◆ EXERCÍCIOS 1.2 ◆

1. Desenhe os seguintes vetores em posição padrão em $\mathbb{R}^2$:

(a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. Desenhe os vetores do Exercício 1 com suas origens no ponto (−2, −3).

3. Desenhe os seguintes vetores na posição padrão em $\mathbb{R}^3$:

(a) $\mathbf{a} = [0, 2, 0]$ (b) $\mathbf{b} = [3, 2, 1]$

(c) $\mathbf{c} = [1, -2, 1]$ (d) $\mathbf{d} = [-1, -1, -2]$

4. Se os vetores do Exercício 3 forem transladados de modo que suas extremidades estejam no ponto (4, 5, 6), ache os pontos correspondentes às suas origens.

5. Para cada um dos seguintes pares de pontos, desenhe o vetor $\overrightarrow{AB}$. Depois, determine e redesenhe $\overrightarrow{AB}$ na posição padrão.

(a) $A = (1, -1), B = (4, 2)$ (b) $A = (0, -2), B = (2, -1)$

(c) $A = (2, \frac{3}{2}), B = (\frac{1}{2}, 3)$ (d) $A = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), B = (\frac{1}{6}, \frac{1}{2})$

6. Um excursionista anda 4 km na direção norte e depois 5 km na direção nordeste. Desenhe os vetores deslocamento que representam o passeio do excursionista e o vetor que representa o deslocamento a partir do ponto inicial.

Os Exercícios 7 a 10 se referem aos vetores do Exercício 1. Determine os vetores indicados e mostre como os resultados podem ser obtidos geometricamente.

7. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **8.** $\mathbf{b} + \mathbf{c}$

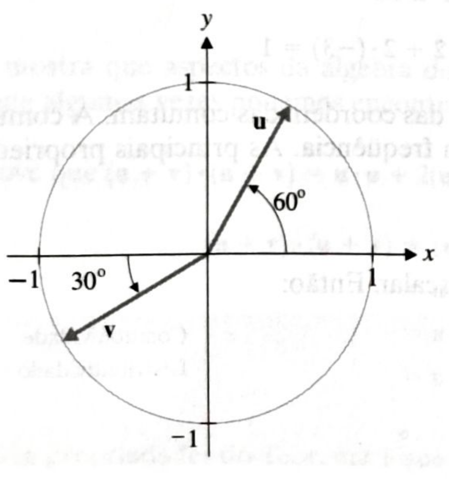
9. $\mathbf{d} - \mathbf{c}$ **10.** $\mathbf{a} - \mathbf{d}$

Os Exercícios 11 e 12 se referem aos vetores do Exercício 3. Determine os vetores indicados.

11. $2\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$ **12.** $2\mathbf{c} - 3\mathbf{b} - \mathbf{d}$

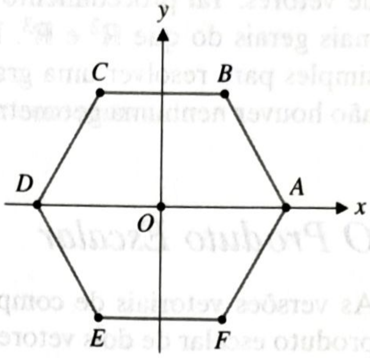
13. Ache as componentes dos vetores **u**, **v**, **u** + **v** e **u** − **v**, onde **u** e **v** aparecem na Figura 19.

Figura 19



14. Na Figura 20, A, B, C, D, E e F são vértices de um hexágono regular centrado na origem.

Figura 20



Expresse cada um dos seguintes vetores em termos de $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$:

(a) $\overrightarrow{AB}$ (b) $\overrightarrow{BC}$ (c) $\overrightarrow{AD}$

(d) $\overrightarrow{CF}$ (e) $\overrightarrow{AC}$

(f) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FA}$

Nos Exercícios 15 e 16, simplifique a expressão vetorial dada. Indique quais propriedades do Teorema 1 você usou.

15. $2(\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) + 3(2\mathbf{b} + \mathbf{a})$

16. $-3(\mathbf{a} - \mathbf{c}) + 2(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) + 3(\mathbf{c} - \mathbf{b})$

Nos Exercícios 17 e 18, encontre o vetor **x** *em termos dos vetores* **a** *e* **b**.

17. $\mathbf{x} - \mathbf{a} = 2(\mathbf{x} - 2\mathbf{a})$

18. $\mathbf{x} + 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = 3(\mathbf{x} + \mathbf{a}) - 2(2\mathbf{a} - \mathbf{b})$

Nos Exercícios 19 e 20, desenhe os eixos coordenados relativos a **u** *e* **v** *e localize* **w**.

19. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = 2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$

20. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = -\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$

Nos Exercícios 21 e 22, desenhe os eixos coordenados usuais no mesmo diagrama que os eixos relativos a **u** *e* **v**. *Use estes últimos para obter* **w** *como combinação linear de* **u** *e* **v**.

21. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

22. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \end{bmatrix}$

23. Desenhe diagramas para ilustrar as propriedades (d) e (e) do Teorema 1.

24. Escreva demonstrações algébricas das propriedades (d) a (g) do Teorema 1.

(b) Como $\mathbf{e}_3$ é um vetor unitário,

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{e}_3}(\mathbf{v}) = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v})\mathbf{e}_3 = 3\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(c) Temos que $\|\mathbf{u}\| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$. Então,

$$\operatorname{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{3(1+\sqrt{2})}{2}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{3(1+\sqrt{2})}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$ ◆

◆ EXERCÍCIOS 1.3 ◆

Nos Exercícios de 1 a 6, calcule $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

1. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **2.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ **4.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3{,}2 \\ -0{,}6 \\ -1{,}4 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 4{,}1 \\ -0{,}2 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{u} = [1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 0], \mathbf{v} = [4, -\sqrt{2}, 0, -5]$

6. $\mathbf{u} = [1{,}12, -3{,}25, 2{,}07, -1{,}83]$,
$\mathbf{v} = [-2{,}29, 1{,}72, 4{,}33, -1{,}54]$

Nos Exercícios de 7 a 12, determine a norma do vetor $\|\mathbf{u}\|$ *do exercício indicado e dê o versor de* $\mathbf{u}$.

7. Exercício 1 **8.** Exercício 2 **9.** Exercício 3
10. Exercício 4 **11.** Exercício 5 **12.** Exercício 6

Nos Exercícios de 13 a 16, encontre a distância $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *entre os vetores* **u** *e* **v** *do exercício indicado.*

13. Exercício 1 **14.** Exercício 2
15. Exercício 3 **16.** Exercício 4

17. Se **u**, **v** e **w** são vetores em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ e c é um escalar, explique por que as seguintes expressões não fazem sentido:

(a) $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}\|$ (b) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w}$
(c) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (d) $c \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$

Nos Exercícios de 18 a 21, determine se o ângulo entre **u** *e* **v** *é agudo, obtuso ou reto.*

18. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **19.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

20. $\mathbf{u} = [4, 3, -1], \mathbf{v} = [1, -1, 1]$

21. $\mathbf{u} = [0{,}9,\ 2{,}1,\ 1{,}2], \mathbf{v} = [-4{,}5,\ 2{,}6,\ -0{,}8]$

Nos Exercícios de 22 a 25, encontre o ângulo entre **u** *e* **v** *do exercício dado.*

22. Exercício 18 **23.** Exercício 19
24. Exercício 20 **25.** Exercício 21

26. Sejam $A = (-3, 2)$, $B = (1, 0)$ e $C = (4, 6)$. Prove que o triângulo ΔABC é um triângulo retângulo.

27. Sejam $A = (1, 1, -1)$, $B = (-3, 2, -2)$ e $C = (2, 2, -4)$. Prove que o triângulo ΔABC é um triângulo retângulo.

28. Determine o ângulo entre uma diagonal de um cubo e uma aresta adjacente.

29. Um cubo possui quatro diagonais. Mostre que não existem duas dessas diagonais que sejam perpendiculares entre si.

Nos Exercícios de 30 a 35, encontre a projeção de **v** *sobre* **u**. *Faça um esboço nos Exercícios 30 e 31.*

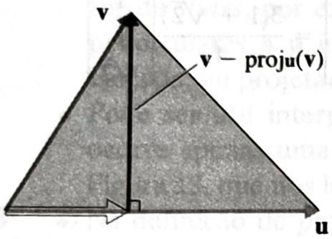
30. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ **31.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

32. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ **33.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

34. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 1{,}2 \end{bmatrix}$

35. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3{,}01 \\ -0{,}33 \\ 2{,}52 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1{,}34 \\ 4{,}25 \\ -1{,}66 \end{bmatrix}$

A Figura 15 sugere duas maneiras pelas quais os vetores podem ser usados para calcular a área de um triângulo. A área $\mathcal{A}$ do triângulo na parte (a) é dada por $\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})\|$, e a parte (b) sugere a forma trigonométrica da área de um triângulo: $\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\mathrm{sen}\,\theta$. (Podemos usar a identidade sen $\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$ para achar sen θ.) Nos Exercícios 36 e 37, calcule a área do triângulo de vértices dados, usando ambos os métodos.



(a)

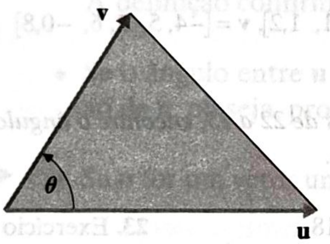


Figura 15 (b)

36. $A = (1, -1)$, $B = (2, 2)$, $C = (4, 0)$

37. $A = (3, -1, 4)$, $B = (4, -2, 6)$, $C = (5, 0, 2)$

Nos Exercícios 38 e 39, encontre todos os possíveis valores de k para os quais os dois vetores são ortogonais.

38. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k+1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ **39.** $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} k^2 \\ k \\ -3 \end{bmatrix}$

40. Descreva todos os vetores $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que são ortogonais a $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

41. Descreva todos os vetores $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que são ortogonais a $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

42. Sob que condições as seguintes igualdades são verdadeiras para vetores **u** e **v** em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$?

(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (b) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$

43. (a) Prove o Teorema 1(b). (b) Prove o Teorema 1(d).

44. Prove que $\mathbf{u} \cdot a\mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, para todos os vetores **u** e **v** em $\mathbb{R}^n$ e todos os números a.

45. Prove que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \geq \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$, para quaisquer vetores **u** e **v** em $\mathbb{R}^n$. (*Sugestão*: substitua **u** por $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ na Desigualdade Triangular.)

46. Suponha conhecido que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$. Pode-se concluir que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$? Em caso afirmativo, dê uma prova válida em $\mathbb{R}^n$; caso contrário, dê um contra-exemplo (isto é, um conjunto específico de vetores **u**, **v** e **w** para os quais $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ mas $\mathbf{v} \neq \mathbf{w}$).

47. Prove que $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores **u** e **v** em $\mathbb{R}^n$.

48. (a) Prove que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores **u** e **v** em $\mathbb{R}^n$.

(b) Desenhe um diagrama mostrando **u**, **v**, **u** + **v** e **u** − **v** em $\mathbb{R}^2$ e use a prova da parte (a) para deduzir uma propriedade sobre os paralelogramos.

49. Prove que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$, para quaisquer vetores **u** e **v** em $\mathbb{R}^n$.

50. (a) Prove que $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$ se, e somente se, **u** e **v** são ortogonais.

(b) Desenhe um diagrama mostrando **u**, **v**, **u** + **v** e **u** − **v** em $\mathbb{R}^2$ e use a prova da parte (a) para deduzir uma propriedade sobre os paralelogramos.

51. (a) Prove que **u** + **v** e **u** − **v** são ortogonais se, e somente se, $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$. (*Sugestão*: veja o Exercício 47.)

(b) Desenhe um diagrama mostrando **u**, **v**, **u** + **v** e **u** − **v** em $\mathbb{R}^2$ e use a prova da parte (a) para deduzir uma propriedade sobre os paralelogramos.

52. (a) Prove que, se **u** é ortogonal a **v** e a **w**, então **u** é ortogonal a **v** + **w**.

(b) Prove que, se **u** é ortogonal a **v** e a **w**, então **u** é ortogonal a $s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, para quaisquer números s e t.

53. Prove que **u** é ortogonal a $\mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$, para quaisquer vetores **u** e **v** em $\mathbb{R}^n$, com $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

54. (a) Prove que $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) = \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$.

(b) Prove que $\mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v} - \mathrm{proj}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})) = \mathbf{0}$.

(c) Explique geometricamente os resultados dos itens (a) e (b).

55. A Desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ é equivalente à desigualdade que obtemos ao elevarmos ao quadrado ambos os lados: $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$.

(a) Em $\mathbb{R}^2$, com $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, a desigualdade é escrita como

$$(u_1v_1 + u_2v_2)^2 \leq (u_1^2 + u_2^2)(v_1^2 + v_2^2)$$

Prove algebricamente essa desigualdade. (*Sugestão*: subtraia o lado esquerdo do lado direito e mostre que a diferença deve ser necessariamente não negativa.)

(b) Prove o análogo de (a) em $\mathbb{R}^3$.

◆ EXERCÍCIOS 1.4 ◆

Nos Exercícios 1 e 2, escreva uma equação (a) na forma normal e (b) na forma geral para a reta que passa por P e possui vetor normal **n**.

1. $P = (0, 0), \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ **2.** $P = (1, 2), \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 3 a 6, escreva equações (a) na forma normal e (b) na forma paramétrica para a reta que passa por P e tem vetor diretor **d**.

3. $P = (1, 0), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ **4.** $P = (-4, 4), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

5. $P = (0, 0, 0), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ **6.** $P = (3, 0, -2), \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 7 e 8, escreva equações (a) na forma normal e (b) na forma geral para o plano que passa por P e possui vetor normal **n**.

