. Não há interseção

51. Os vetores procurados $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ são as soluções do sistema homogêneo com matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{array}\right]$$

Pelo teorema 3, existem infinitas soluções. Se $u_1 \neq 0$ e $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$, as soluções são dadas por

$$t\begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

No entanto, por inspeção direta, vemos que essas são soluções válidas, mesmo quando $u_1 = 0$ e/ou $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$.

53. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **57.** $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Exercícios 2.3

1. Sim **3.** Não **5.** Sim **7.** Sim

9. Precisamos provar que, para quaisquer valores de a e b, a equação vetorial $x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ tem uma solução. Essa equação vetorial é equivalente ao sistema linear cuja matriz completa é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{array}\right]$. A redução por linhas nos dá $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b - a \end{array}\right]$, a partir da qual podemos ver que existe uma (única) solução. [Continuando a operar nas linhas, obtemos $x = (a + b)/2$, $y = (a - b)/2$] Assim, $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

11. Precisamos provar que, para quaisquer valores de a, b e c, a equação vetorial $x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ tem uma solução. Essa equação vetorial é equivalente ao sistema linear cuja matriz completa é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$. A redução por linhas nos dá $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & b + c - a \end{array}\right]$, e partir da qual podemos ver que existe uma (única) solução. [Continuando a operar nas linhas, obtemos $x = (a - b + c)/2$, $y = (a + b - c)/2$, $z = (-a + b + c)/2$.]

Assim, $\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

13. **(a)** A reta que passa pela origem e tem vetor diretor $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
(b) A reta com equação geral $2x + y = 0$.

15. **(a)** O plano que passa pela origem e tem vetores diretores $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.
(b) O plano com equação geral $2x - y + 4z = 0$.

17. Uma substituição nos dá o sistema linear

$$\begin{aligned} a \qquad + 3c &= 0 \\ -a + b - 3c &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é t $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Consequentemente, há infinitas soluções, e a mais simples talvez seja $a = -3$, $b = 0$, $c = 1$.

19. $\mathbf{u} = \mathbf{u} + 0(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + 0(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$
$\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + 0(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$
$\mathbf{w} = 0\mathbf{u} + (-1)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w})$

21. (c) Devemos provar que ger($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) = ger($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$). Sabemos que ger($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$) $\subseteq \mathbb{R}^3 =$ ger($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$). Usando o exercício 19, segue que $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ pertencem todos a ger($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$). Portanto, pelo exercício 21(b), ger($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) = ger($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$).

23. Linearmente independente

25. Linearmente dependente, $-\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$

27. Linearmente dependente, pois o conjunto contém o vetor nulo

29. Linearmente independente

31. Linearmente dependente, $\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\3\\1\\-1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\3\\1\end{bmatrix}$

43. (a) Sim **(b)** Não

Exercícios 2.4

1. $x_1 = 160, x_2 = 120, x_3 = 160$

3. Dois pequenos, três médios e quatro grandes

5. 65 pacotes da mistura da casa, 30 pacotes da mistura especial e 45 pacotes da mistura *gourmet*.

7. $4FeS_2 + 11O_2 \longrightarrow 2Fe_2O_3 + 8SO_2$

9. $2C_4H_{10} + 13O_2 \longrightarrow 8CO_2 + 10H_2O$

11. $2C_5H_{11}OH + 15O_2 \longrightarrow 12H_2O + 10CO_2$

13. $Na_2CO_3 + 4C + N_2 \longrightarrow 2NaCN + 3CO$

15. (a)
$$\begin{aligned} f_1 &= 30 - t \\ f_2 &= -10 + t \\ f_3 &= t \end{aligned}$$
(b) $f_1 = 15, f_3 = 15$

(c)
$$\begin{aligned} 0 &\le f_1 \le 20 \\ 0 &\le f_2 \le 20 \\ 10 &\le f_3 \le 30 \end{aligned}$$

(d) Fluxo negativo significaria que a água estaria correndo no sentido contrário ao da seta.

17. (a)
$$\begin{aligned} f_1 &= -200 + s + t \\ f_2 &= 300 - s - t \\ f_3 &= s \\ f_4 &= 150 - t \\ f_5 &= t \end{aligned}$$

(b) $200 \le f_3 \le 300$

(c) Se $f_3 = s = 0$, então $f_5 = t \ge 200$ (a partir da equação de f_1), mas $f_5 = t \le 150$ (a partir da equação de f_4). Isso é uma contradição.

(d) $50 \le f_3 \le 300$

19. $I_1 = 3$ amperes, $I_2 = 5$ amperes, $I_3 = 2$ amperes

21. (a) $I = 10$ amperes, $I_1 = I_5 = 6$ amperes, $I_2 = I_4 = 4$ amperes, $I_3 = 2$ amperes

(b) $R_{eff} = \frac{7}{5}$ ohms

(c) Sim. Mude-o para 4 ohms.

23. Agricultura : Manufatura = 2 : 3

25. O pintor cobra \$39 por hora, o encanador \$42 por hora, o eletrecista \$54 por hora.

27. (a) Carvão deve produzir \$100 milhões e aço \$160 milhões.

(b) Carvão deve reduzir sua produção em ≈ \$4,2 milhões e aço deve aumentar em ≈ \$5,7 million.

29. (a) Sim. Pressione os interruptores 1, 2 e 3 ou os interruptores 3, 4 e 5.

(b) Não

31. As configurações que podem ser obtidas são representadas pelos vetores

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}$$

em $\mathbb{Z}_2^5$, para os quais $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0$. (Existem 16 possibilidades.)

33. Se 0 = desligado, 1 = azul-claro e 2 = azul-escuro, o sistema linear que surge tem a matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

que pode ser reduzida, sobre $\mathbb{Z}_3$, para

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Isso fornece as soluções

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\1\\0\\2\\1\end{bmatrix}$$

sendo t um elemento de $\mathbb{Z}_3$. Assim, existem exatamente três soluções:

$$\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\2\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\0\\2\\0\\2\end{bmatrix}$$

em que cada elemento da matriz indica o número de vezes que o interruptor correspondente teve de ser pressionado.

35. **(a)** Pressione os quadrados 3 e 7.
(b) A matriz A dos coeficientes, de ordem 9×9, é equivalente por linhas, sobre $\mathbb{Z}_2$, à matriz identidade. Portanto, para qualquer elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbb{Z}_2^9$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução.

37. Graça tem 15 anos e Heitor tem 5.

39. 1200 e 600 jardas quadradas.

41. **(a)** $a = 4 - d, b = 5 - d, c = -2 + d$, sendo d arbitrário.
(b) Sem solução

43. **(a)** Sem solução
(b) $[a, b, c, d, e, f] = [4, 5, 6, -3, -1, 0] + f[-1, -1, -1, 1, 1, 1]$

45. **(a)** $y = x^2 - 2x + 1$ **(b)** $y = x^2 + 6x + 10$

47. $A = 1, B = 2$

49. $A = -\frac{1}{5}, B = \frac{1}{3}, C = 0, D = -\frac{2}{15}, E = -\frac{1}{5}$

51. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$

Exercícios 2.5

1.

n	0	1	2	3	4	5
x_1	0	0,8571	0,9714	0,9959	0,9991	0,9998
x_2	0	0,8000	0,9714	0,9943	0,9992	0,9998

Solução exata: $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$

3.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0,2222	0,2539	0,2610	0,2620	0,2622	0,2623
x_2	0	0,2857	0,3492	0,3582	0,3603	0,3606	0,3606

Solução exata (com quatro casas decimais): $x_1 = 0{,}2623$ e $x_2 = 0{,}3606$

5.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	0	0,3333	0,2500	0,3055	0,2916	0,3009	0,2986	0,3001	0,2997
x_2	0	0,2500	0,0834	0,1250	0,0972	0,1042	0,0996	0,1008	0,1000
x_3	0	0,3333	0,2500	0,3055	0,2916	0,3009	0,2986	0,3001	0,2997

Solução exata: $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = 0{,}1$ e $x_3 = 0{,}3$

7.

n	0	1	2	3	4
x_1	0	0,8571	0,9959	0,9998	1,0000
x_2	0	0,9714	0,9992	1,0000	1,0000

O uso do método de Gauss-Seidel proporciona resultados que diferem em menos de 0,001 da resposta exata após três iterações. Para obter a mesma precisão usando o método de Jacobi, é necessário fazer quatro iterações.