7. $P = (0, 1, 0), \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

8. $P = (-3, 5, 1), \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 9 e 10, escreva equações (a) na forma geral e (b) na forma paramétrica para o plano que passa por P e possui vetores diretores **u** *e* **v**.

9. $P = (0, 0, 0), \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

10. $P = (6, -4, -3), \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios 11 e 12, dê uma equação vetorial para a reta que passa por P e Q.

11. $P = (1, -2), Q = (3, 0)$

12. $P = (0, 1, -1), Q = (-2, 1, 3)$

Nos Exercícios 13 e 14, dê uma equação vetorial para o plano que passa pelos pontos P, Q e R.

13. $P = (1, 1, 1), Q = (4, 0, 2), R = (0, 1, -1)$

14. $P = (1, 0, 0), Q = (0, 1, 0), R = (0, 0, 1)$

15. Ache equações paramétricas e uma equação vetorial para as retas de $\mathbb{R}^2$ que possuem as seguintes equações:

(a) $y = 3x - 1$ (b) $3x + 2y = 5$

16. Considere a equação vetorial $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$, onde **p** e **q** correspondem a pontos distintos P e Q em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que essa equação descreve o segmento de reta $\overline{PQ}$ quando t varia de 0 a 1.

(b) Para que valores de t **x** é ponto médio de $\overline{PQ}$? Qual é esse **x**?

(c) Determine o ponto médio de $\overline{PQ}$ quando $P = (2, -3)$ e $Q = (0, 1)$.

(d) Determine o ponto médio de $\overline{PQ}$ quando $P = (1, 0, 1)$ e $Q = (4, 1, -2)$.

(e) Determine os dois pontos que dividem o segmento $\overline{PQ}$ da parte (c) em três partes iguais.

(f) Determine os dois pontos que dividem o segmento $\overline{PQ}$ da parte (d) em três partes iguais.

17. Indique uma "demonstração vetorial" do fato de que, em $\mathbb{R}^2$, duas retas com inclinações m_1 e m_2 são perpendiculares se, e somente se, $m_1 m_2 = -1$.

18. A reta r passa pelo ponto $P = (1, -1, 1)$ e tem vetor diretor $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Para cada um dos seguintes planos $\mathscr{P}$, determine se r e $\mathscr{P}$ são paralelos, perpendiculares ou nenhum desses dois:

(a) $2x + 3y - z = 1$ (b) $4x - y + 5z = 0$

(c) $x - y - z = 3$ (d) $4x + 6y - 2z = 0$

19. O plano $\mathscr{P}_1$ tem equação $4x - y + 5z = 2$. Para cada um dos planos $\mathscr{P}$ do Exercício 18, determine se $\mathscr{P}_1$ e $\mathscr{P}$ são paralelos, perpendiculares ou nenhum desses dois.

20. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa por $P = (2, -1)$ e é perpendicular à reta de equação geral $2x - 3y = 1$.

21. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^2$ que passa por $P = (2, -1)$ e é paralela à reta de equação geral $2x - 3y = 1$.

22. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa por $P = (-1, 0, 3)$ e é perpendicular ao plano de equação geral $x - 3y + 2z = 5$.

23. Determine uma equação vetorial para a reta de $\mathbb{R}^3$ que passa por $P = (-1, 0, 3)$ e é perpendicular à reta de equações paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 1 - t \\ y &= 2 + 3t \\ z &= -2 - t \end{aligned}$$

Não se iluda pensando que a tecnologia sempre lhe dará a resposta de modo mais rápido ou mais fácil do que fazendo os cálculos à mão. Às vezes ela pode não fornecer nenhuma resposta! Erros de arredondamento associados à aritmética de ponto flutuante usada por calculadoras e computadores podem causar sérios problemas e conduzir a respostas completamente erradas. Veja Investigação: Mentiras que meu Computador me Contou para ter uma idéia do problema. (Você foi avisado!)

◆ EXERCÍCIOS 2.2 ◆

Nos Exercícios de 1 a 6, determine quais equações são lineares nas variáveis x, y e z. Se alguma equação não for linear, explique o motivo.

1. $x - \pi y + \sqrt[3]{5}z = 0$ **2.** $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

3. $x^{-1} + 7y + z = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{9}\right)$

4. $2x - xy - 5z = 0$ **5.** $3\cos x - 4y + z = \sqrt{3}$

6. $(\cos 3)x - 4y + z = \sqrt{3}$

Nos Exercícios de 7 a 10, encontre uma equação linear que tenha o mesmo conjunto solução que a equação dada (possivelmente com alguma restrição nas variáveis).

7. $2x + y = 7 - 3y$ **8.** $\dfrac{x^2 - y^2}{x - y} = 1$

9. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{4}{xy}$ **10.** $\log_{10} x - \log_{10} y = 2$

Nos Exercícios de 11 a 14, encontre o conjunto solução de cada equação.

11. $3x - 6y = 0$ **12.** $2x_1 + 3x_2 = 5$

13. $x + 2y + 3z = 4$ **14.** $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

Nos Exercícios de 15 a 18, desenhe gráficos correspondentes aos sistemas lineares dados. Determine geometricamente se cada sistema tem uma única solução. Então resolva cada sistema algebricamente para confirmar sua resposta.

15. $\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ **16.** $\begin{aligned} x - 2y &= 7 \\ 3x + y &= 7 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 3x - 6y &= 3 \\ -x + 2y &= 1 \end{aligned}$ **18.** $\begin{aligned} 0{,}10x - 0{,}05y &= 0{,}20 \\ -0{,}06x + 0{,}03y &= -0{,}12 \end{aligned}$

Nos Exercícios de 19 a 24, resolva o sistema dado usando substituição.

19. $\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ y &= 3 \end{aligned}$ **20.** $\begin{aligned} 2u - 3v &= 5 \\ 2v &= 6 \end{aligned}$

21. $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ 2y - z &= 1 \\ 3z &= -1 \end{aligned}$ **22.** $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_3 &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned}$ **24.** $\begin{aligned} x - 3y + z &= 5 \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}$

Os sistemas dos Exercícios 25 e 26 exibem um padrão "triangular inferior" que torna fácil resolvê-los por substituição de frente para trás. (Encontraremos substituição de frente para trás de novo no Capítulo 3.) Resolva esses sistemas.

25. $\begin{aligned} x &= 2 \\ 2x + y &= -3 \\ -3x - 4y + z &= -10 \end{aligned}$ **26.** $\begin{aligned} x_1 &= -1 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 + x_2 &= 5 \\ \tfrac{3}{2}x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7 \end{aligned}$

Encontre as matrizes completas dos sistemas lineares dos Exercícios 27 a 30.

27. $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$ **28.** $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} x + 5y &= -1 \\ -x + y &= -5 \\ 2x + 4y &= 4 \end{aligned}$ **30.** $\begin{aligned} a - 2b + d &= 2 \\ -a + b - c - 3d &= 1 \end{aligned}$

Nos Exercícios 31 e 32, encontre um sistema de equações lineares que tenha a matriz dada como sua matriz completa.

31. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **32.** $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$

Nos Exercícios de 33 a 38, resolva os sistemas lineares dos exercícios indicados.

33. Exercício 27 **34.** Exercício 28

35. Exercício 29 **36.** Exercício 30

37. Exercício 31 **38.** Exercício 32

39. (a) Encontre um sistema de duas equações lineares nas variáveis x e y cujo conjunto solução seja dado pelas equações paramétricas $x = t$ e $y = 3 - 2t$.

◆ EXERCÍCIOS 2.3 ◆

Nos Exercícios de 1 a 8, determine se a matriz dada está na forma escalonada por linhas. Se estiver, indique se ela também está na forma escalonada reduzida.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 9 a 14, use operações elementares para reduzir a matriz dada às formas (a) escalonada por linhas e (b) escalonada reduzida.

9. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 6 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} -2 & -4 & 7 \\ -3 & -6 & 10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

15. Reverta as operações elementares com as linhas usadas no Exemplo 3 para mostrar que podemos converter

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & 10 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{bmatrix} \text{ em } \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & -4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

16. Em geral, qual é a operação elementar com linhas que desfaz cada uma das três operações elementares com linhas $L_i \leftrightarrow L_j$, kL_i e $L_i + kL_j$?

Nos Exercícios 17 e 18, mostre que as matrizes dadas são linha-equivalentes e encontre uma seqüência de operações elementares com as linhas que convertem A em B.

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

19. O que está errado com a seguinte demonstração de que toda matriz com pelo menos duas linhas é linha-equivalente a uma matriz com uma linha nula?

Efetue $L_2 + L_1$ e $L_1 + L_2$. Agora as linhas 1 e 2 são idênticas. Efetue agora $L_2 - L_1$ para obter uma linha de zeros na segunda linha.

20. Qual o efeito resultante ao efetuar as seguintes operações elementares sobre linhas em uma matriz (com pelo menos duas linhas)?

$$L_2 + L_1,\ L_1 - L_2,\ L_2 + L_1,\ -L_1$$

21. Qual é o posto de cada uma das matrizes dos Exercícios 1 a 8?

22. Quais são as possíveis formas escalonadas reduzidas de matrizes 3×3?

Nos Exercícios de 23 a 32, resolva o sistema de equações dado usando o método de eliminação de Gauss ou o método de eliminação de Gauss-Jordan.

23. $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 9 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ -x + 3y + z &= 5 \\ 3x + y + 7z &= 2 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 2w + 3x - y + 4z &= 0 \\ 3w - x + z &= 1 \\ 3w - 4x + y - z &= 2 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 2r + s &= 3 \\ 4r + s &= 7 \\ 2r + 5s &= -1 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 2x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= 2 \end{aligned}$

29. $$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 &= 2 \\ \tfrac{1}{6}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 - 3x_4 + x_5 &= -1 \\ \tfrac{1}{3}x_1 - 2x_3 - 4x_5 &= 8 \end{aligned}$$

30. $$\begin{aligned} \sqrt{2}x + y + 2z &= 1 \\ \sqrt{2}y - 3z &= -\sqrt{2} \\ -y + \sqrt{2}z &= 1 \end{aligned}$$

31. $$\begin{aligned} w + x + 2y + z &= 1 \\ w - x - y + z &= 0 \\ x + y &= -1 \\ w + x + z &= 2 \end{aligned}$$

32. $$\begin{aligned} a + b + c + d &= 4 \\ a + 2b + 3c + 4d &= 10 \\ a + 3b + 6c + 10d &= 20 \\ a + 4b + 10c + 20d &= 35 \end{aligned}$$

Nos Exercícios de 33 a 36, determine, sem efetuar nenhum cálculo, se um sistema linear com a matriz completa dada tem uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução. Justifique suas respostas.

33. $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ **34.** $\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -6 & 2 & 0 \end{array}\right]$

35. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 0 \end{array}\right]$ **36.** $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \end{array}\right]$

37. Mostre que, se $ad - bc \neq 0$, o sistema

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

tem uma única solução.

Nos Exercícios de 38 a 41, para que valor(es) de k, se houver, o sistema terá (a) nenhuma solução, (b) uma única solução e (c) infinitas soluções?

38. $$\begin{aligned} kx + 2y &= 3 \\ 2x - 4y &= -6 \end{aligned}$$

39. $$\begin{aligned} x + ky &= 1 \\ kx + y &= 1 \end{aligned}$$

40. $$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 2 \\ x + y + z &= k \\ 2x - y + 4z &= k^2 \end{aligned}$$

41. $$\begin{aligned} x + y + kz &= 1 \\ x + ky + z &= 1 \\ kx + y + z &= -2 \end{aligned}$$

42. Dê exemplos de sistemas homogêneos com m equações lineares em n variáveis, com $m = n$ e com $m > n$, que tenham (a) infinitas soluções e (b) uma única solução.

Nos Exercícios 43 e 44, encontre a reta interseção de cada par de planos dados.

43. $3x + 2y + z = -1$ e $2x - y + 4z = 5$

44. $4x + y - z = 0$ e $2x - y + 3z = 4$

45. (a) Dê um exemplo de três planos cuja interseção seja uma reta (Figura 3).

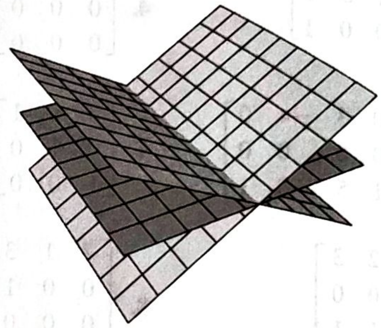


Figura 3

(b) Dê um exemplo de três planos que não tenham nenhum ponto em comum, mas se interceptem dois a dois (Figura 4).

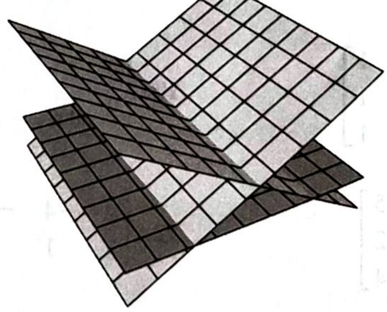


Figura 4

(c) Dê um exemplo de três planos, de modo que exatamente dois deles sejam paralelos (Figura 5).

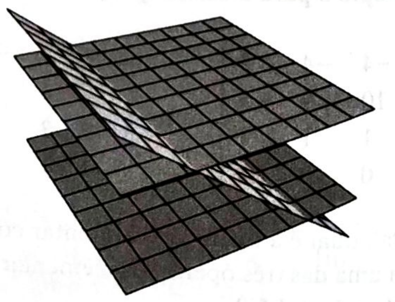


Figura 5

(d) Dê um exemplo de três planos que se interceptem em um único ponto (Figura 6).

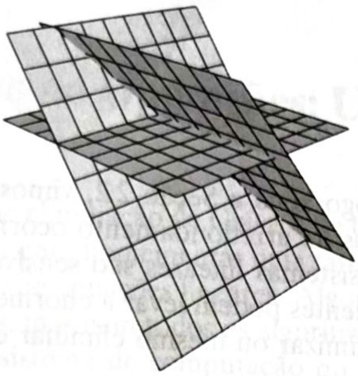


Figura 6

Nos Exercícios 46 e 47, determine se as retas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ *se interceptam e, nesse caso, encontre o ponto de interseção.*

46. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

47. $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

48. Sejam $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Descreva todos os pontos $Q = (a, b, c)$ tais que a reta que passa por Q e tem a direção do vetor $\mathbf{v}$ intercepte a reta de equação $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$.

49. Lembre-se de que o produto vetorial dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é um vetor $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ ortogonal a ambos os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. (Veja Investigação: O Produto Vetorial, no Capítulo 1.) Se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

mostre que existem infinitos vetores

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

que satisfazem $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0$ simultaneamente e que são múltiplos de $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$

50. Sejam $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$. Mostre que as retas $\mathbf{x} = \mathbf{p} + s\mathbf{u}$ e $\mathbf{x} = \mathbf{q} + t\mathbf{v}$ são reversas. Encontre equações vetoriais de um par de planos paralelos, de modo que cada um deles contenha uma das retas.

Nos Exercícios de 51 a 56, resolva o sistema de equações lineares sobre o corpo $\mathbb{Z}_p$ *indicado.*

51. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

52. $\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x \phantom{{}+y} + z &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_2$

53. $\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} &= 1 \\ y + z &= 0 \\ x \phantom{{}+y} + z &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

54. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

55. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ x + 4y &= 1 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_7$

56. $\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+2x_2+4x_3} + 4x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \phantom{{}+x_4} &= 3 \\ 2x_1 + 2x_2 \phantom{{}+4x_3} + x_4 &= 1 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} + 3x_3 \phantom{{}+x_4} &= 2 \end{aligned}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

57. Prove o seguinte corolário do Teorema do Posto: seja A uma matriz $m \times n$ com elementos em $\mathbb{Z}_p$. Qualquer sistema de equações lineares possível, com matriz dos coeficientes igual a A, tem exatamente $p^{n-\text{posto}(A)}$ soluções sobre $\mathbb{Z}_p$.

58. Quando p não é primo, um cuidado extra é necessário ao resolvermos um sistema linear (ou, na verdade, qualquer equação) sobre $\mathbb{Z}_p$. Usando o método de eliminação de Gauss, resolva o seguinte sistema sobre $\mathbb{Z}_6$. Qual complicação surge?

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 4 \\ 4x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO: Assuma que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ sejam linearmente dependentes. Então, pelo Teorema 2 da Seção 2.3, pelo menos um dos vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais. Se necessário, reindexamos os vetores de modo que possamos escrever $\mathbf{v}_m = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_{m-1}\mathbf{v}_{m-1}$. Então, as operações elementares com as linhas, $L_m - c_1L_1, L_m - c_2L_2, \ldots, L_m - c_{m-1}L_{m-1}$, aplicadas à matriz A, criarão uma linha nula na linha m. Logo, posto$(A) < m$.

Reciprocamente, assuma que posto$(A) < m$. Existe então uma seqüência de operações com linhas que irá criar uma linha nula. Um argumento de substituição sucessiva, análogo ao usado no Exemplo 8, pode ser usado para mostrar que $\mathbf{0}$ é uma combinação linear não trivial de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. Assim, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes. ◆

Em algumas situações, podemos deduzir sem nenhum trabalho que um conjunto de vetores é linearmente dependente. Essa situação ocorre, por exemplo, quando o vetor nulo pertence ao conjunto (como no Exemplo 5). Outro exemplo é quando há "vetores demais" para serem independentes. O teorema a seguir resume esse caso. (Veremos uma versão mais aguçada desse resultado no Capítulo 6.)

◆ TEOREMA 5

Qualquer conjunto de m vetores em $\mathbb{R}^n$ é linearmente dependente se $m > n$.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vetores (coluna) em $\mathbb{R}^n$ e A a matriz $n \times m$ $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m]$ com esses vetores como suas colunas. Pelo Teorema 3, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes se, e somente se, o sistema linear homogêneo de matriz completa $[A \mid \mathbf{0}]$ tiver solução não trivial. Mas, de acordo com o Teorema 3 da Seção 2.3, esse será sempre o caso se A tiver mais colunas do que linhas; é esse o caso aqui, já que o número de colunas m é maior que o número de linhas n. ◆

EXEMPLO 9 Os vetores $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$ são linearmente dependentes, pois não pode haver mais do que dois vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$. (Note que, se quisermos encontrar a relação de dependência entre esses três vetores, devemos resolver o sistema linear homogêneo cuja matriz dos coeficientes tem os vetores dados como colunas. Faça isso!) ◆

◆ EXERCÍCIOS 2.4 ◆

Nos Exercícios de 1 a 6, determine se o vetor $\mathbf{v}$ *é uma combinação linear dos demais vetores.*

1. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

2. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$

3. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

4. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3\\2\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

5. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

6. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}3{,}2\\2{,}0\\-2{,}6\end{bmatrix}, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix}1{,}0\\0{,}4\\4{,}8\end{bmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix}3{,}4\\1{,}4\\-6{,}4\end{bmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix}-1{,}2\\0{,}2\\-1{,}0\end{bmatrix}$

Nos Exercícios 7 e 8, determine se o vetor $\mathbf{b}$ *pertence ao conjunto gerado pelas colunas da matriz* A.

7. $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$

9. Mostre que $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

10. Mostre que $\mathbb{R}^2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

11. Mostre que $\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

12. Mostre que $\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

Nos Exercícios de 13 a 16, descreva o conjunto gerado pelos vetores dados (a) geometricamente e (b) algebricamente.

13. $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

17. A equação geral do plano que contém os pontos (1, 0, 3), (−1, 1, −3) e a origem é da forma $ax + by + cz = 0$. Ache a, b e c.

18. Prove que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ estão todos em ger($\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$).

19. Prove que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, e $\mathbf{w}$ estão todos em ger($\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}$).

20. (a) Prove que, se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ e $T = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, então ger($S$) $\subseteq$ ger(T). (*Sugestão:* refraseie esta questão em termos de combinações lineares.)

(b) Deduza que, se $\mathbb{R}^n$ = ger(S), então $\mathbb{R}^n$ = ger(T) também.

21. (a) Suponha que o vetor $\mathbf{w}$ seja uma combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$, e que cada $\mathbf{u}_i$ seja uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$. Prove que $\mathbf{w}$ é uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ e, portanto, ger($\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$) $\subseteq$ ger($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$).

(b) Na parte (a), suponha também que cada $\mathbf{v}_j$ seja combinação linear de $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$. Prove que ger($\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$) = ger($\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$).

(c) Use o resultado da parte (b) para provar que

$$\mathbb{R}^3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$$

[*Sugestão:* sabemos que $\mathbb{R}^3$ = ger($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$).]

Use o método do Exemplo 6 e o Teorema 3 para determinar se os conjuntos de vetores nos Exercícios de 22 a 31 são linearmente independentes. Se, para algum deles, a resposta puder ser determinada por inspeção (isto é, sem contas), diga por quê. Para os conjuntos linearmente dependentes, encontre uma relação de dependência entre os vetores.

22. $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

27. $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 32 a 41, determine se os conjuntos de vetores no exercício dado são linearmente independentes, convertendo os vetores em vetores-linha e usando o método do Exemplo 8 e o Teorema 4. Para os conjuntos linearmente dependentes, encontre uma relação de dependência entre os vetores.

32. Exercício 22

33. Exercício 23

34. Exercício 24

35. Exercício 25

36. Exercício 26

37. Exercício 27

38. Exercício 28

39. Exercício 29

40. Exercício 30

41. Exercício 31

42. (a) Qual será o posto de uma matriz $n \times n$ se suas colunas, vistas como vetores em $\mathbb{R}^n$, forem linearmente independentes? Explique.

(b) Qual será o posto de uma matriz $n \times n$ se suas linhas, vistas como vetores em $\mathbb{R}^n$, forem linearmente independentes? Explique.

43. (a) Se os vetores **u**, **v** e **w** forem linearmente independentes, serão os vetores **u** + **v**, **v** + **w** e **u** + **w** também linearmente independentes? Justifique sua resposta.

(b) Se os vetores **u**, **v** e **w** forem linearmente independentes, serão os vetores **u** − **v**, **v** − **w** e **u** − **w** também linearmente independentes? Justifique sua resposta.

44. Prove que dois vetores são linearmente dependentes se, e somente se, um deles for um múltiplo do outro. (*Sugestão*: considere separadamente o caso em que um dos vetores é **0**.)

45. Dê uma "demonstração vetor-linha" para o Teorema 5.

46. Demonstre que todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente.

47. Suponha que $S = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}\}$ seja um conjunto de vetores em algum $\mathbb{R}^n$ e que **v** seja uma combinação linear de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. Se $S' = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, mostre que ger($S$) = ger($S'$). [*Sugestão*: o Exercício 21(b) é útil aqui.]

2.5 Aplicações

Há uma quantidade muito grande de aplicações de sistemas de equações lineares para que se possa fazer justiça a elas em uma única seção. Esta seção introduzirá algumas poucas aplicações, com o objetivo de ilustrar diversas situações em que elas surgem.

Alocação de Recursos

Uma grande quantidade de aplicações dos sistemas de equações lineares envolve a alocação de recursos limitados sujeitos a um conjunto de restrições.

EXEMPLO 1 Um biólogo colocou três espécies de bactéria (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A, B e C). A cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 2.300 unidades de A, 800 unidades de B e 1.500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a Tabela 1. Quantas bactérias de cada espécie podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento?

Tabela 1

	Bactéria da Espécie I	Bactéria da Espécie II	Bactéria da Espécie III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

SOLUÇÃO: Sejam x_1, x_2 e x_3 os números de bactérias das espécies I, II e III, respectivamente. Como cada uma das x_1 bactérias da espécie I consome duas unidades de A por dia, o grupo I consome um total de $2x_1$ unidades por dia. Analogamente, os grupos II e III consomem um total de $2x_2$ e $4x_3$ unidades do alimento A diariamente. Como queremos usar todas as 2.300 unidades de A, temos a equação

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2.300$$

Uma definição de matriz simétrica elemento a elemento também é útil. Ela é simplesmente a descrição algébrica da propriedade da "reflexão".

Uma matriz quadrada A é simétrica se, e somente se, $A_{ij} = A_{ji}$ para todos i e j.

◆ EXERCÍCIOS 3.2 ◆

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, E = [4 \ \ 2], F = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Nos Exercícios de 1 a 16, calcule a matriz indicada (se possível).

1. $A + 2D$ **2.** $3D - 2A$
3. $B - C$ **4.** $B - C^T$
5. AB **6.** BD
7. $D + BC$ **8.** B^TB
9. $E(AF)$ **10.** $F(DF)$
11. FE **12.** EF
13. $B^TC^T - (CB)^T$ **14.** $DA - AD$
15. A^3 **16.** $(I_2 - D)^2$

17. Dê um exemplo de uma matriz A 2×2 não nula tal que $A^2 = O$.

18. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$. Encontre as matrizes 2×2 B e C tais que $AB = AC$, mas $B \neq C$.

19. Uma fábrica produz três produtos (banheiras, pias e tanques) e os envia para armazenamento em dois depósitos. O número de unidades enviadas de cada produto para cada depósito é dado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 75 \\ 150 & 100 \\ 100 & 125 \end{bmatrix}$$

(em que a_{ij} é o número de unidades enviadas do produto i para o depósito j, e os produtos são colocados em ordem alfabética). O custo de remessa de uma unidade de cada produto, por caminhão, é: \$ 1,50 por banheira, \$ 1,00 por pia e \$ 2,00 por tanque. Os custos unitários correspondentes ao envio por trem são: \$ 1,75, \$ 1,50 e \$ 1,00. Organize esses custos em uma matriz B e use essa matriz para mostrar como a fábrica pode comparar os custos de remessa — por caminhão e por trem — de seus produtos para cada um dos dois depósitos.

20. Em relação ao Exercício 19, suponha que o custo unitário de distribuição dos produtos para as lojas seja o mesmo para todos os produtos, mas que varie dependendo do depósito por causa das distâncias envolvidas. Custa \$ 0,75 para distribuir uma unidade do depósito 1 e \$ 1,00 para distribuir uma unidade do depósito 2. Organize esses custos em uma matriz C e use multiplicação de matrizes para calcular o custo total de distribuição de cada produto.

Nos Exercícios 21 e 22, escreva o sistema de equações lineares dado na forma de equação matricial, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

21. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 4 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} -x_1 \qquad + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 \qquad &= -2 \\ x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Nos Exercícios de 23 a 28, sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e $$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

23. Use a representação matriz-coluna do produto para escrever cada coluna de AB como combinação linear das colunas de A.

24. Use a representação matriz-linha do produto para escrever cada linha de AB como combinação linear das linhas de B.

25. Calcule o produto externo da expansão de AB.

26. Use a representação matriz-coluna do produto para escrever cada coluna de BA como combinação linear das colunas de B.

27. Use a representação matriz-linha do produto para escrever cada linha de BA como combinação linear das linhas de A.

28. Calcule o produto externo da expansão de BA.

Nos Exercícios 29 e 30, assuma que o produto AB faz sentido.

29. Prove que, se as colunas de B são linearmente independentes, as colunas de AB também o são.

30. Prove que, se as linhas de A são linearmente independentes, as linhas de AB também o são.

Nos Exercícios de 31 a 34, calcule AB usando multiplicação por blocos com a partição indicada.

31. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

32. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{array}\right]$

33. $A = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

34. $A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$

35. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $A^2, A^3, \ldots, A^7$.

(b) O que é A^{2001}? Por quê?