9.

n	0	1	2	3	4
x_1	0	0,2222	0,2610	0,2622	0,2623
x_2	0	0,3492	0,3603	0,3606	0,3606

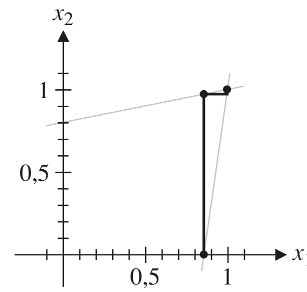
O uso do método de Gauss-Seidel proporciona resultados que diferem em menos de 0,001 da resposta exata após três iterações. Para obter a mesma precisão usando o método de Jacobi, é necessário fazer quatro iterações.

11.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0,3333	0,2777	0,2962	0,2993	0,2998	0,3000
x_2	0	0,1667	0,1112	0,1020	0,1004	0,1000	0,1000
x_3	0	0,2777	0,2962	0,2993	0,2998	0,3000	0,3000

O uso do método de Gauss-Seidel proporciona resultados que diferem em menos de 0,001 da resposta exata após quatro iterações. Para obter a mesma precisão usando o método de Jacobi, é necessário fazer sete iterações.

13.



15.

n	0	1	2	3	4
x_1	0	3	-5	19	-53
x_2	0	-4	8	-28	80

Se permutarmos as equações e aplicarmos o método de Gauss-Seidel ao sistema equivalente

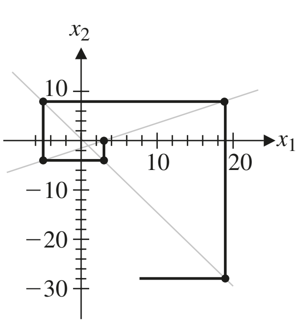
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

iremos obter

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	0	0,3333	1,2222	0,9260	1,0247	0,9918	1,0027	0,9991	1,0003
x_2	0	$-1,3333$	$-0,8889$	$-1,0370$	$-0,9876$	$-1,0041$	$-0,9986$	$-1,0004$	$-0,9998$

Após sete iterações, o processo irá convergir para a solução exata $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$ com erro menor do que 0,001.

17.



19.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	$-1,6$	14,97	8,550	10,740	9,839	10,120
x_2	0	25,9	11,408	14,051	11,615	11,718	11,249
x_3	0	$-10,35$	$-9,311$	$-11,200$	$-11,322$	$-11,721$	$-11,816$

n	7	8	9	10	11	12
x_1	9,989	10,022	10,002	10,005	10,001	10,001
x_2	11,187	11,082	11,052	11,026	11,015	11,008
x_3	$-11,912$	$-11,948$	$-11,973$	$-11,985$	$-11,992$	$-11,996$

Após 12 iterações, o método de Gauss-Seidel convergiu para a solução exata $x_1 = 10$, $x_2 = 11$ e $x_3 = -12$, com erro menor do que 0,01.

21.

n	13	14	15	16
x_1	10,0004	10,0003	10,0001	10,0001
x_2	11,0043	11,0023	11,0014	11,0007
x_3	−11,9976	−11,9986	−11,9993	−11,9996

23. O método de Gauss-Seidel produz

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	0	0	12,5	21,875	24,219	24,805	24,951	24,988	24,997	24,999
x_2	0	0	18,75	21,438	24,609	24,902	24,976	24,994	24,998	24,999
x_3	0	50	68,75	73,438	74,609	74,902	74,976	74,994	74,998	74,999
x_4	0	62,5	71,875	74,219	74,805	74,951	74,988	74,997	74,999	75,000

A solução exata é $x_1 = 25$, $x_2 = 25$, $x_3 = 75$ e $x_4 = 75$.

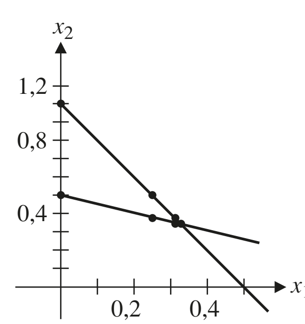
25. O método de Gauss-Seidel produz os seguintes iterados:

n	0	1	2	3	4	5	6
t_1	0	20	21,25	22,8125	23,3301	23,6596	23,7732
t_2	0	5	11,25	13,3203	14,6386	15,0926	15,2732
t_3	0	21,25	24,6094	26,9873	27,7303	27,9626	28,0352
t_4	0	2,5	5,8594	8,2373	8,9804	9,2126	9,2852
t_5	0	7,1875	14,6289	16,2829	16,7578	16,9036	16,9491
t_6	0	23,0469	24,9072	25,3207	25,4394	25,4759	25,4873

n	7	8	9	10	11	12
t_1	23,8093	23,8206	23,8242	23,8252	23,8256	23,8257
t_2	15,2824	15,2966	15,3010	15,3024	15,3029	15,3029
t_3	28,0579	28,0650	28,0671	28,0678	28,0681	28,0681
t_4	9,3079	9,3150	9,3172	9,3178	9,3181	9,3181
t_5	16,9633	16,9677	16,9690	16,9695	16,9696	16,9696
t_6	25,4908	25,4919	25,4922	25,4924	25,4924	25,4924

27. (a)

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{21}{64}$
x_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{11}{32}$



(b) $\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$

(c)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0	0	0,25	0,3125	0,3281	0,3320	0,3330	0,3332
x_2	1	0,5	0,375	0,3438	0,3360	0,3340	0,3335	0,3334

[As colunas 1, 2 e 3 dessa tabela são, respectivamente, as colunas *ímpares* 1, 3 e 5 da tabela no item (a).] Os iterados estão convergindo para $x_1 = x_2 = 0{,}3333$.

(d) $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$

Questões de Revisão

1. (a) F **(c)** F **(e)** V **(g)** V **(i)** F

3. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ **7.** $k = -1$ **9.** (0, 3, 1)

11. $x - 2y + z = 0$ **13. (a)** Sim **15.** 1 ou 2

17. Se $a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}$, então $(a + b)\mathbf{u} + (a - b)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. A independência linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ implica que $a + b = 0$ e $a - b = 0$. Resolvendo esse sistema, obtemos $a = b = 0$. Portanto, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ são linearmente independentes.

19. Seus postos têm que ser iguais.

Capítulo 3

Exercícios 3.1

1. $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$ **3.** Impossível

5. $\begin{bmatrix} 12 & -6 & 3 \\ -4 & 12 & 14 \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$

9. [10] **11.** $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 27 & 0 \\ -49 & 125 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. $B = \begin{bmatrix} 1{,}50 & 1{,}00 & 2{,}00 \\ 1{,}75 & 1{,}50 & 1{,}00 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 650{,}00 & 462{,}50 \\ 675{,}00 & 406{,}25 \end{bmatrix}$

A coluna i corresponde ao depósito i; a linha 1 contém os custos de remessa por caminhão, e a linha 2 contém os custos de remessa por trem.

21. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

23. $AB = [2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \quad 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3]$

(em que $\mathbf{a}_i$ é a i-ésima coluna de A)

25. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -6 & -9 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -12 & -8 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

27. $BA = \begin{bmatrix} 2\mathbf{A}_1 + 3\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 + 6\mathbf{A}_2 + 4\mathbf{A}_3 \end{bmatrix}$ (em que $\mathbf{A}_i$ é a i-ésima linha de A)

29. Se $\mathbf{b}_i$ é a i-ésima coluna de B, então $A\mathbf{b}_i$ é a i-ésima coluna de AB. Se as colunas de B são linearmente dependentes, então existem escalares $c_{11}, \ldots, c_n$ (não todos nulos) tais que $c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$. Mas então $c_1(A\mathbf{b}_1) + \cdots + c_n(A\mathbf{b}_n) = A(c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, e, portanto, as colunas de AB são linearmente dependentes.

31. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$ **33.** $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$

35. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$A^7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A^{2001} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

37. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

39. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ **(c)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{bmatrix}$

Exercícios 3.2

1. $X = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **3.** $X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$

5. $B = 2A_1 + A_2$ **7.** Impossível

9. $\text{ger}(A_1, A_2) = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 & 2c_1 + c_2 \\ -c_1 + 2c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} w & x \\ 2x - 5w & x - w \end{bmatrix} \right\}$

11. $\text{ger}(A_1, A_2, A_3) = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_3 & 2c_2 + c_3 & -c_1 + c_3 \\ 0 & c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -3b + 4c + 5e & b & c \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix} \right\}$

13. Linearmente independente

15. Linearmente independente

23. $a = d, c = 0$ **25.** $3b = 2c, a = d - c$

27. $a = d, b = c = 0$

29. Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes $n \times n$ triangulares superiores, e suponha $i > j$. Então, pela definição de matriz triangular superior,

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{i,\,i-1} = 0 \quad \text{e}$$
$$b_{ij} = b_{i+1,\,j} = \cdots = b_{nj} = 0$$

Agora, considere $C = AB$. Então

$$\begin{aligned} c_{ij} = {} & a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{i,\,i-1}b_{i-1,\,j} + a_{ii}b_{ij} \\ & + a_{i,\,i+1}b_{i+1,\,j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ = {} & 0 \cdot b_{1j} + 0 \cdot b_{2j} + \cdots 0 \cdot b_{i-1,\,j} + a_{ii} \cdot 0 \\ & + a_{i,\,i+1} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

e disso concluímos que C é triangular superior.

35. (a) A e B simétricas $\Rightarrow (A + B)^T = A^T + B^T = A + B$ $\Rightarrow A + B$ é simétrica

37. As matrizes em (b) e (c) são antissimétricas.

41. A ou B (ou ambas) deve ser a matriz nula.

43. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

47. *Sugestão:* use o traço.

Exercícios 3.3

1. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ **3.** Não invertível

5. Não invertível **7.** $\begin{bmatrix} -1{,}6 & -2{,}8 \\ 0{,}\overline{3} & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a/(a^2 + b^2) & b/(a^2 + b^2) \\ -b/(a^2 + b^2) & a/(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}$

13. (a) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

(c) O método utilizado na parte (b) usa menos multiplicações.

17. (b) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ se e somente se $AB = BA$.

21. $X = A^{-1}(BA)^2B^{-1}$

23. $X = (AB)^{-1}BA + A$

25. $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **27.** $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **35.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **37.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

43. (a) Se A é invertível, então $BA = CA \Rightarrow (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} \Rightarrow B(AA^{-1}) = C(AA^{-1}) \Rightarrow BI = CI \Rightarrow B = C$.

45. *Sugestão:* reescreva $A^2 - 2A + I = O$ como $A(2I - A) = I$.

47. Se AB é invertível, então existe uma matriz X tal que $(AB)\,X = I$. Mas com isso temos também que $A(BX) = I$, portanto, a matriz A é invertível (com inversa BX).

49. $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ **51.** $\begin{bmatrix} 1/(a^2 + 1) & -a/(a^2 + 1) \\ a/(a^2 + 1) & 1/(a^2 + 1) \end{bmatrix}$

53. Não invertível

55. $\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -1/a^2 & 1/a & 0 \\ 1/a^3 & -1/a^2 & 1/a \end{bmatrix}, a \neq 0$

57. $\begin{bmatrix} -11 & -2 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a/d & -b/d & -c/d & 1/d \end{bmatrix}, d \neq 0$

61. Não invertível **63.** $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

69. $\left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$ **71.** $\left[\begin{array}{rr|rr} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Exercícios 3.4

1. $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} -3/2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} -7 \\ -15 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

15. $L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, U^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix},$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/12 & 1/12 \\ 1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercícios 3.5

1. Subespaço **3.** Subespaço

5. Subespaço **7.** Não é um subespaço

11. **b** pertence a col(A) e **w** não pertence a lin(A).

15. Não

17. $\{[1 \;\; 0 \;\; -1], [0 \;\; 1 \;\; 2]\}$ é uma base para lin(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para col(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para anul(A).

19. $\{[1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0], [0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 0], [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]\}$ é uma base para lin(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para col(A); $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para anul(A).

21. $\{[1 \;\; 0 \;\; -1], [1 \;\; 1 \;\; 1]\}$ é uma base para lin(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para col(A).

23. $\{[1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1], [0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 1], [0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; -1]\}$ é uma base para lin(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para col(A).

25. $\{[1 \;\; 0 \;\; -1], [0 \;\; 1 \;\; 2]\}$ e $\{[1 \;\; 0 \;\; -1], [1 \;\; 1 \;\; 1]\}$ são ambos conjuntos linearmente independentes que geram lin(A) $= \{[a \;\; b \;\; -a + 2b]\}$. Tanto $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ quanto $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ são conjuntos linearmente independentes que geram col(A) $= \mathbb{R}^2$.

27. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

29. $\{[1 \;\; 0 \;\; 0], [0 \;\; 1 \;\; 0], [0 \;\; 0 \;\; 1]\}$

31. $\{[2 \;\; -3 \;\; 1], [1 \;\; -1 \;\; 0], [4 \;\; -4 \;\; 1]\}$

35. posto(A) $= 2$, nulidade(A) $= 1$

37. posto(A) $= 3$, nulidade(A) $= 1$

39. Se A é 3×5, então posto $(A) \leq 3$. Logo não pode haver mais que três colunas linearmente independentes.

41. nulidade(A) $= 2, 3, 4$ ou 5

43. Se $a = -1$, então posto$(A) = 1$; se $a = 2$, então posto$(A) = 2$; para $a \neq -1, 2$, posto$(A) = 3$.

45. Sim **47.** Sim **49.** Não

51. O vetor $\mathbf{w}$ será um elemento de ger$(\mathcal{B})$ se e somente se o sistema linear com matriz completa $[\mathcal{B} \mid \mathbf{w}]$ for consistente, o que é verdadeiro neste caso, pois

$$[\mathcal{B} \mid \mathbf{w}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A partir dessa forma escalonada reduzida por linhas, fica claro que $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

53. posto$(A) = 2$, nulidade$(A) = 1$

55. posto$(A) = 3$, nulidade$(A) = 1$

57. Sejam $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m$ os vetores linha de A, de maneira que lin$(A) =$ ger$(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$. Se $\mathbf{x}$ é um elemento de anul(A), então, como $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, também temos $\mathbf{A}_i\mathbf{x} = 0$, para $i = 1, \ldots, m$, pela definição de multiplicação de matriz. Se $\mathbf{r}$ é um elemento de lin(A), então $\mathbf{r}$ é da forma

$\mathbf{r} = c_1\mathbf{A}_1 + \cdots + c_m\mathbf{A}_m$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \mathbf{x} &= (c_1\mathbf{A}_1 + \cdots + c_m\mathbf{A}_m) \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}) + \cdots + c_m(\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

59. (a) Se um conjunto de colunas de AB é linearmente independente, as colunas correspondentes de B são linearmente independentes (por um argumento semelhante ao usado para resolver o exercício 29 da seção 3.1). Segue que o número *máximo* de colunas linearmente independentes de AB [a saber, $k =$ posto(AB)] não pode ser maior que o número *máximo* de colunas linearmente independentes de B [a saber, $r =$ posto(B)]. Em outras palavras, posto$(AB) \leq$ posto(B).

61. (a) Do exercício 53(a), temos que posto$(UA) \leq$ posto(A) e posto$(A) =$ posto$((U^{-1}U)A) =$ posto$(U^{-1}(UA)) \leq$ posto(UA). Assim, posto(UA) $=$ posto(A).