36. Seja $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Encontre B^{2001}. Justifique

37. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre uma fórmula para A^n (n
e prove a sua fórmula usando indução matemática.

38. Seja $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $A^2 = A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\text{sen}\,2\theta \\ \text{sen}\,2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$.

(b) Prove, usando indução matemática, que $A^n =$

$\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\text{sen}\,n\theta \\ \text{sen}\,n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ para $n \geq 1$.

39. Em cada um dos itens a seguir, ache a matriz 4×4 A
$[a_{ij}]$ que satisfaz a condição dada:

(a) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ (b) $a_{ij} = j - i$

(c) $a_{ij} = (i-1)^j$ (d) $a_{ij} = \text{sen}\left(\frac{(i+j-1)\pi}{4}\right)$

40. Em cada um dos itens a seguir, ache a matriz 6×6 A
$[a_{ij}]$ que satisfaz a condição dada:

(a) $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{se } i \leq j \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$ (b) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i-j| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |i-j| > 1 \end{cases}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } 6 \leq i+j \leq 8 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$

41. Prove o Teorema 1(a).

3.3 A Álgebra de Matrizes

Em certos aspectos, a aritmética das matrizes generaliza a aritmética dos vetores. Não esperamos surpresas com respeito à adição e à multiplicação por escalar de matrizes, e de fato elas não existem. Isso nos permitirá estender para matrizes vários conceitos com os quais já temos familiaridade, pelo nosso trabalho com os vetores. Em particular, combinações lineares, conjuntos geradores e independência linear serão definidos sem nenhuma dificuldade para matrizes.

Matrizes, entretanto, admitem outras operações — a multiplicação, por exemplo — que vetores não têm. Não devemos esperar que a multiplicação de matrizes se comporte como a multiplicação dos números reais a menos que possamos provar isso; de fato, ela não se comporta como tal. Nesta seção, resumimos e provamos algumas das propriedades principais das operações com matrizes e começamos a desenvolver uma álgebra de matrizes.

28. Calcule o produto externo da expansão de BA.

Nos Exercícios 29 e 30, assuma que o produto AB faz sentido.

29. Prove que, se as colunas de B são linearmente independentes, as colunas de AB também o são.

30. Prove que, se as linhas de A são linearmente independentes, as linhas de AB também o são.

Nos Exercícios de 31 a 34, calcule AB usando multiplicação por blocos com a partição indicada.

31. $A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cc:c} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

32. $A = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{c:cc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 5 & 4 \\ -2 & 3 & 2 \end{array}\right]$

33. $A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

34. $A = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$, $B = \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$

35. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule $A^2, A^3, \ldots, A^7$.

(b) O que é A^{2001}? Por quê?

36. Seja $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. Encontre B^{2001}. Justifique.

37. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre uma fórmula para A^n $(n \geq 1)$ e prove a sua fórmula usando indução matemática.

38. Seja $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que $A^2 = A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\operatorname{sen} 2\theta \\ \operatorname{sen} 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$.

(b) Prove, usando indução matemática, que $A^n =$

$\begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$ para $n \geq 1$.

39. Em cada um dos itens a seguir, ache a matriz 4×4 $A = [a_{ij}]$ que satisfaz a condição dada:

(a) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ (b) $a_{ij} = j - i$

(c) $a_{ij} = (i-1)^j$ (d) $a_{ij} = \operatorname{sen}\left(\dfrac{(i+j-1)\pi}{4}\right)$

40. Em cada um dos itens a seguir, ache a matriz 6×6 $A = [a_{ij}]$ que satisfaz a condição dada:

(a) $a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{se } i \leq j \\ 0 & \text{se } i > j \end{cases}$ (b) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } |i-j| \leq 1 \\ 0 & \text{se } |i-j| > 1 \end{cases}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } 6 \leq i + j \leq 8 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases}$

41. Prove o Teorema 1(a).

3.3 A Álgebra de Matrizes

Em certos aspectos, a aritmética das matrizes generaliza a aritmética dos vetores. Não esperamos surpresas com respeito à adição e à multiplicação por escalar de matrizes, e de fato elas não existem. Isso nos permitirá estender para matrizes vários conceitos com os quais já temos familiaridade, pelo nosso trabalho com os vetores. Em particular, combinações lineares, conjuntos geradores e independência linear serão definidos sem nenhuma dificuldade para matrizes.

Matrizes, entretanto, admitem outras operações — a multiplicação, por exemplo — que vetores não têm. Não devemos esperar que a multiplicação de matrizes se comporte como a multiplicação dos números reais, a menos que possamos provar isso; de fato, ela não se comporta como tal. Nesta seção, resumimos e provamos algumas das propriedades principais das operações com matrizes e começamos a desenvolver uma álgebra de matrizes.

assim,

$$BB^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 5 \\ 5 & 14 \end{bmatrix}$$

e

$$B^TB = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, BB^T e B^TB são simétricas, embora B nem mesmo seja quadrada! (Verifique que AA^T e A^TA são também simétricas.) ◆

O próximo teorema diz que os resultados do Exemplo 6 são em geral verdadeiros.

◆ TEOREMA 4

a. Se A é uma matriz quadrada, então $A + A^T$ é uma matriz simétrica.
b. Para toda matriz A, AA^T e A^TA são matrizes simétricas.

DEMONSTRAÇÃO: Provamos (a) e deixamos para provar (b) no Exercício 34. Simplesmente observamos que

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T$$

(usando propriedades da transposta e a comutativa da adição de matrizes). Assim, $A + A^T$ é igual à sua transposta, por isso, por definição, é simétrica. ◆

◆ EXERCÍCIOS 3.3◆

Nos Exercícios de 1 a 4, ache X, dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. $X - 2A + 3B = O$
2. $2X = A - B$
3. $2(A + 2B) = 3X$
4. $2(A - B + X) = 3(X - A)$

Nos Exercícios de 5 a 8, escreva B como combinação linear das outras matrizes, se possível.

5. $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

6. $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. $B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 9 a 12, encontre a expressão geral do conjunto gerado pelas matrizes dadas, como no Exemplo 2.

9. ger(A_1, A_2) do Exercício 5

10. ger(A_1, A_2, A_3) do Exercício 6

11. ger(A_1, A_2, A_3) do Exercício 7

12. ger(A_1, A_2, A_3, A_4) do Exercício 8

Nos Exercícios de 13 a 16, determine se as matrizes dadas são linearmente independentes.

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix},$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

17. Prove o Teorema 1(a) – (d).

18. Prove o Teorema 1(e) – (h).

19. Prove o Teorema 2(c).

20. Prove o Teorema 2(d).

21. Prove a parte do Teorema 2(e) que não foi provada no texto.

22. Prove que, para matrizes quadradas A e B, $AB = BA$ se, e somente se, $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

Nos Exercícios de 23 a 25, se $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$*, encontre condições em a, b, c e d para que AB = BA.*

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **24.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

26. Encontre condições em *a, b, c* e *d* para que $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comute com $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

27. Encontre condições em *a, b, c* e *d* para que $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ comute com todas as matrizes 2×2.

28. Prove que, se AB e BA estiverem definidas, AB e BA são matrizes quadradas.

Uma matriz quadrada é chamada de ***triangular superior*** *quando todos os elementos abaixo da diagonal principal são zeros. Assim, a forma de uma matriz triangular superior é*

$$\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{bmatrix}$$

*em que os elementos marcadas por * são arbitrários. Uma definição mais formal dessa matriz* $A = [a_{ij}]$ *é que* $a_{ij} = 0$ *se* $i > j$.

29. Prove que o produto de duas matrizes triangulares superiores $n\times n$ é uma matriz triangular superior.

30. Prove o Teorema 3(a) – (c).

31. Prove o Teorema 3(e).

32. Usando indução, prove que $(A_1 + A_2 + \cdots + A_n)^T = A_1^T + A_2^T + \cdots + A_n^T$ para todo $n \geq 1$.

33. Usando indução, prove que $(A_1 A_2 \cdots A_n)^T = A_n^T \cdots A_2^T A_n^T$ para todo $n \geq 1$.

34. Prove o Teorema 4(b).

35. (a) Prove que, se A e B são matrizes $n\times n$ simétricas, $A + B$ também é.

(b) Prove que, se A é uma matriz $n\times n$ simétrica, kA também é para todo escalar k.

36. (a) Dê um exemplo para mostrar que, se A e B são matrizes $n\times n$ simétricas, AB não é necessariamente simétrica.

(b) Prove que, se A e B são matrizes $n\times n$ simétricas, AB é simétrica se, e somente se, $AB = BA$.

Uma matriz quadrada é chamada de ***anti-simétrica*** *se* $A^T = -A$.

37. Quais das seguintes matrizes são anti-simétricas?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

38. Dê uma definição de matriz anti-simétrica elemento a elemento.

39. Prove que a diagonal principal de uma matriz anti-simétrica é formada inteiramente por zeros.

40. Prove que, se A e B são matrizes $n\times n$ anti-simétricas, $A + B$ também é.

41. Se A e B são matrizes 2×2 anti-simétricas, sob que condições AB é anti-simétrica?

42. Prove que, se A é uma matriz $n\times n$, $A - A^T$ é anti-simétrica.

43. (a) Prove que toda matriz quadrada A pode ser escrita como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica. (*Sugestão:* use o Teorema 4 e o Exercício 42).

(b) Ilustre o item usando a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

O traço de uma matriz $n \times n$ $A = [a_{ij}]$ é a soma dos elementos da sua diagonal principal e é denotado por tr(A):

$$\text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

44. Se A e B são matrizes $n \times n$, prove as seguintes propriedades do traço:

(a) $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$

(b) $\text{tr}(kA) = k\text{tr}(A)$, em que k é um escalar

45. Prove que, se A e B são matrizes $n \times n$, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

46. Se A é uma matriz qualquer, o que é $\text{tr}(AA^T)$?

47. Mostre que não existem matrizes 2×2 A e B tais que $AB - BA = I_2$.

3.4 A Inversa de uma Matriz

Nesta seção, retornamos para a descrição matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de um sistema de equações lineares e apresentamos meios de usar a álgebra das matrizes para resolver o sistema. Para fazer uma analogia, considere a equação $ax = b$, em que a, b e x representam números reais e queremos resolver a equação em x. Rapidamente, vemos que $x = b/a$ é a solução, mas precisamos nos lembrar de que isso só é verdade se $a \neq 0$. Calculando mais lentamente, assumindo que $a \neq 0$, acharemos a solução nesta seqüência de passos:

$$ax = b \Rightarrow \frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b) \Rightarrow \left(\frac{1}{a}(a)\right)x = \frac{b}{a} \Rightarrow 1 \cdot x = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

(Esse exemplo mostra quanto nossa cabeça faz e quantas propriedades da aritmética e da álgebra assumimos!)

Para imitar esse procedimento para a equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, do que precisamos? Precisamos encontrar uma matriz A' (a análoga a $1/a$) tal que $A'A = I$, a matriz identidade (análoga a 1). Se tal matriz existir (analogamente à imposição que $a \neq 0$), então podemos fazer a seqüência de cálculos:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow A'(A\mathbf{x}) = A\mathbf{b} \Rightarrow (A'A)\,\mathbf{x} = A\mathbf{b} \Rightarrow I\mathbf{x} = A'\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A'\mathbf{b}$$

(Como se justifica cada um desses passos?)

Nosso objetivo, nesta seção, é determinar precisamente quando podemos achar a matriz A'. Vamos insistir um pouco mais: não queremos somente que $A'A = I$, mas queremos também que $AA' = I$. Essa imposição força A e A' a serem matrizes quadradas. (Por quê?)

Definição Se A é uma matriz $n \times n$, uma ***inversa*** de A é uma matriz $n \times n$ A' que satisfaz a seguinte propriedade:

$$AA' = I \text{ e } A'A = I$$

em que $I = I_n$ é a matriz identidade $n \times n$. Se essa matriz A' existir, A será chamada de ***invertível***.

EXEMPLO 1 Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, então $A' = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ é a inversa de A, pois

$$AA' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A'A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ◆

SOLUÇÃO 1: Usamos o método de Gauss-Jordan, lembrando que os cálculos são feitos em $\mathbb{Z}_3$.

$$[A|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2+L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1+2L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Portanto, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, e é fácil verificar que, em $\mathbb{Z}_3$, $AA^{-1} = I$.

SOLUÇÃO 2: Como A é uma matriz 2×2, podemos calcular a sua inversa usando a fórmula dada no Teorema 3. O determinante de A é

$$\det A = 2(0) - 2(2) = -1 = 2$$

em $\mathbb{Z}_3$ (pois $2 + 1 = 0$). Portanto, A^{-1} existe e é dada pela fórmula do Teorema 3. Devemos ser cuidadosos aqui, já que a fórmula introduz a "fração" $1/\det A$, e não há frações em $\mathbb{Z}_3$. Precisamos usar inversos multiplicativos.

No lugar de $1/\det A = \frac{1}{2}$, usamos 2^{-1} — isto é, achamos um número x em $\mathbb{Z}_3$ que satisfaz a equação $2x = 1$. É fácil ver que $x = 2$ é a solução que queremos: em $\mathbb{Z}_3$, $2^{-1} = 2$, pois $2(2) = 1$. A fórmula para A^{-1} é

$$A^{-1} = 2^{-1}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

que concorda com a nossa primeira solução. ◆

◆ EXERCÍCIOS 3.4 ◆

Nos Exercícios de 1 a 10, ache a inversa da matriz dada (se ela existir) usando o Teorema 3.

1. $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{5} \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -1{,}5 & -4{,}2 \\ 0{,}5 & 2{,}4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2{,}54 & 8{,}128 \\ 0{,}25 & 0{,}8 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1/a & 1/b \\ 1/c & 1/d \end{bmatrix}$, em que a, b, c e d não são 0.

Nos Exercícios 11 e 12, resolva os sistemas dados usando o método do Exemplo 4.