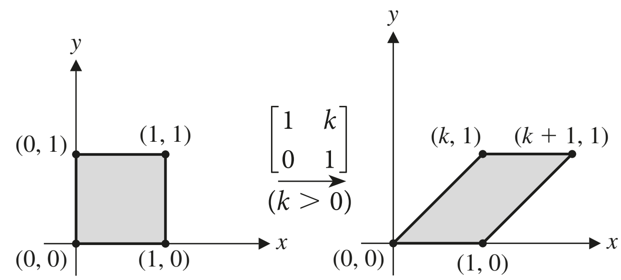
Exercícios 3.6

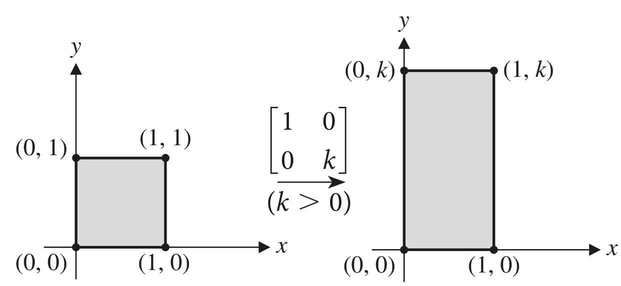
1. $T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix}$, $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

15. $[F] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **17.** $[D] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ estica ou encolhe na direção x (combinada com uma reflexão em relação ao eixo y, se $k < 0$); $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ estica ou encolhe na direção y (combinada com uma reflexão em relação ao eixo x, se $k < 0$); $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma reflexão em relação à reta $y = x$; $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é um *cisalhamento* na direção x; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ é um *cisalhamento* na direção y. Por exemplo,





21. $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

31. $[S \circ T] = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

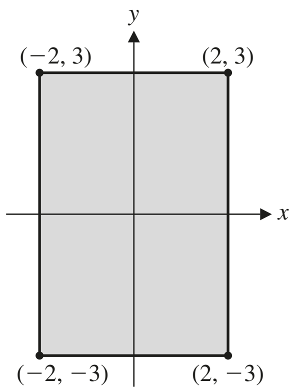
33. $[S \circ T] = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

35. $[S \circ T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

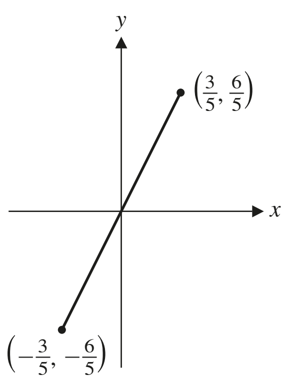
37. $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ **39.** $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

45. Na forma vetorial, considere as retas paralelas dadas por $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$ e $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + t\mathbf{d}$. Suas imagens sob T são, respectivamente, $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{p} + t\mathbf{d}) = T(\mathbf{p}) + tT(\mathbf{d})$ e $T(\mathbf{x}') = T(\mathbf{p}' + t\mathbf{d}) = T(\mathbf{p}') + tT(\mathbf{d})$. Suponha que $T(\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}$. Se $T(\mathbf{p}') - T(\mathbf{p})$ é paralelo a $T(\mathbf{d})$, as imagens representam a mesma reta; caso contrário, as imagens representam retas paralelas distintas. Por outro lado, se $T(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$, então as imagens representam dois pontos distintos se $T(\mathbf{p}') \neq T(\mathbf{p})$, e um único ponto, caso contrário.

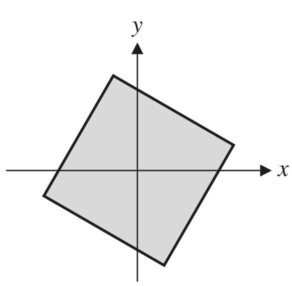
47.



49.



51.



Exercises 3.7

1. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}38 \\ 0{,}62 \end{bmatrix}$ **3.** 64%

5. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 150 \\ 120 \\ 120 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 155 \\ 120 \\ 115 \end{bmatrix}$ **7.** $\frac{5}{18}$

9. (a) $P = \begin{bmatrix} 0{,}662 & 0{,}250 \\ 0{,}338 & 0{,}750 \end{bmatrix}$ **(b)** 0,353

(c) 42,5% de dias úmidos; 57,5% de dias secos

11. (a) $P = \begin{bmatrix} 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}11 \\ 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}85 & 0{,}80 & 0{,}84 \end{bmatrix}$

(b) 0,08; 0,1062; 0,1057; 0,1057; 0,1057

(c) 10,6% de boa safra, 5,5% de safra regular e 83,9% de safra ruim

13. Os elementos do vetor $\mathbf{j}P$ são exatamente as somas das colunas da matriz P. Portanto, P é matriz estocástica se e somente se $\mathbf{j}P = \mathbf{j}$.

15. 4 **17.** 9,375

19. Sim, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **21.** Não

23. Não **25.** Sim, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 27 \\ 35 \end{bmatrix}$

27. Produtiva **29.** Não produtiva

31. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 16 \end{bmatrix}$ **33.** Sim, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

37. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 45 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 120 \\ 27 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 375 \\ 72 \end{bmatrix}$

39. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 500 \\ 70 \\ 50 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 720 \\ 350 \\ 35 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1175 \\ 504 \\ 175 \end{bmatrix}$

41. (a) Para L_1, temos $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 50 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 200 \\ 32 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 160 \\ 160 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 800 \\ 128 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 640 \\ 640 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 3200 \\ 512 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 2560 \\ 2560 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 12800 \\ 2048 \end{bmatrix}$,

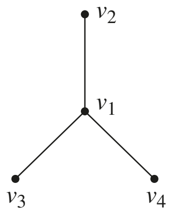
$\mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 10240 \\ 10240 \end{bmatrix}$.

(b) A primeira população oscila entre dois estados, enquanto a segunda se aproxima do estado de repouso.

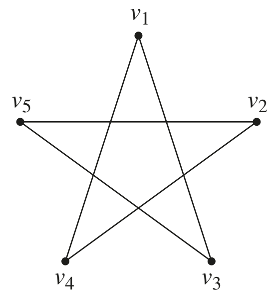
43. A população oscila em um ciclo composto de três estados (para a população relativa): se $0{,}1 < s \leq 1$, a população atual está crescendo; se $s = 0{,}1$, a população atual está passando por um ciclo de comprimento 3; se $0 \leq s < 0{,}1$, a população está diminuindo (e irá, com o tempo, se extinguir).

45. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **47.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

49.

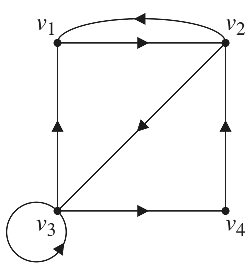


51.

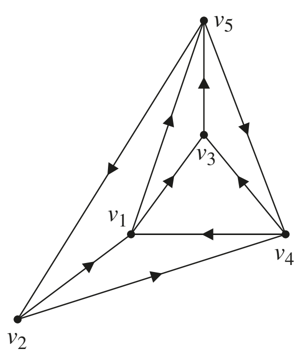


53. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **55.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

57.



59.

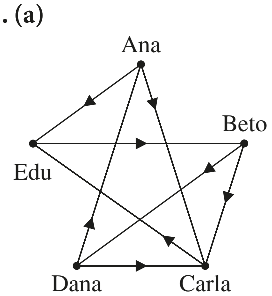


61. 2 **63.** 3 **65.** 0 **67.** 3

69. (a) O vértice i não é adjacente a nenhum outro vértice.

71. Se considerarmos apenas vitórias, P_2 estará em primeiro lugar; P_3, P_4 e P_6 estarão empatados em segundo lugar; P_1 e P_5 estarão empatados em terceiro. Se usarmos a noção de vitórias diretas e indiretas combinadas, os jogadores se classificarão da seguinte maneira: P_2 em primeiro lugar, seguido por P_6, P_4, P_3, P_5 e P_1.

73. (a)



$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) Dois passos. Todos os elementos da segunda linha de $A + A^2$ que não pertencem à diagonal são não nulos.

(d) Se o grafo tem n vértices, verifique o elemento (i, j) das potências A^k, para $k = 1, \ldots, n - 1$. O vértice i é conectado ao vértice j por um caminho de comprimento k se e somente se o elemento $(A^k)_{ij} \neq 0$.