11. $2x + y = -1$
$5x + 3y = 2$

12. $x_1 - x_2 = 1$
$2x_1 + x_2 = 2$

13. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre A^{-1} e use-a para resolver os três sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$.

(b) Resolva todos os três sistemas simultaneamente reduzindo por linhas a matriz completa $[A \mid \mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{b}_3]$, por meio do escalonamento de Gauss-Jordan.

(c) Conte cuidadosamente o número total de multiplicações individuais que você efetuou em (a) e em (b). Você deve descobrir que, mesmo para esse exemplo 2×2, um método usa menos operações. Para sistemas maiores, a diferença é ainda mais acentuada, e isso explica por que sistemas computacionais não usam um desses métodos para resolver sistemas lineares.

14. Prove o Teorema 4(b).

15. Prove o Teorema 4(d).

16. Prove que a matriz identidade I_n $n\times n$ é invertível e que $I_n^{-1} = I_n$.

17. (a) Dê um contra-exemplo para mostrar que, em geral, $(AB)^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$.

(b) Sob que condições em A e B é verdade que $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$? Prove sua resposta.

18. Por indução, prove que, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são matrizes invertíveis do mesmo tamanho, o produto $A_1A_2\cdots A_n$ é invertível e $(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

19. Dê um contra-exemplo para mostrar que, em geral, $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

Nos Exercícios de 20 a 23, resolva a equação matriz para X. Simplifique suas respostas tanto quanto possível. (Nas palavras de Albert Einstein, "Tudo deve ser feito tão simples quanto possível, mas não mais simples".) Assuma que todas as matrizes são invertíveis.

20. $XA^2 = A^{-1}$ **21.** $AXB = (BA)^2$

22. $(A^{-1}X)^{-1} = A(B^{-2}A)^{-1}$

23. $ABXA^{-1}B^{-1} = I + A$

Nos Exercícios de 24 a 30, sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Em cada caso, encontre a matriz elementar E que satisfaça a equação dada.

24. $EA = B$ **25.** $EB = A$ **26.** $EA = C$

27. $EC = A$ **28.** $EC = D$ **29.** $ED = C$

30. Existe uma matriz elementar E tal que $EA = D$? Por quê?

Nos Exercícios de 31 a 38, encontre a inversa da matriz elementar dada.

31. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c \neq 0$ **38.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, c \neq 0$

Nos Exercícios 39 e 40, encontre a seqüência de matrizes elementares $E_1, E_2, \ldots, E_k$ tais que $E_k \cdots E_2E_1A = I$. Use essa seqüência para escrever A e A^{-1} como produtos de matrizes elementares.

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ **40.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

41. Prove o Teorema 8 para o caso de $AB = I$.

42. (a) Prove que, se A é invertível e $AB = O$, então $B = O$.
(b) Dê um contra-exemplo para mostrar que o resultado da parte (a) pode falhar se A não for invertível.

43. (a) Prove que, se A é invertível e $BA = CA$, então $B = C$.
(b) Dê um contra-exemplo para mostrar que o resultado da parte (a) pode falhar se A não for invertível.

44. A matriz quadrada A é chamada ***idempotente*** se $A^2 = A$. (A palavra *idempotente* vem do Latim *idem*, que significa "mesmo", e *potere*, que significa "ter potência". Assim, algo que é idempotente tem a "mesma potência" quando elevado ao quadrado.)

(a) Ache três matrizes 2×2 idempotentes.

(b) Prove que a única matriz $n\times n$ idempotente invertível é a matriz identidade.

45. Mostre que, se A é uma matriz quadrada que satisfaz a equação $A^2 - 2A + I = O$, então $A^{-1} = 2I - A$.

46. Prove que, se uma matriz simétrica é invertível, sua inversa também é simétrica.

47. Prove que, se A e B são matrizes quadradas e AB é invertível, A e B são invertíveis.

Nos Exercícios de 48 a 63, use o método de Gauss-Jordan para achar a inversa da matriz dada (se existir).

48. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ **49.** $\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

50. $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ **51.** $\begin{bmatrix} 1 & a \\ -a & 1 \end{bmatrix}$

52. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ **53.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

54. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$

56. $\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{bmatrix}$ **57.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

58. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ -4\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$ **60.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_2$

61. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_5$ **62.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

63. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_7$

Decompor matrizes quadradas grandes pode às vezes tornar suas inversas mais fáceis de se calcular, particularmente se os blocos tiverem uma forma adequada. Nos Exercícios de 64 a 68, verifique, por multiplicação por blocos, que a inversa de uma matriz, decomposta como apresentado, resulta na matriz dada. (Assuma que todas as inversas existem, quando necessário.)

64. $\begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$

65. $\begin{bmatrix} O & B \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -(BC)^{-1} & (BC)^{-1}B \\ C(BC)^{-1} & I - C(BC)^{-1}B \end{bmatrix}$

66. $\begin{bmatrix} I & B \\ C & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (I - BC)^{-1} & -(I - BC)^{-1}B \\ -C(I - BC)^{-1} & I + C(I - BC)^{-1}B \end{bmatrix}$

67. $\begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}$

$= \begin{bmatrix} -(BD^{-1}C)^{-1} & (BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ D^{-1}C(BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} - D^{-1}C(BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$

68. $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}$, em que $P = (A - BD^{-1}C)^{-1}$, $Q = -PBD^{-1}$, $R = -D^{-1}CP$ e $S = D^{-1} + D^{-1}CPBD^{-1}$

Nos Exercícios de 69 a 72, divida as matrizes dadas de modo que você possa aplicar uma das fórmulas dos Exercícios 64 a 68, e então calcule a inversa usando a fórmula.

69. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

70. A matriz do Exercício 58.

71. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **72.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

3.5 Subespaços, Base, Dimensão e Posto

Esta seção introduz talvez as idéias mais importantes de todo o livro. Já vimos que há uma interação entre geometria e álgebra: freqüentemente, podemos usar intuição geométrica e lógica para obter resultados algébricos, e o poder da álgebra normalmente nos permite estender nossos achados bem além das configurações geométricas em que eles primeiramente surgiram.

Em nosso estudo de vetores, já encontramos informalmente todos os conceitos desta seção. Aqui, começaremos a nos tornar mais formais, dando definições para as idéias-chave. Como você verá, a noção de um *subespaço* é simplesmente uma generalização algébrica dos exemplos geométricos de retas e planos que passam pela origem. O conceito fundamental de uma *base* para um subespaço é então derivado da idéia de vetores diretores para tais retas e planos. O conceito de base nos permitirá dar uma definição precisa de *dimensão* que estará de acordo com uma idéia intuitiva e geométrica do termo, apesar de ser suficientemente flexível para permitir a generalização de outras configurações.

Você também começará a ver que essas idéias dão mais luz ao que você já sabe sobre as matrizes e a solução de sistemas de equações lineares. No Capítulo 6, encontraremos todas essas idéias fundamentais novamente, mais detalhadas. Considere esta seção uma "introdução ao pensamento abstrato".

Um plano que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$ "assemelha-se" a uma cópia de $\mathbb{R}^2$. Intuitivamente, concordaríamos que ambos são "bidimensionais". Aprofundando-nos, podemos dizer também que todo cálculo que pode ser feito com vetores em $\mathbb{R}^2$ também pode ser feito em um plano que passa pela origem. Em

Veja a Figura 2.

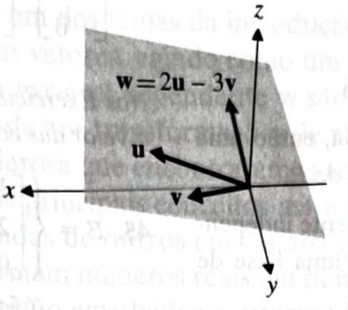


Figura 2 As coordenadas de um vetor em relação a uma base

◆ EXERCÍCIOS 3.5 ◆

Nos Exercícios de 1 a 4, considere S o conjunto de vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ *em* $\mathbb{R}^3$ *que satisfazem a propriedade dada. Em cada caso, prove que S forma um subespaço de* $\mathbb{R}^3$*, ou dê um contra-exemplo para mostrar que ele não forma.*

1. $x = y = z$

2. $z = 2x,\ y = 0$

3. $x - y + z = 1$

4. $|x - y| = |y - z|$

5. Prove que toda reta que passa pela origem em $\mathbb{R}^3$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

6. Suponha que S consiste em todos os pontos em $\mathbb{R}^2$ que estão no eixo das abscissas ou das coordenadas (ou ambos). (S é chamado de *união* dos dois eixos.) S é um subespaço de $\mathbb{R}^2$? Por quê?

Nos Exercícios 7 e 8, determine se **b** *está em col(A) e se* **w** *está em lin(A), como no Exemplo 5.*

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

9. No Exercício 7, determine se **w** está em lin(A), utilizando o método descrito na Observação após o Exemplo 5.

10. No Exercício 8, determine se **w** está em lin(A), utilizando o método descrito na Observação após o Exemplo 5.

11. Se A é a matriz do Exercício 7, então $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ está em anul(A)?

12. Se A é a matriz do Exercício 8, então $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ está em anul(A)?

Nos Exercícios de 13 a 16, dê bases para lin(A), col(A) e anul(A).

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 17 a 20, ache bases para lin(A) e col(A) dos exercícios citados usando A^T*.*

17. Exercício 13

18. Exercício 14

19. Exercício 15

20. Exercício 16

21. Explique cuidadosamente por que suas respostas para os Exercícios 13 e 17 estão ambas corretas, embora pareçam diferentes.

22. Explique cuidadosamente por que suas respostas para os Exercícios 14 e 18 estão ambas corretas, embora pareçam diferentes.

Nos Exercícios de 23 a 26, ache uma base para o conjunto gerado pelos vetores dados.

23. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

26. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

Para os Exercícios 27 e 28, encontre bases, entre os próprios vetores, para os conjuntos gerados pelos vetores nos exercícios citados.

27. Exercício 25

28. Exercício 26

29. Prove que, se R é uma matriz escalonada, então uma base para lin(A) consiste nas linhas não nulas de R.

30. Prove que, se as colunas de A são linearmente independentes, então elas formam necessariamente uma base de col(A).

Para os Exercícios de 31 a 34, dê o posto e a nulidade das matrizes nos Exercícios citados.

31. Exercício 13

32. Exercício 14

33. Exercício 15

34. Exercício 16

35. Se A é uma matriz 3×5, explique por que as colunas de A devem ser linearmente dependentes.

36. Se A é uma matriz 4×2, explique por que as linhas de A devem ser linearmente dependentes.

37. Se A é uma matriz 3×5, quais são os possíveis valores de nulidade(A)?

38. Se A é uma matriz 4×2, quais são os possíveis valores de nulidade(A)?

Nos Exercícios 39 e 40, encontre todos os valores possíveis de posto(A) em função de a.

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ -2 & 4a & 2 \\ a & -2 & 1 \end{bmatrix}$

40. $A = \begin{bmatrix} a & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & a \end{bmatrix}$

Responda aos Exercícios de 41 a 44 considerando a matriz com os vetores dados como suas colunas.

41. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$?

42. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$?

43. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$?

44. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ formam uma base de $\mathbb{R}^4$?

Nos Exercícios 45 e 46, mostre que $\mathbf{w}$ *está em ger($\mathcal{B}$) e ache o vetor das coordenadas* $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}}$.

45. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

46. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 47 a 50, calcule o posto e a nulidade das matrizes dadas sobre o $\mathbb{Z}_p$ *indicado.*

47. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_2$

48. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_3$

49. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_5$

50. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $\mathbb{Z}_7$

51. Se A é uma matriz $m \times n$, prove que todo vetor em anul(A) é ortogonal a todo vetor em lin(A).

52. Se A e B são matrizes $n \times n$ de posto n, prove que AB tem posto n.

53. (a) Prove que posto(AB) ≤ posto(B). (*Sugestão*: reveja o Exercício 29 da Seção 3.2.)

(b) Dê um exemplo em que posto(AB) < posto(B).

54. (a) Prove que posto(AB) ≤ posto(A). [*Sugestão*: reveja o Exercício 30 da Seção 3.2 ou use transpostas e o Exercício 53(a).]

(b) Dê um exemplo em que posto(AB) < posto(A).

55. (a) Prove que, se U é invertível, então posto(UA) = posto(A). [*Sugestão*: $A = U^{-1}(UA)$.]

(b) Prove que, se V é invertível, então posto(AV) = posto(A).

56. Prove que uma matriz A $m \times n$ tem posto 1 se, e somente se, A pode ser escrita como o produto externo $\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ de um vetor $\mathbf{u}$ em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^n$.

57. Se uma matriz $m \times n$ A tem posto r, prove que A pode ser escrita como a soma de r matrizes, cada uma tendo posto 1. (*Sugestão*: encontre um meio de utilizar o Exercício 56.)

58. Prove que, para matrizes $m \times n$ A e B, posto($A + B$) ≤ posto(A) + posto(B).

◆ EXERCÍCIOS 4.3 ◆

Calcule os determinantes dos Exercícios de 1 a 6 usando expansão de co-fatores pela primeira linha e pela primeira coluna.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ **4.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

Calcule os determinantes dos Exercícios de 7 a 15 usando expansão de co-fatores por qualquer linha ou coluna que pareça conveniente.

7. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ **10.** $\begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & \operatorname{tg}\theta \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ a & 0 & b \end{vmatrix}$ **12.** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ **14.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & d & e & f \\ g & h & i & j \end{vmatrix}$

Nos Exercícios de 16 a 18, calcule os determinantes 3×3 indicados, usando o método do Exemplo 2.