75. O elemento $(AA^T)_{ij}$ conta o número de vértices adjacentes a *ambos* os vértices i e j.

77. Bipartido **79.** Bipartido

Questões de Revisão

1. (a) V **(c)** F **(e)** V **(g)** V **(i)** V

3. Impossível **5.** $\begin{bmatrix} \frac{17}{83} & -\frac{1}{83} \\ -\frac{1}{83} & \frac{5}{166} \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 25 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 2 & 4 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

11. Por que $(I - A)(I + A + A^2) = I - A^3 = I - O = I$, $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$.

13. Uma base para lin(A) é {[1, −2, 0, −1, 0], [0, 0, 1, 2, 0], [0, 0, 0, 0, 1]}; uma base para col(A) é $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}$ (ou a base canônica de $\mathbf{R}^3$); e uma base para anul(A) é $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.

15. Uma matriz invertível tem espaço anulado trivial (nulo). Se A é invertível, então A^T também é invertível e, portanto, ambas A e A^T têm espaços anulados triviais. Se A não é invertível, então A e A^T não têm necessariamente espaços anulados iguais. Por exemplo, tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

17. Como A tem n colunas linearmente independentes, posto(A) $= n$. Logo, posto(A^TA) $= n$, pelo teorema 3.28. Como A^TA é $n \times n$, isso implica que A^TA é invertível, pelo Teorema Fundamental das Matrizes Invertíveis. AA^T pode não ser invertível. Por exemplo, tome $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

19. $\begin{bmatrix} -1/5\sqrt{2} & -3/5\sqrt{2} \\ 2/5\sqrt{2} & 6/5\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Capítulo 4

Exercícios 4.1

1. $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}$, $\lambda = 3$

3. $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = -3\mathbf{v}, \lambda = -3$

5. $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}, \lambda = 3$

7. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

13. $\lambda = 1, E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \lambda = -1, E_{-1} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

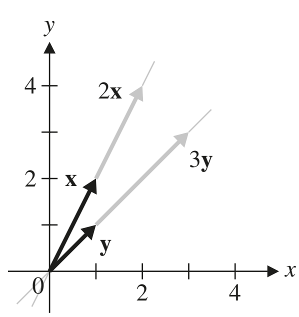
15. $\lambda = 0, E_0 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \lambda = 1, E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

17. $\lambda = 2, E_2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right); \lambda = 3, E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

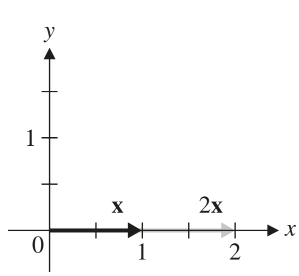
19. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda = 1; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda = 2$

21. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \lambda = 2; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \lambda = 0$

23. $\lambda = 2, E_2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right); \lambda = 3, E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$



25. $\lambda = 2, E_2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$



27. $\lambda = 1 + i, E_{1+i} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right); \lambda = 1 - i, E_{1-i} =$ $\text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right)$

29. $\lambda = 1 + i, E_{1+i} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \lambda = 1 - i, E_{1-i} =$ $\text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

31. $\lambda = 1, 2$ **33.** $\lambda = 4$

Exercícios 4.2

1. 16	**3.** 0	**5.** -18	**7.** 6
9. -12	**11.** $a^2b + ab^2$	**13.** 4	**15.** $abdg$
17. 0	**25.** 2	**27.** -24	**29.** 0
31. 0	**33.** -24	**35.** 8	**37.** -4
39. -8	**45.** $k \neq 0, 2$	**47.** -6	**49.** $-\frac{3}{2}$
51. $(-2)3^n$			

53. $\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det(BA)$

55. 0, 1 **57.** $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$

59. $x = -1, y = 0, z = 1$ **61.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

63. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercícios 4.3

1. (a) $\lambda^2 - 7\lambda + 12$ **(b)** $\lambda = 3, 4$

(c) $E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right); E_4 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) As multiplicidades algébrica e geométrica são todas iguais a 1.

3. (a) $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$

(b) $\lambda = -2, 1, 3$

(c) $E_{-2} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right); E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right);$

$E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}\right)$

(d) As multiplicidades algébrica e geométrica são todas iguais a 1.

5. (a) $-\lambda^3 + \lambda^2$ **(b)** $\lambda = 0, 1$

(c) $E_0 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right); E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) $\lambda = 0$ tem multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 1; $\lambda = 1$ tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 1.

7. (a) $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27$

(b) $\lambda = 3$

(c) $E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

(d) $\lambda = 3$ tem multiplicidade algébrica igual a 3 e multiplicidade geométrica igual a 2.

9. (a) $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 + 4\lambda - 12$

(b) $\lambda = -1, 2, 3$

(c) $E_{-1} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; $E_2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$;

$E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) $\lambda = -1$ e $\lambda = 3$ têm multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 1; $\lambda = 2$ tem multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 1.

11. (a) $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 3$

(b) $\lambda = -1, 1, 3$

(c) $E_{-1} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$;

$E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$;

$E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) $\lambda = -1$ e $\lambda = 3$ têm multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 1; $\lambda = 1$ tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 2.

15. $\begin{bmatrix} 2^{-9} + 3 \cdot 2^{10} \\ -2^{-9} + 3 \cdot 2^{10} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 2 \\ (2 \cdot 3^{20} - 1)/3^{20} \\ 2 \end{bmatrix}$

23. (a) $\lambda = -2, E_{-2} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda = 5, E_5 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(b) (i) $\lambda = -\frac{1}{2}, E_{-1/2} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda = \frac{1}{5}, E_{1/5} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(iii) $\lambda = 0, E_0 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda = 7$, $E_7 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

27. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 12$

35. $A^2 = 4A - 5I, A^3 = 11A - 20I$
$A^4 = 24A - 55I$

37. $A^{-1} = -\frac{1}{5}A + \frac{4}{5}I, A^{-2} = -\frac{4}{25}A + \frac{11}{25}I$

Exercícios 4.4

1. O polinômio característico de A é $\lambda^2 - 5\lambda + 1$, mas o de B é $\lambda^2 - 2\lambda + 1$.

3. Os autovalores de A são $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$, mas os de B são $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$.

5. $\lambda_1 = 4, E_4 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda_2 = 3, E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

7. $\lambda_1 = 6, E_6 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$; $\lambda_2 = -2, E_{-2} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

9. Não diagonalizável

11. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Não diagonalizável

15. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 35839 & -69630 \\ -11605 & 24234 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} (3^k + 3(-1)^k)/4 & (3^{k+1} - 3(-1)^k)/4 \\ (3^k - (-1)^k)/4 & (3^{k+1} + (-1)^k)/4 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

23.

$$\begin{bmatrix} (5+2^{k+2}+(-3)^k)/10 & (2^k-(-3)^k)/5 & (-5+2^{k+2}+(-3)^k)/10 \\ (2^{k+1}-2(-3)^k)/5 & (2^k+4(-3)^k)/5 & (2^{k+1}-2(-3)^k)/5 \\ (-5+2^{k+2}+(-3)^k)/10 & (2^k-(-3)^k)/5 & (5+2^{k+2}+(-3)^k)/10 \end{bmatrix}$$

25. $k = 0$ **27.** $k = 0$

29. Todos os valores reais de k

37. Se $A \sim B$, então existe uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$. Assim, usando o exercício 45 da seção 3.2, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(B) &= \operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr}(P^{-1}(AP)) = \operatorname{tr}((AP)P^{-1}) \\ &= \operatorname{tr}(APP^{-1}) = \operatorname{tr}(AI) = \operatorname{tr}(A) \end{aligned}$$

39. $P = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$

41. $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

51. (b) $\dim E_{-1} = 1, \dim E_1 = 2, \dim E_2 = 3$

Exercícios 4.5

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$, 6,000

(b) $\lambda_1 = 6$

3. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}618 \end{bmatrix}$, 2,618

(b) $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2{,}618$

5. (a) $m_5 = 11{,}001$, $\mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} -0{,}333 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}$

7. (a) $m_8 = 10{,}000$, $\mathbf{y}_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

9.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 26 \\ 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17{,}692 \\ 5{,}923 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18{,}018 \\ 6{,}004 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17{,}999 \\ 6{,}000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 18{,}000 \\ 6{,}000 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}308 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}335 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}333 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}333 \end{bmatrix}$
m_k	1	26	17,692	18,018	17,999	18,000

Logo, $\lambda_1 \approx 18$, $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}333 \end{bmatrix}$.

11.

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7{,}571 \\ 2{,}857 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7{,}755 \\ 3{,}132 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7{,}808 \\ 3{,}212 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7{,}823 \\ 3{,}234 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7{,}827 \\ 3{,}240 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}286 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}377 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}404 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}411 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}413 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}414 \end{bmatrix}$
m_k	1	7	7,571	7,755	7,808	7,823	7,827

Logo, $\lambda_1 \approx 7{,}827$, $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}414 \end{bmatrix}$.

13.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}21\\15\\13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16{,}809\\12{,}238\\10{,}714\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17{,}011\\12{,}371\\10{,}824\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16{,}999\\12{,}363\\10{,}818\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17{,}000\\12{,}363\\10{,}818\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}714\\0{,}619\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}728\\0{,}637\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$
m_k	1	21	16,809	17,011	16,999	17,000

Logo, $\lambda_1 \approx 17, \mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$.

15. $\lambda_1 \approx 5, \mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix}1\\0\\0{,}333\end{bmatrix}$

17.

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7{,}571\\2{,}857\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7{,}755\\3{,}132\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7{,}808\\3{,}212\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7{,}823\\3{,}234\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7{,}827\\3{,}240\end{bmatrix}$
$R(\mathbf{x}_k)$	7	7,755	7,823	7,828	7,828	7,828	7,828
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}286\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}377\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}404\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}411\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}413\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}414\end{bmatrix}$

19.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}21\\15\\13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16{,}809\\12{,}238\\10{,}714\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17{,}011\\12{,}371\\10{,}824\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16{,}999\\12{,}363\\10{,}818\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17{,}000\\12{,}363\\10{,}818\end{bmatrix}$
$R(\mathbf{x}_k)$	16,333	16,998	17,000	17,000	17,000	17,000
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}714\\0{,}619\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}728\\0{,}637\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$

21.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}8\\3{,}2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}667\\2{,}667\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}571\\2{,}286\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}500\\2{,}000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}444\\1{,}778\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}400\\1{,}600\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}364\\1{,}455\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}667\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}571\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}500\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}444\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}400\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}364\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}333\end{bmatrix}$
m_k	1	5	4,8	4,667	4,571	4,500	4,444	4,400	4,364

Como $\lambda_1 = \lambda_2 = 4, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, m_k está convergindo lentamente para a resposta exata.

23.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}2\\3{,}2\\0{,}2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}048\\3{,}048\\0{,}048\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}012\\3{,}012\\0{,}012\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}003\\3{,}003\\0{,}003\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}001\\3{,}001\\0{,}001\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}000\\3{,}000\\0{,}000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}000\\3{,}000\\0{,}000\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}8\\0{,}2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}762\\0{,}048\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}753\\0{,}012\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}751\\0{,}003\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}750\\0{,}001\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}750\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}750\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}750\\0\end{bmatrix}$
m_k	1	5	4,2	4,048	4,012	4,003	4,001	4,000	4,000

Neste caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ e $E_4 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

É claro que m_k está convergindo para 4 e $\mathbf{y}_k$ está convergindo para um vetor no autoespaço E_4 — precisamente, $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 0{,}75\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

25.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
m_k	1	1	-1	1	-1	1

Os autovalores exatos são complexos (i e $-i$), de modo que não há chance do método da potência convergir para algum autovalor dominante, nem tampouco para um autovetor dominante, se começarmos com um valor inicial *real*. Em vez disso, o método da potência oscila entre dois conjuntos de valores reais.

27.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2{,}500\\4{,}000\\2{,}500\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2{,}250\\4{,}000\\2{,}250\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2{,}125\\4{,}000\\2{,}125\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2{,}063\\4{,}000\\2{,}063\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}750\\1\\0{,}750\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}625\\1\\0{,}625\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}562\\1\\0{,}562\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}531\\1\\0{,}531\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}516\\1\\0{,}516\end{bmatrix}$
m_k	1	4	4	4	4	4

Os autovalores são $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$, com os autovetores correspondentes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$, o vetor inicial $\mathbf{x}_0$ tem uma componente nula na direção do autovetor dominante, de modo que o método da potência não pode convergir para o autovalor/autovetor dominante. Em vez disso, ele converge para um *segundo* par autovalor/autovetor, como os cálculos mostram.

29. Aplique o método da potência para

$$A - 18I = \begin{bmatrix} -4 & 12 \\ 5 & -15 \end{bmatrix}.$$

k	0	1	2	3
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15{,}2 \\ -19 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 15{,}2 \\ -19 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}8 \\ 1 \end{bmatrix}$
m_k	1	-10	-19	-19

Consequentemente, -19 é o autovalor dominante de $A - 18I$, e $\lambda_2 = -19 + 18 = -1$ é o segundo autovalor de A.

31. Aplique o método da potência a $A - 17I = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 8 \\ 4 & -2 & -4 \\ 8 & -4 & -8 \end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -18 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -18 \\ 9 \\ 18 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix}$
m_k	1	4	-18	-18
$R(\mathbf{x}_k)$	$-0{,}667$	-18	-18	-18

Neste caso, não existe nenhum autovalor dominante. (Poderíamos escolher 18 ou -18 para m_k, $k \geq 2$.) Entretanto, o método do quociente de Rayleigh (exercícios de 17 a 20) converge para -18. Assim, -18 é o autovalor dominante de $A - 17I$, e $\lambda_2 = -18 + 17 = -1$ é o segundo autovalor de A.

33.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}833 \\ 1{,}056 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}798 \\ -0{,}997 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}800 \\ -1{,}000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}800 \\ -1{,}000 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}789 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}801 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}800 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}800 \\ 1 \end{bmatrix}$
m_k	1	0,5	1,056	$-0{,}997$	$-1{,}000$	$-1{,}000$

Assim, o autovalor de A que tem o menor valor absoluto é $1/(-1) = -1$.

35.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}500 \\ 0{,}000 \\ 0{,}500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}333 \\ -0{,}500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}111 \\ -0{,}500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}259 \\ -0{,}500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}500 \\ 0{,}160 \\ -0{,}500 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1{,}000 \\ 0{,}000 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1{,}000 \\ -0{,}667 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1{,}000 \\ -0{,}222 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1{,}000 \\ -0{,}518 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1{,}000 \\ -0{,}321 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}$
m_k	1	$-0{,}500$	$-0{,}500$	$-0{,}500$	$-0{,}500$	$-0{,}500$

É claro que m_k converge para $-0{,}5$. Por isso, o menor autovalor de A é $1/(-0{,}5) = -2$.

37. Os cálculos são os mesmos que os do exercício 33.

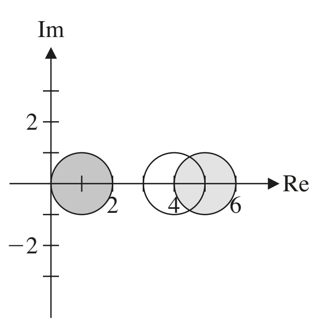
39. Aplicamos o método da potência inversa a $A - 5I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 6 \\ -1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Tomando $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, temos

k	0	1	2	3
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}200 \\ -0{,}500 \\ 0{,}200 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}080 \\ -0{,}500 \\ -0{,}080 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}032 \\ -0{,}500 \\ 0{,}032 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}400 \\ 1 \\ -0{,}400 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0{,}160 \\ 1 \\ 0{,}160 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0{,}064 \\ 1 \\ -0{,}064 \end{bmatrix}$
m_k	1	$-0{,}500$	$-0{,}500$	$-0{,}500$

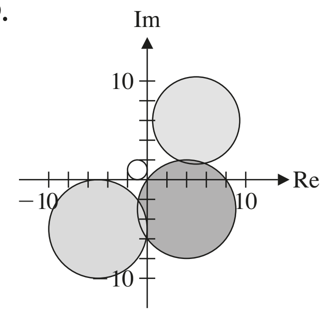
É claro que m_k converge para $-0{,}5$. Por isso, o autovalor de A mais próximo de 5 é $5 + 1/(-0{,}5) = 5 - 2 = 3$.