16. O determinante do Exercício 6.

17. O determinante do Exercício 8.

18. O determinante do Exercício 11.

19. Verifique que o método indicado em (2) coincide com a equação (1) para um determinante 3×3.

20. Verifique que a definição (4) coincide com a definição de um determinante 2×2, quando $n = 2$.

21. Prove o Teorema 2. (*Sugestão*: seria apropriada uma prova por indução neste caso.)

Nos Exercícios de 22 a 25, encontre o determinante indicado usando operações elementares com linhas e/ou colunas e o Teorema 3 para reduzir a matriz a uma matriz escalonada.

22. O determinante do Exercício 1.

23. O determinante do Exercício 9.

24. O determinante do Exercício 13.

25. O determinante do Exercício 14.

Nos Exercícios de 26 a 34, empregue propriedades de determinantes para calcular o valor do determinante indicado por inspeção direta. Explique seu raciocínio.

26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ **27.** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ **29.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{vmatrix}$ **31.** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **33.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Nos Exercícios de 35 a 40, encontre os determinantes, assumindo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

35. $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

36. $\begin{vmatrix} 3a & -b & 2c \\ 3d & -e & 2f \\ 3g & -h & 2i \end{vmatrix}$

37. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix}$

38. $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

39. $\begin{vmatrix} 2c & b & a \\ 2f & e & d \\ 2i & h & g \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d-3g & 2e-3h & 2f-3i \\ g & h & i \end{vmatrix}$

41. Prove o Teorema 3(a).

42. Prove o Teorema 3(f).

43. Prove o Lema 5.

44. Prove o Teorema 7.

Nos Exercícios 45 e 46, utilize o Teorema 6 para encontrar todos os valores de k para os quais A é invertível.

45. $A = \begin{bmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{bmatrix}$

46. $A = \begin{bmatrix} k & k & 0 \\ k^2 & 2 & k \\ 0 & k & k \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 47 a 52, assuma que A e B sejam matrizes n×n com det A = 3 e det B = −2. Ache os determinantes indicados.

47. $\det(AB)$

48. $\det(A^2)$

49. $\det(B^{-1}A)$

50. $\det(2A)$

51. $\det(3B^T)$

52. $\det(AA^T)$

Nos Exercícios de 53 a 56, A e B são matrizes n×n.

53. Prove que $\det(AB) = \det(BA)$.

54. Se B é invertível, prove que $\det(B^{-1}AB) = \det(A)$.

55. Se A é idempotente (ou seja, se $A^2 = A$), ache todos os possíveis valores do $\det(A)$.

56. Uma matriz quadrada A é chamada de ***nilpotente*** se $A^m = 0$ para algum $m > 1$. (A palavra *nilpotente* vem do latim *nil*, que significa "nenhum", e *potere*, que significa "potência". Uma matriz nilpotente, assim, tem a propriedade de virar "uma nulidade" – ou seja, a matriz nula – quando elevada a alguma potência.) Ache todos os valores possíveis do $\det(A)$, se A for nilpotente.

Nos Exercícios de 57 a 60, use a Regra de Cramer para resolver os sistemas de equações lineares dados.

57. $\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$

58. $\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + 3y &= -1 \end{aligned}$

59. $\begin{aligned} 2x + y + 3z &= 1 \\ y + z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$

60. $\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x + y + z &= 2 \\ x - y \quad &= 3 \end{aligned}$

Nos Exercícios de 61 a 64, use o Teorema 12 para calcular a inversa da matriz dos coeficientes para os exercícios mencionados.

61. Exercício 57

62. Exercício 58

63. Exercício 59

64. Exercício 60

65. Se A é uma matriz $n\times n$ invertível, mostre que adj A também é invertível e que

$$(\text{adj } A)^{-1} = \frac{1}{\det A}A = \text{adj}\,(A^{-1})$$

66. Se A é uma matriz $n\times n$, prove que

$$\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$$

67. Verifique que, se $r < s$, então as linhas r e s de uma matriz podem ser intercambiadas com a realização de $2(s - r) - 1$ intercâmbios de linhas adjacentes.

68. Prove que o Teorema da Expansão de Laplace se verifica para a expansão de co-fatores pela j-ésima coluna.

69. Seja A uma matriz quadrada que pode ser decomposta como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline O & S \end{array}\right]$$

onde P e S são matrizes quadradas. Diz-se que essa matriz está na ***forma de bloco triangular (superior)***.

Prove que

$$\det A = (\det P)(\det S)$$

(*Sugestão*: tente uma prova por indução no número de linhas de P.)

70. (a) Dê um exemplo para mostrar que, se A pode ser repartida como

$$A = \left[\begin{array}{c|c} P & Q \\ \hline R & S \end{array}\right]$$

onde P, Q, R e S são todas matrizes quadradas, então não é necessariamente verdadeiro que

$$\det A = (\det P)(\det S) - (\det Q)(\det R)$$

(b) Assuma que A seja decomposta como na parte (a), e que P seja invertível. Considere

$$B = \left[\begin{array}{c|c} P^{-1} & O \\ \hline -RP^{-1} & I \end{array}\right]$$

Calcule o $\det(BA)$ utilizando o Exercício 69 e use o resultado para mostrar que

$$\det A = \det P \det(S - RP^{-1}Q)$$

A matriz $S - RP^{-1}Q$ é denominada ***complemento de Schur*** de P em A, em referência a Issai Schur (1875–1941), que nasceu em Belarus mas viveu a maior parte de sua vida na Alemanha. Ele é conhecido principalmente pelo seu trabalho fundamental na teoria de representações de grupos, mas também trabalhou em teoria dos números, em análise e em outras áreas.

com autovetores correspondentes $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Daí segue (de alguns dos teoremas desta seção) que A é diagonalizável e $P^{-1}AP = D$, onde

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Isolando A, obtemos $A = PDP^{-1}$, o que torna mais fácil encontrar a potência desejada. Calculamos

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDIDP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

e, em geral, $A^n = PD^nP^{-1}$ para todo $n \geq 1$. (A prova desse fato é feita por indução – faça! Observe que tal propriedade é verdadeira para *qualquer* matriz diagonalizável, não somente essa do exemplo.)

Como

$$D^n = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}$$

temos que

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2(-1)^n + 2^n}{3} & \dfrac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} \\ \dfrac{2(-1)^{n+1} + 2^{n+1}}{3} & \dfrac{(-1)^{n+2} + 2^{n+1}}{3} \end{bmatrix}$$

Como foi solicitado somente A^{10}, isso é mais do que necessitávamos. Mas agora podemos simplesmente fazer $n = 10$ para encontrar $A^{10} = \begin{bmatrix} \dfrac{2(-1)^{10} + 2^{10}}{3} & \dfrac{(-1)^{11} + 2^{10}}{3} \\ \dfrac{2(-1)^{11} + 2^{11}}{3} & \dfrac{(-1)^{12} + 2^{11}}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 342 & 341 \\ 682 & 683 \end{bmatrix}$

◆ EXERCÍCIOS 4.5 ◆

Nos Exercícios de 1 a 4, mostre que A e B não são matrizes semelhantes.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 5 a 7, é dada uma diagonalização da matriz A na forma $P^{-1}AP = D$. Explicite os autovalores de A e bases para os correspondentes auto-subespaços.

5. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 8 a 15, determine se A é diagonalizável e, quando for, encontre uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $P^{-1}AP = D$.

8. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Nos Exercícios de 16 a 23, utilize o método do Exemplo 8 para calcular a potência indicada da matriz.

16. $\begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}^9$

17. $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{10}$

18. $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-6}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k$

20. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^8$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{2002}$

22. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{-5}$

23. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^k$

Nos Exercícios de 24 a 29, ache todos os valores (reais) de k para os quais A é diagonalizável.

24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k \end{bmatrix}$

30. Prove o Teorema 1(c).

31. Prove o Teorema 2(b).

32. Prove o Teorema 2(c).

33. Prove o Teorema 2(e).

34. Se A e B são matrizes invertíveis, mostre que AB e BA são semelhantes.

35. Prove que, se A e B são matrizes semelhantes, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$. (*Sugestão*: descubra uma maneira de usar o Exercício 45 da Seção 3.3.)

Em geral, é difícil mostrar que duas matrizes são semelhantes. No entanto, se duas matrizes semelhantes são diagonalizáveis, a tarefa começa a ficar mais fácil. Nos Exercícios de 36 a 39, mostre que A e B são semelhantes indicando que elas são semelhantes a uma mesma matriz diagonal. Depois, encontre uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP = B$.

36. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

37. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

38. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 6 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

40. Prove que, se A é semelhante a B, A^T é semelhante a B^T.

41. Prove que, se A é diagonalizável, A^T também é.

42. Seja A uma matriz invertível. Prove que, se A é diagonalizável, A^{-1} também é.

43. Prove que, se A é uma matriz diagonalizável com um único autovalor λ, A tem a forma $A = \lambda I$. (Uma matriz dessas é chamada de ***matriz escalar***.)

44. Sejam A e B matrizes $n \times n$, cada uma com n autovalores distintos. Prove que A e B têm os mesmos autovetores se, e somente se, $AB = BA$.

Respostas a Exercícios Ímpares Selecionados

Respostas são fáceis. Fazer a pergunta
correta é que é difícil.

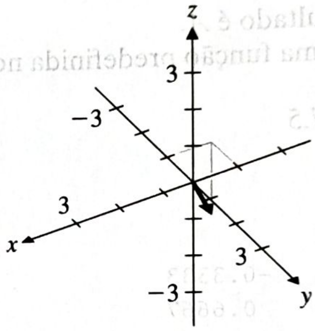
— Doctor Who
"The face of evil",
de Chris Boucher
BBC, 1977

Capítulo 1

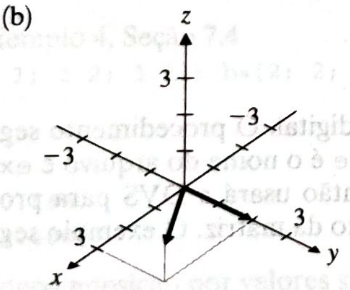
Exercícios 1.2

1.

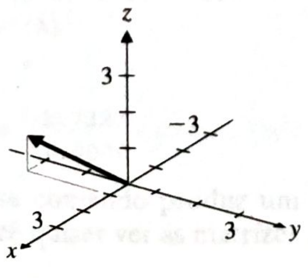
(d)



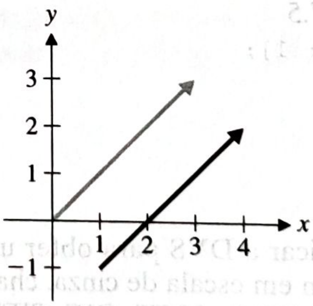
3. (a), (b)



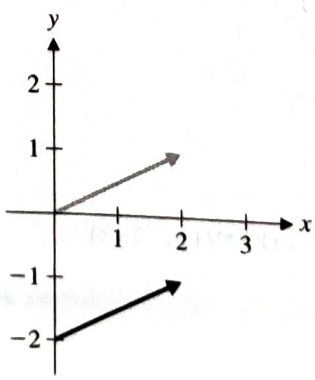
(c)



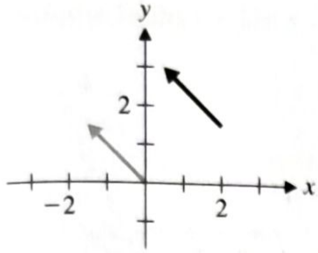
5. (a)



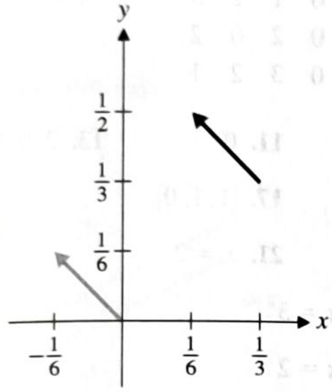
(b)



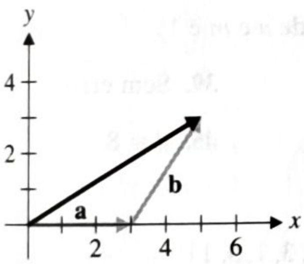
(c)

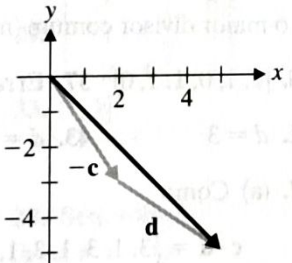


(d)



7. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = [5, 3]$ **9.** $\mathbf{d} - \mathbf{c} = [5, -5]$





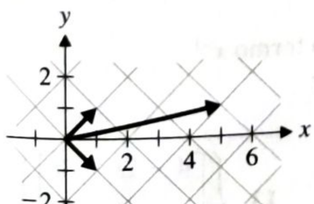
11. $[3, -2, 3]$

13. $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1-\sqrt{3})/2 \\ (\sqrt{3}-1)/2 \end{bmatrix},$

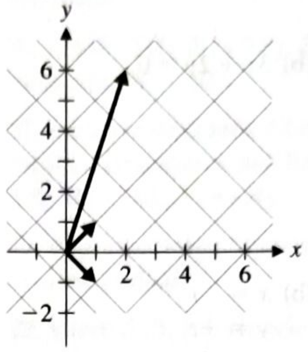
$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} (1+\sqrt{3})/2 \\ (1+\sqrt{3})/2 \end{bmatrix}$

15. $5\mathbf{a}$ **17.** $\mathbf{x} = 3\mathbf{a}$

19.



21. $\mathbf{w} = -2\mathbf{u} + 4\mathbf{v}$



Exercícios 1.3

1. -1 **3.** 11 **5.** 2

7. $\sqrt{5}, \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$ **9.** $\sqrt{14}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{14} \\ 2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \end{bmatrix}$

11. $\sqrt{6}, [1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{2}, 0]$

13. $\sqrt{17}$ **15.** $\sqrt{6}$

17. (a) $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ é um escalar, e não um vetor.
(c) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ é um escalar e $\mathbf{u}$ é um vetor.