41. 0,732 **43.** $-0{,}619$

47.



49.



51. *Sugestão:* Mostre que 0 não está contido em nenhum disco de Gerschgorin e então aplique o teorema 4.16.

53. O exercício 52 implica que $|\lambda|$ é menor ou igual a todas as somas dos elementos das colunas de A, para cada autovalor λ. Mas, para uma matriz estocástica, todas as somas dos elementos das colunas são iguais a λ. Portanto, $|\lambda| \leq 1$.

Exercícios 4.6

1. Não regular **3.** Regular

5. Não regular **7.** $L = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

9. $L = \begin{bmatrix} 0{,}304 & 0{,}304 & 0{,}304 \\ 0{,}354 & 0{,}354 & 0{,}354 \\ 0{,}342 & 0{,}342 & 0{,}342 \end{bmatrix}$

11. $1, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **13.** $2, \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

15. A população está crescendo, decrescendo e permanece constante, respectivamente.

17.

$$P^{-1}LP = \begin{bmatrix} b_1 & b_2s_1 & b_3s_1s_2 & \cdots & b_{n-1}s_1s_2\cdots s_{n-2} & b_ns_1s_2\cdots s_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de L é $(\lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - b_2s_1\lambda^{n-2} - b_3s_1s_2\lambda^{n-3} - \cdots - b_ns_1s_2\cdots s_{n-1})(-1)^n$.

19. $\lambda \approx 1{,}746$, $\mathbf{p} \approx \begin{bmatrix} 0{,}660 \\ 0{,}264 \\ 0{,}076 \end{bmatrix}$

21. $\lambda \approx 1{,}092$, $\mathbf{p} \approx \begin{bmatrix} 0{,}535 \\ 0{,}147 \\ 0{,}094 \\ 0{,}078 \\ 0{,}064 \\ 0{,}053 \\ 0{,}029 \end{bmatrix}$

25. (a) $h \approx 0{,}082$

29. $3, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

31. $3, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

33. Redutível

35. Irredutível

43. 1, 2, 4, 8, 16

45. 0, 1, 1, 0, −1

47. $x_n = 4^n - (-1)^n$

49. $y_n = (n - \frac{1}{2})2^n$

51. $b_n = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}[(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n]$

57. (a) $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 5, d_5 = 8$

(b) $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$

(c) $d_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

59. A solução geral é $x(t) = -3C_1e^{-t} + C_2e^{4t}$, $y(t) = 2C_1e^{-t} + C_2e^{4t}$. A solução particular é $x(t) = -3e^{-t} + 3e^{4t}$, $y(t) = 2e^{-t} + 3e^{4t}$.

61. A solução geral é $x_1(t) = (1 + \sqrt{2})C_1e^{\sqrt{2}t} + (1 - \sqrt{2})C_2e^{-\sqrt{2}t}$, $x_2(t) = C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t}$. A solução particular é $x_1(t) = (2 + \sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}/4 + (2 - \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}/4$, $x_2(t) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}/4 - \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}/4$.

63. A solução geral é $x(t) = -C_1 + C_3e^{-t}$, $y(t) = C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t}$, $z(t) = C_1 + C_2e^t$. A solução particular é $x(t) = -2 - e^{-t}$, $y(t) = -2 + e^t + e^{-t}$, $z(t) = -2 + e^t$.

65. (a) $x(t) = -120e^{8t/5} + 520e^{11t/10}$, $y(t) = 240e^{8t/5} + 260e^{11t/10}$. A cepa X morre após aproximadamente 2,93 dias; a cepa Y continua a crescer.

67. $a = 10$, $b = 20$; $x(t) = 10e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) + 10$, $y(t) = 10e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) + 20$. A espécie Y morre quando $t \approx 1{,}22$.

71. $x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$

77. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 27 \\ 27 \end{bmatrix}$ **(c)** Repulsor

79. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **(c)** Nenhum

81. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1{,}75 \\ -0{,}5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3{,}125 \\ -1{,}75 \end{bmatrix}$ **(c)** Ponto de sela

83. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0{,}36 \\ 0{,}36 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0{,}216 \\ 0{,}216 \end{bmatrix}$ **(c)** Atrator

85. $r = \sqrt{2}$, $\theta = 45°$, repulsor espiral

87. $r = 2$, $\theta = -60°$, repulsor espiral

89. $P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 \\ 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix}$, atrator espiral

91. $P = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$, centro orbital

Questões de Revisão

1. (a) F **(c)** F **(e)** F **(g)** V **(i)** F

3. −18

5. Como $A^T = -A$, temos $\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$, pelo teorema 4.7 e o fato que n é ímpar. Segue que $\det A = 0$.

7. $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5\mathbf{x}$, $\lambda = 5$

9. (a) $4 - 3\lambda^2 - \lambda^3$

(c) $E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$, $E_{-2} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

11. $\begin{bmatrix} 162 \\ 158 \end{bmatrix}$

13. Não semelhantes

15. Não semelhantes

17. 0, 1, ou −1

19. Se $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, então $(A^2 - 5A + 2I)\mathbf{x} = A^2\mathbf{x} - 5A\mathbf{x} + 2\mathbf{x} = 3^2\mathbf{x} - 5(3\mathbf{x}) + 2\mathbf{x} = -4\mathbf{x}$.

Capítulo 5

Exercícios 5.1

1. Ortogonal **3.** Não ortogonal **5.** Ortogonal

7. $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$ **9.** $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **11.** Ortonormal

13. $\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3\sqrt{5} \\ 4/3\sqrt{5} \\ -5/3\sqrt{5} \end{bmatrix}$

15. Ortonormal

17. Ortogonal, $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

19. Ortogonal, $\begin{bmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\theta & \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}^2\theta & -\cos\theta \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

21. Não ortogonal

27. $$\cos(\angle(Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y})) = \frac{Q\mathbf{x}\cdot Q\mathbf{y}}{\|Q\mathbf{x}\|\|Q\mathbf{y}\|} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$
$= \cos(\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ pelo teorema 5.6

29. Rotação, $\theta = 45°$ **31.** Reflexão, $y = \sqrt{3}x$

33. **(a)** $A(A^T + B^T)B = AA^TB + AB^TB = IB + AI = B + A = A + B$

(b) Da parte (a),

$$\begin{aligned} \det(A + B) &= \det(A(A^T + B^T)B) \\ &= \det A \det(A^T + B^T)\det B \\ &= \det A \det((A + B)^T)\det B \\ &= \det A \det(A + B)\det B \end{aligned}$$

Assuma que $\det A + \det B = 0$ (de modo que $\det B = -\det A$), mas que $A + B$ é invertível. Então, $\det(A + B) \neq 0$, logo $1 = \det A \det B = \det A(-\det A) = -(\det A)^2$. Como isso é impossível, concluímos que $A + B$ não pode ser invertível.

Exercícios 5.2

1. $W^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x + 2y = 0\right\}, \mathcal{B}^\perp = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

3. $W^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x = t, y = t, z = -t\right\}$,

$\mathcal{B}^\perp = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

5. $W^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - y + 3z = 0\right\}, \mathcal{B}^\perp = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

7. lin(A): $\{[1\ \ 0\ \ 1], [0\ \ 1\ \ -2]\}$, anul($A$): $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

9. col(A): $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$, anul($A^T$):

$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

11. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix}\right\}$ **13.** $\left\{\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

15. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$

19. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ **21.** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

25. Não

Exercícios 5.3

1. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix},$

$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

5. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$ **7.** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{38}{9} \\ -\frac{38}{9} \\ \frac{19}{9} \end{bmatrix}$

9. $\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\right\}$

11. $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{35} \\ \frac{34}{35} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{15}{34} \\ 0 \\ \frac{9}{34} \end{bmatrix} \right\}$

13. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

17. $R = \begin{bmatrix} 3 & 9 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

19. $A = AI$

21. $A^{-1} = (QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1} = R^{-1}Q^T =$

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3/2\sqrt{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

23. Suponha $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Então, $A\mathbf{x} = QR\mathbf{x} = Q\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Como $A\mathbf{x}$ representa uma combinação linear das colunas de A (que são linearmente independentes), precisamos ter $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Consequentemente, R é invertível, pelo Teorema Fundamental.