19. Agudo **21.** Agudo **23.** 60° **25.** ≈88,10°

27. Como $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 0$, $\angle BAC$ é um ângulo reto.

29. Se tomarmos o cubo como sendo o cubo unitário (como na Figura 10 da Seção 1.3), as quatro diagonais serão dadas pelos vetores

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{d}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{d}_j \neq 0$ para todo $i \neq j$ (seis possibilidades), as diagonais não serão perpendiculares, duas a duas.

31. $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **35.** $\begin{bmatrix} -0{,}301 \\ 0{,}033 \\ -0{,}252 \end{bmatrix}$

37. $A = \sqrt{45}/2$ **39.** $k = -2, 3$

41. $\mathbf{v}$ é da forma $k\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$, onde k é um escalar.

Exercícios 1.4

1. (a) $\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=0$ (b) $3x+2y=0$

3. (a) $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$

(b) $x = 1 - t$
$y = 3t$

5. (a) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}$ (b) $x = t$
$y = -t$
$z = 4t$

7. (a) $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2$ (b) $3x+2y+z=2$

9. (a) $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-3\\2\\1\end{bmatrix}$

(b) $x = 2s - 3t$
$y = s + 2t$
$z = 2s + t$

11. $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}3\\-1\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\end{bmatrix}$

15. (a) $x = t$
$y = -1 + 3t$
$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

17. Os vetores diretores para as duas linhas são dados por $\mathbf{d}_1=\begin{bmatrix}1\\m_1\end{bmatrix}$ e $\mathbf{d}_2=\begin{bmatrix}1\\m_2\end{bmatrix}$. As linhas serão perpendiculares se e somente se $\mathbf{d}_1$ e $\mathbf{d}_2$ forem ortogonais. Mas $\mathbf{d}_1\cdot\mathbf{d}_2=0$ se e somente se $1+m_1m_2=0$, ou, equivalentemente, $m_1m_2=-1$.

19. (a) Perpendicular
(b) Paralelo
(c) Perpendicular
(d) Perpendicular

21. $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\3\\-1\end{bmatrix}$

25. (a) $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$

(b) $x-y=0$ (c) $x+y-z=0$

27. $3\sqrt{2}/2$ **29.** $2\sqrt{3}/3$

31. $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ **33.** $(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{8}{3})$

35. $18\sqrt{13}/13$ **37.** $\frac{5}{3}$

Exercícios 1.5

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=1$

3. $\mathbf{u}+\mathbf{v}=[0, 1, 0, 0]$, $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=1$

5.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

7. 0 **9.** 1 **11.** 0 **13.** 2, 0, 3

15. 5 **17.** [1, 1, 0]

19. 3, 2 **21.** $x = 2$

23. Sem solução **25.** $x = 3$

27. Sem solução **29.** $x = 2$

31. $x = 1$, ou $x = 5$

33. (a) Todo $a \neq 0$ (b) $a = 1, 5$

(c) a e m não podem ter fatores em comum além do 1 [isto é, o maior divisor comum (mdc) de a e m é 1].

35. [1, 1, 0, 1, 1, 0] **37.** Errado **39.** Sem erro

41. $d = 3$ **43.** $d = 7$ **45.** $d = 8$

47. (a) Como

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{u}=[3,1,3,1,3,1,3,1,3,1,3,1]\cdot[0,4,6,9,5,6,1,8,2,0,1,5]=7\neq 0$$

vemos que houve um erro, portanto, o código de barras está incorreto.

(b) [0, 4, 7, 9, 5, 6, 1, 8, 2, 0, 1, 5]

51. $d = 7$

Capítulo 2

Exercícios 2.2

1. Linear

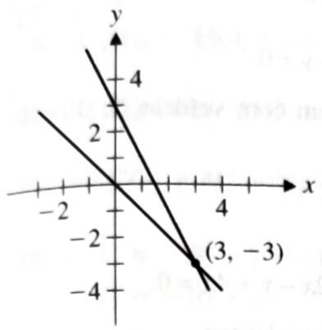
3. Não é linear por causa do termo x^{-1}

5. Linear **7.** $2x+4y=7$

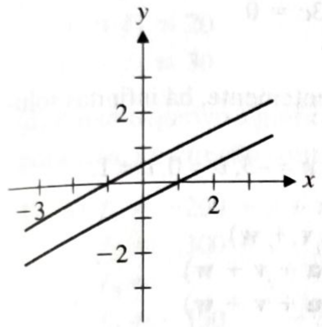
9. $x+y=4\ (x, y\neq 0)$

11. $\left\{\begin{bmatrix}2t\\t\end{bmatrix}\right\}$ **13.** $\left\{\begin{bmatrix}4-2s-3t\\s\\t\end{bmatrix}\right\}$

15. Solução única: $x = 3$, $y = -3$.



17. Sem solução



19. $[7, 3]$ **21.** $[\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$

23. $[5, -2, 1, 1]$ **25.** $[2, -7, -32]$

27. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$ **29.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{array}\right]$

31.
$$\begin{aligned} y + z &= 1 \\ x - y &= 1 \\ 2x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

33. $[1, 1]$

35. $[4, -1]$

37. Sem solução

39. (a) $2x + y = 3$
$\ 4x + 2y = 6$

(b) $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}s$
$y = s$

41. Seja $u = \dfrac{1}{x}$ e $v = \dfrac{1}{y}$. A solução é $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{2}$.

43. Seja $u = \operatorname{tg} x$, $v = \operatorname{sen} y$, $w = \cos z$. Uma solução possível é $x = \pi/4$, $y = -\pi/6$, $z = \pi/3$. (Existem infinitas soluções.)

Exercícios 2.3

1. Não

3. Forma escalonada por redução por linhas

5. Não **7.** Não

9. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **11.** (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. Faça, na ordem, as seguintes operações elementares nas linhas:

$R_4 + 29R_3$, $8R_3$, $R_4 - 3R_2$, $R_2 \leftrightarrow R_3$, $R_4 - R_1$, $R_3 + 2R_1$ e, finalmente, $R_2 + 2R_1$.

17. Uma possibilidade é fazer, na ordem, as seguintes operações elementares nas linhas de A: $R_2 - 3R_1$, $\frac{1}{2}R_2$, $R_1 + 2R_2$, $R_2 + 3R_1$, $R_1 \leftrightarrow R_2$.

19. *Sugestão:* tome uma matriz 2×2 qualquer e tente isso — com cuidado!

21. Exercício 1: 3; Exercício 3: 2; Exercício 5: 2; Exercício 7: 3

23. $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ **25.** $t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 24 \\ -10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

31. Sem solução **33.** Solução única

35. Infinitas soluções

37. *Sugestão:* prove que, se $ad - bc \neq 0$, o posto de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é 2. (Existem dois casos: $a = 0$ e $a \neq 0$.) Use o Teorema do Posto para deduzir que o sistema dado deve ter uma solução única.

39. (a) Sem solução, se $k = -1$
(b) Solução única se $k \neq \pm 1$
(c) Soluções infinitas se $k = 1$

41. (a) Sem solução se $k = 1$
(b) Solução única se $k \neq -2, 1$
(c) Soluções infinitas se $k = -2$

43. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 9 \\ -10 \\ -7 \end{bmatrix}$

47. Sem intersecção

49. Os vetores procurados $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ são as soluções do sistema homogêneo com matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 \end{array}\right]$$

Pelo Teorema 3, existem infinitas soluções. Se $u_1 \neq 0$ e $u_1v_2 - u_2v_1 \neq 0$, as soluções são dadas por

$$t\begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix}$$

No entanto, por inspeção direta, vemos que essas são soluções válidas, mesmo quando $u_1 = 0$ e/ou $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$.

51. $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ **53.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **55.** $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

Exercícios 2.4

1. Sim **3.** Não **5.** Sim **7.** Sim

9. Precisamos provar que a equação vetorial

$$x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

tem uma solução para quaisquer valores de a e b. Essa equação vetorial é equivalente ao sistema linear cuja matriz completa é $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \end{array}\right]$. O escalonamento por redução nas linhas nos dá $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & b-a \end{array}\right]$, a partir da qual podemos ver que existe uma (única) solução. [Continuando a operar nas linhas, obtemos $x = (a + b)/2$, $y = (a - b)/2$.] Assim $\mathbb{R}^2 = \operatorname{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$.

11. Precisamos provar que a equação vetorial $x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ tem uma solução para quaisquer valores de a, b e c. Essa equação vetorial é equivalente ao sistema linear cuja matriz completa é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$. O escalonamento por redução nas linhas nos dá $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & b+c-a \end{array}\right]$, a partir da qual podemos ver que existe uma (única) solução. [Continuando a operar nas linhas, obtemos $x = (a - b + c)/2$, $y = (a + b - c)/2$, $z = (-a + b + c)/2$.] Assim, $\mathbb{R}^3 = \operatorname{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

13. (a) A reta através da origem com vetor de direção $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(b) A reta com equação geral $2x + y = 0$.

15. (a) O plano através da origem com vetores de direção $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

(b) O plano com equação geral $2x - y + 4z = 0$.

17. A substituição nos dá o sistema linear

$$\begin{aligned} a \qquad + 3c &= 0 \\ -a + b - 3c &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é $t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Conseqüentemente, há infinitas soluções, e talvez a mais simples seja $a = -3$, $b = 0$, $c = 1$.

19.
$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u} + 0(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + 0(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ \mathbf{v} &= (-1)\mathbf{u} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + 0(\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ \mathbf{w} &= 0\mathbf{u} + (-1)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + (\mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w}) \end{aligned}$$

21. (c) Devemos provar que ger($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) = ger($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$). Sabemos que ger($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$) $\subseteq \mathbb{R}^3$ = ger($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$). Usando o Exercício 19, segue que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ pertencem todos a ger($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$). Portanto, pelo Exercício 21(b), ger($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$) = ger($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$).

23. Linearmente independente

25. Linearmente dependente, $-\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

27. Linearmente dependente, pois o conjunto contém o vetor nulo

29. Linearmente independente

31. Linearmente dependente,

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

43. (a) Sim (b) Não

Exercícios 2.5

1. $x_1 = 160$, $x_2 = 120$, $x_3 = 160$

3. Dois pequenos, três médios e quatro grandes

5. Sessenta e cinco pacotes da mistura da casa, 30 pacotes da mistura especial e 45 pacotes da mistura gourmet

7. $4FeS_2 + 11O_2 \longrightarrow 2Fe_2O_3 + 8SO_2$

9. $2C_4H_{10} + 13O_2 \longrightarrow 8CO_2 + 10H_2O$

11. $2C_5H_{11}OH + 15O_2 \longrightarrow 12H_2O + 10CO_2$

13. $Na_2CO_3 + 4C + N_2 \longrightarrow 2NaCN + 3CO$

15. (a) $\begin{aligned} f_1 &= 30 - t \\ f_2 &= -10 + t \\ f_3 &= t \end{aligned}$ (b) $f_1 = 15, f_3 = 15$

(c) $\begin{aligned} 0 \le f_1 &\le 20 \\ 0 \le f_2 &\le 20 \\ 10 \le f_3 &\le 30 \end{aligned}$

(d) Fluxo negativo significaria que a água estaria correndo para trás, na direção contrária à da seta.

17. (a) $\begin{aligned} f_1 &= -200 + s + t \\ f_2 &= 300 - s - t \\ f_3 &= s \\ f_4 &= 150 - t \\ f_5 &= t \end{aligned}$ (b) $200 \le f_3 \le 300$

(c) Se $f_3 = s = 0$, então $f_5 = t \ge 200$ (a partir da equação de f_1), mas $f_5 = t \le 150$ (a partir da equação de f_4). Isso é uma contradição.

(d) $50 \le f_3 \le 300$

19. $I_1 = 3$ amps, $I_2 = 5$ amps, $I_3 = 2$ amps

21. (a) $I = 10$ amps, $I_1 = I_5 = 6$ amps, $I_2 = I_4 = 4$ amps, $I_3 = 2$ amps

(b) $R_{eff} = \frac{7}{5}$ ohms

(c) Sim. Mude-o para 4 ohms.

23. (a) Sim. Pressione os interruptores 1, 2 e 3 ou os interruptores 3, 4 e 5.

(b) Não

25. As configurações que podem ser obtidas são representadas pelos vetores

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

em $\mathbb{Z}_2^5$, para os quais $x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 0$. (Existem 16 possibilidades.)

27. Se 0 = desligado, 1 = azul-claro e 2 = azul-escuro, o sistema linear que surge tem a matriz completa

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

a qual se reduz sobre $\mathbb{Z}_3$ para

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Isso origina as soluções

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde t é um elemento de $\mathbb{Z}_3$. Assim, existem exatamente três soluções:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

onde cada elemento indica o número de vezes que o interruptor correspondente teve de ser pressionado.

29. (a) Aperte os quadrados 3 e 7.

(b) A matriz de coeficientes A, 9×9, tem suas linhas equivalentes a $\mathbb{Z}_2$, portanto, para qualquer elemento $\mathbf{b}$ de $\mathbb{Z}_2^9$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem uma única solução.

31. Graça tem 15 anos e Heitor tem 5.

33. 1.200 e 600 metros quadrados.

35. (a) $a = 4 - d$, $b = 5 - d$, $c = -2 + d$, onde d é arbitrário.