Exercícios 5.4

1. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7. $Q = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. $Q^TAQ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \cdot$

$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{bmatrix} = D$

13. (a) Se A e B são ortogonalmente diagonalizáveis, então cada uma é simétrica, pelo Teorema Espectral. Logo, pelo exercício 35 da seção 3.2, $A + B$ é simétrica, e então é ortogonalmente diagonalizável, pelo Teorema Espectral.

15. Se A e B são ortogonalmente diagonalizáveis, então cada uma é simétrica, pelo Teorema Espectral. Como $AB = BA$, então AB também é simétrica, pelo exercício 36 da seção 3.2. Então, AB é ortogonalmente diagonalizável, pelo Teorema Espectral.

17. $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$

Exercícios 5.5

1. $2x^2 + 6xy + 4y^2$ **3.** 123 **5.** -5

7. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

13. $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, y_1^2 + 6y_2^2$

15. $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} & -1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & 2/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & 2/3 \end{bmatrix}, 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$

17. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, 2(x')^2 + (y')^2 - (z')^2$

19. Definida positiva **21.** Definida negativa

23. Definida positiva **25.** Indefinida

27. Para cada vetor $\mathbf{x}$, temos que $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = \mathbf{x}^TB^TB\mathbf{x} = (B\mathbf{x})^T(B\mathbf{x}) = \|B\mathbf{x}\|^2 \geq 0$. Se $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} = 0$, então $\|B\mathbf{x}\|^2 = 0$, de modo que $B\mathbf{x} = 0$. Como B é invertível, isso implica que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, e então $A = B^TB$ é definida positiva.

31. (a) Todo autovalor de cA é da forma $c\lambda$ para algum autovalor λ de A. Pelo teorema 5.22 , $\lambda > 0$. Logo $c\lambda > 0$, pois c é positivo. Portanto, cA é definida positiva, pelo teorema 5.22.

(c) Seja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Então, $\mathbf{x}^TA\mathbf{x} > 0$ e $\mathbf{x}^TB\mathbf{x} > 0$, pois A e B são definidas positivas. Mas então $\mathbf{x}^T(A + B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^TA\mathbf{x} + \mathbf{x}^TB\mathbf{x} > 0$, e portanto $A + B$ é definida positiva.

33. O valor máximo de $f(\mathbf{x})$ é 2 quando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$;

o valor mínimo de $f(\mathbf{x})$ é 0 quando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

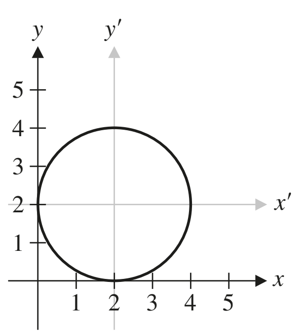
35. O valor máximo de $f(\mathbf{x})$ é 4 quando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$;

o valor mínimo de $f(\mathbf{x})$ é 1 quando $\mathbf{x} =$

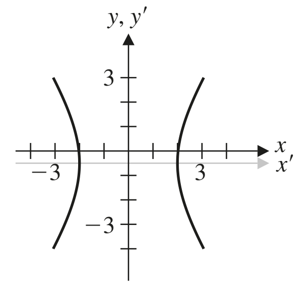
$$\pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ ou } \pm\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

39. Elipse **41.** Parábola **43.** Hipérbole

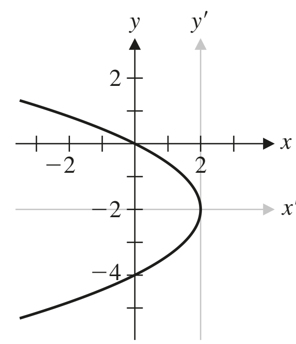
45. Círculo, $x' = x - 2$, $y' = y - 2$, $(x')^2 + (y')^2 = 4$



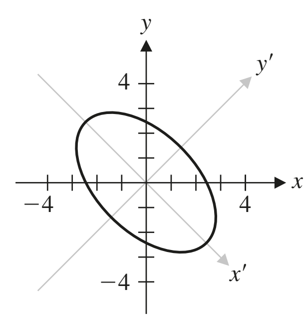
47. Hipérbole, $x' = x$, $y' = y + \frac{1}{2}$, $(x')^2/4 - (y')^2/9 = 1$



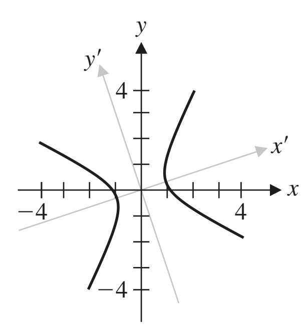
49. Parábola, $x' = x - 2$, $y' = y + 2$, $x' = -\frac{1}{2}(y')^2$



51. Elipse, $(x')^2/4 + (y')^2/12 = 1$



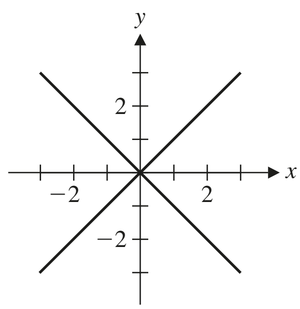
53. Hipérbole, $(x')^2 - (y')^2 = 1$



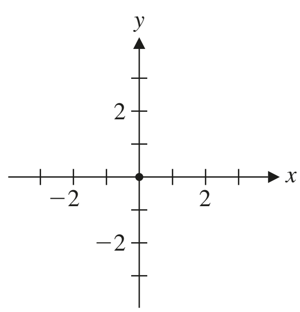
55. Elipse, $(x'')^2/50 + (y'')^2/10 = 1$

57. Hipérbole, $(x'')^2 - (y'')^2 = 1$

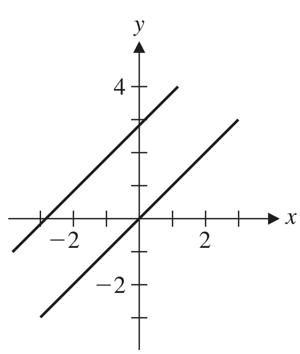
59. Degenerada (duas retas)



61. Degenerada (um ponto)



63. Degenerada (duas retas)



67. Hiperboloide de uma folha, $(x')^2 - (y')^2 + 3(z')^2 = 1$

69. Paraboloide hiperbólico, $z = -(x')^2 + (y')^2$

71. Paraboloide hiperbólico, $x' = -\sqrt{3}(y')^2 + \sqrt{3}(z')^2$

73. Elipsoide, $3(x'')^2 + (y'')^2 + 2(z'')^2 = 4$

Questões de Revisão

1. (a) V **(c)** V **(e)** F **(g)** F **(i)** F

3. $\begin{bmatrix} 9/2 \\ 2/3 \\ -11/6 \end{bmatrix}$ **5.** Verifique que $Q^TQ = I$.

7. O teorema 5.6(c) mostra que se $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = 0$, então $Q\mathbf{v}_i \cdot Q\mathbf{v}_j = 0$. O teorema 5.6(b) mostra que $\{Q\mathbf{v}_1, \ldots, Q\mathbf{v}_k\}$ consiste em vetores unitários porque os vetores de $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ são unitários. Portanto, $\{Q\mathbf{v}_1, \ldots, Q\mathbf{v}_k\}$ é um conjunto ortonormal.

9. $\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right\}$ **11.** $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

13. lim(A) : {[1 0 2 3 4], [0 1 0 2 1]}

col(A): $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}\right\}$

anul(A): $\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

anul(A^T): $\left\{\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

15. (a) $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

17. $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

19. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Capítulo 6

Exercícios 6.1

1. Espaço vetorial

3. Não é um espaço vetorial; o axioma 1 não vale.

5. Não é um espaço vetorial; o axioma 8 não vale.

7. Espaço vetorial **9.** Espaço vetorial

11. Espaço vetorial **15.** Espaço vetorial complexo