(b) Sem solução

37. (a) Sem solução

(b) $[a, b, c, d, e, f] = [4, 5, 6, -3, -1, 0] + f[-1, -1, -1, 1, 1, 1]$

39. (a) $y = x^2 - 2x + 1$ (b) $y = x^2 + 6x + 10$

41. $A = 1, B = 2$

43. $A = -\frac{1}{5}, B = \frac{1}{3}, C = 0, D = -\frac{2}{15}, E = -\frac{1}{5}$

45. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$

Exercícios 2.6

1.

n	0	1	2	3	4	5
x_1	0	0,8571	0,9714	0,9959	0,9991	0,9998
x_2	0	0,8000	0,9714	0,9943	0,9992	0,9998

Solução exata: $x_1 = 1$ e $x_2 = 1$

3.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0,2222	0,2539	0,2610	0,2620	0,2622	0,2623
x_2	0	0,2857	0,3492	0,3582	0,3603	0,3606	0,3606

Solução exata (com quatro casas decimais): $x_1 = 0{,}2623$ e $x_2 = 0{,}3606$

5.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	0	0,3333	0,2500	0,3055	0,2916	0,3009	0,2986	0,3001	0,2997
x_2	0	0,2500	0,0834	0,1250	0,0972	0,1042	0,0996	0,1008	0,1000
x_3	0	0,3333	0,2500	0,3055	0,2916	0,3009	0,2986	0,3001	0,2997

Solução exata: $x_1 = 0{,}3$, $x_2 = 0{,}1$ e $x_3 = 0{,}3$

7.

n	0	1	2	3	4
x_1	0	0,8571	0,9959	0,9998	1,0000
x_2	0	0,9714	0,9992	1,0000	1,0000

O uso do método de Gauss-Seidel proporciona uma margem de erro de 0,001 da resposta exata, após três iterações. Para obter a mesma acuidade usando o método de Jacobi, precisamos fazer quatro iterações.

9.

n	0	1	2	3	4
x_1	0	0,2222	0,2610	0,2622	0,2623
x_2	0	0,3492	0,3603	0,3606	0,3606

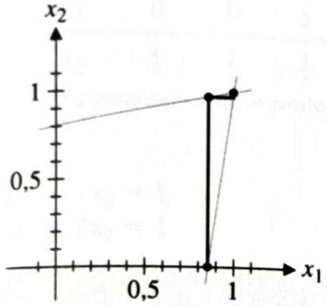
O uso do método de Gauss-Seidel proporciona uma margem de erro de 0,001 da resposta exata, após três iterações. Para obter a mesma acuidade usando o método de Jacobi, precisamos fazer quatro iterações.

11.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0,3333	0,2777	0,2962	0,2993	0,2998	0,3000
x_2	0	0,1667	0,1112	0,1020	0,1004	0,1000	0,1000
x_3	0	0,2777	0,2962	0,2993	0,2998	0,3000	0,3000

O uso do método de Gauss-Seidel proporciona uma margem de erro de 0,001 da resposta exata, após quatro iterações. Para obter a mesma acuidade usando o método de Jacobi, precisamos fazer sete iterações.

13.



15.

n	0	1	2	3	4
x_1	0	3	−5	19	−53
x_2	0	−4	8	−28	80

Se intercambiarmos as equações e aplicarmos o método de Gauss-Seidel ao sistema equivalente

$$3x_1 + 2x_2 = 1$$

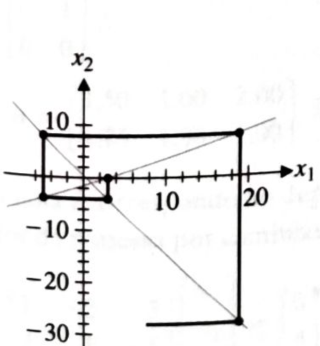
$$x_1 - 2x_2 = 3$$

obteremos

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_1	0	0,3333	1,2222	0,9260	1,0247	0,9918	1,0027	0,9991	1,0003
x_2	0	−1,3333	−0,8889	−1,0370	−0,9876	−1,0041	−0,9986	−1,0004	−0,9998

Após sete iterações, o processo convergirá para a solução exata $x_1 = 1$ e $x_2 = -1$, com uma margem de erro de 0,001.

17.



19.

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	−1,6	14,97	8,550	10,740	9,839	10,120
x_2	0	25,9	11,408	14,051	11,615	11,718	11,249
x_3	0	−10,35	−9,311	−11,200	−11,322	−11,721	−11,816

n	7	8	9	10	11	12
x_1	9,989	10,022	10,002	10,005	10,001	10,001
x_2	11,187	11,082	11,052	11,026	11,015	11,008
x_3	−11,912	−11,948	−11,973	−11,985	−11,992	−11,996

Após 12 iterações, usando o método de Gauss-Seidel, o processo convergiu para a solução exata $x_1 = 10$, $x_2 = 11$ e $x_3 = -12$, com uma margem de erro de 0,01.

21.

n	13	14	15	16
x_1	10,0004	10,0003	10,0001	10,0001
x_2	11,0043	11,0023	11,0014	11,0007
x_3	−11,9976	−11,9986	−11,9993	−11,9996

23. O método de Gauss-Seidel produz

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_1	0	0	12,5	21,875	24,219	24,805	24,951	24,988	24,997	24,999
x_2	0	0	18,75	21,438	24,609	24,902	24,976	24,994	24,998	24,999
x_3	0	50	68,75	73,438	74,609	74,902	74,976	74,994	74,998	74,999
x_4	0	62,5	71,875	74,219	74,805	74,951	74,988	74,997	74,999	75,000

A solução exata é $x_1 = 25$, $x_2 = 25$, $x_3 = 75$ e $x_4 = 75$.

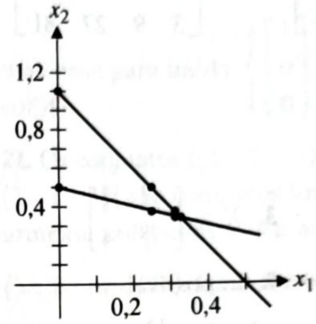
25. O método de Gauss-Seidel produz as seguintes iterações:

n	0	1	2	3	4	5	6
t_1	0	20	21,25	22,8125	23,3301	23,6596	23,7732
t_2	0	5	11,25	13,3203	14,6386	15,0926	15,2732
t_3	0	21,25	24,6094	26,9873	27,7303	27,9626	28,0352
t_4	0	2,5	5,8594	8,2373	8,9804	9,2126	9,2852
t_5	0	7,1875	14,6289	16,2829	16,7578	16,9036	16,9491
t_6	0	23,0469	24,9072	25,3207	25,4394	25,4759	25,4873

n	7	8	9	10	11	12
t_1	23,8093	23,8206	23,8242	23,8252	23,8256	23,8257
t_2	15,2824	15,2966	15,3010	15,3024	15,3029	15,3029
t_3	28,0579	28,0650	28,0671	28,0678	28,0681	28,0681
t_4	9,3079	9,3150	9,3172	9,3178	9,3181	9,3181
t_5	16,9633	16,9677	16,9690	16,9695	16,9696	16,9696
t_6	25,4908	25,4919	25,4922	25,4924	25,4924	25,4924

27. (a)

n	0	1	2	3	4	5	6
x_1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{21}{64}$
x_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{11}{32}$



(b) $2x_1 + x_2 = 1$
$x_1 + 2x_2 = 1$

(c)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1	0	0	0,25	0,3125	0,3281	0,3320	0,3330	0,3332
x_2	1	0,5	0,375	0,3438	0,3360	0,3340	0,3335	0,3334

[As colunas 1, 2 e 3 dessa tabela são, respectivamente, as colunas *ímpares* 1, 3 e 5 da tabela da parte (a).] Os iterados estão convergindo para $x_1 = x_2 = 0{,}3333$.

(d) $x_1 = x_2 = \frac{1}{3}$

Capítulo 3

Exercícios 3.2

1. $\begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$

3. Impossível

5. $\begin{bmatrix} 12 & -6 & 3 \\ -4 & 12 & 14 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$

9. $[10]$

11. $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 27 & 0 \\ -49 & 125 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. $B = \begin{bmatrix} 1{,}50 & 1{,}00 & 2{,}00 \\ 1{,}75 & 1{,}50 & 1{,}00 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 650{,}00 & 462{,}50 \\ 675{,}00 & 406{,}25 \end{bmatrix}$.

A coluna i corresponde ao depósito i; a linha 1 contém os custos de remessa por caminhão, e a linha 2, por trem.

21. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

23. $AB = [2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 \quad 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 6\mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3]$ (onde $\mathbf{a}_i$ é a i-ésima coluna de A)

25. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -6 & -9 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -12 & -8 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & -6 & -4 \end{bmatrix}$

27. $BA = \begin{bmatrix} 2\mathbf{A}_1 + 3\mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 \\ -\mathbf{A}_1 + 6\mathbf{A}_2 + 4\mathbf{A}_3 \end{bmatrix}$ (onde $\mathbf{A}_i$ é a i-ésima linha de A)

29. Se $\mathbf{b}_i$ é a i-ésima coluna de B, então $A\mathbf{b}_i$ é a i-ésima coluna de AB. Se as colunas de B são linearmente dependentes, então existem escalares $c_1, \ldots, c_n$ (não todos nulos) tais que $c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n = \mathbf{0}$. Mas então $c_1(A\mathbf{b}_1) + \cdots + c_n(A\mathbf{b}_n) = A(c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, e, portanto, as colunas de AB são linearmente dependentes.

31. $\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$

33. $\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$

35. (a) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $A^4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$$A^5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) $A^{2001} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

37. $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

39. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \end{bmatrix}$

Exercícios 3.3

1. $X = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ **3.** $X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} & 4 \end{bmatrix}$

5. $B = 2A_1 + A_2$ **7.** Impossível

9. $\text{ger}(A_1, A_2) = \left\{ \begin{bmatrix} c_1 & 2c_1 + c_2 \\ -c_1 + 2c_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \right\} =$

$\left\{ \begin{bmatrix} w & x \\ 2x - 5w & x - w \end{bmatrix} \right\}$

11. $\text{ger}(A_1, A_2, A_3) =$

$\left\{ \begin{bmatrix} c_1 - c_2 + c_3 & 2c_2 + c_3 & -c_1 + c_3 \\ 0 & c_1 + c_2 & 0 \end{bmatrix} \right\} =$

$\left\{ \begin{bmatrix} -3b + 4c + 5e & b & c \\ 0 & e & 0 \end{bmatrix} \right\}$

13. Linearmente independente

15. Linearmente independente

23. $a = d, c = 0$ **25.** $3b = 2c, a = d - c$

27. $a = d, b = c = 0$

29. Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ matrizes $n \times n$ triangulares superiores, e suponha que $i > j$. Então, pela definição de uma matriz triangular superior,

$$a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{i,\,i-1} = 0 \quad \text{e} \quad b_{ij} = b_{i+1,\,j} = \cdots = b_{nj} = 0$$

Seja $C = AB$. Então:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{i,\,i-1}b_{i-1,\,j} + a_{ii}b_{ij} \\ &\quad + a_{i,\,i+1}b_{i+1,\,j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= 0 \cdot b_{1j} + 0 \cdot b_{2j} + \cdots 0 \cdot b_{i-1,\,j} + a_{ii} \cdot 0 \\ &\quad + a_{i,\,i+1} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

e disso concluímos que C é triangular superior.

35. (a) A e B simétricas $\Rightarrow (A + B)^T = A^T + B^T = A + B \Rightarrow A + B$ é simétrica

37. As matrizes em (b) e (c) são anti-simétricas.

41. A ou B (ou ambas) deve ser a matriz nula.

43. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

47. *Sugestão*: use o traço.

Exercícios 3.4

1. $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ **3.** Não invertível

5. Não invertível **7.** $\begin{bmatrix} -1{,}6 & -2{,}8 \\ 0{,}\overline{3} & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} a/(a^2 + b^2) & b/(a^2 + b^2) \\ -b/(a^2 + b^2) & a/(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -5 \\ 9 \end{bmatrix}$

13. (a) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

(c) O método utilizado na parte (b) usa menos multiplicações.

17. (b) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ se e somente se $AB = BA$.

21. $X = A^{-1}(BA)^2B^{-1}$

23. $X = (AB)^{-1}BA + A$

25. $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **27.** $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

29. $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **31.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ **35.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

39. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

43. (a) Se A é invertível, então $BA = CA \Rightarrow (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} \Rightarrow B(AA^{-1}) = C(AA^{-1}) \Rightarrow BI = CI \Rightarrow B = C$.

45. *Sugestão:* reescreva $A^2 - 2A + I = O$ como $A(2I - A) = I$.

47. Se AB é invertível, então existe uma matriz X tal que $(AB)\,X = I$. Com isso, também temos que $A(BX) = I$ e, portanto, a matriz A é invertível (com inversa BX).

49. $\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

51. $\begin{bmatrix} 1/(a^2+1) & -a/(a^2+1) \\ a/(a^2+1) & 1/(a^2+1) \end{bmatrix}$

53. Não invertível

55. $\begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 \\ -1/a^2 & 1/a & 0 \\ 1/a^3 & -1/a^2 & 1/a \end{bmatrix}, a \neq 0$

57. $\begin{bmatrix} -11 & -2 & 5 & -4 \\ 4 & 1 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ 9 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a/d & -b/d & -c/d & 1/d \end{bmatrix}, d \neq 0$

61. Não invertível

63. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

69. $\left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline -2 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

71. $\left[\begin{array}{cc:cc} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$

Exercícios 3.5

1. Subespaço **3.** Não é um subespaço

7. $\mathbf{b}$ não pertence a col(A) e $\mathbf{w}$ não pertence a lin(A).

11. Não

13. $\{[1 \;\; 0 \;\; -1], [0 \;\; 1 \;\; 2]\}$ é uma base para lin(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para col(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para anul(A).

15. $\{[1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0], [0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 0], [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1]\}$ é uma base para lin(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para col(A); $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para anul(A).

17. $\{[1 \;\; 0 \;\; -1], [1 \;\; 1 \;\; 1]\}$ é uma base para lin(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para col(A).

19. $\{[1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1], [0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; 1], [0 \;\; 1 \;\; -1 \;\; -1]\}$ é uma base para lin(A); $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para col(A).

21. Os conjuntos $\{[1 \;\; 0 \;\; -1], [0 \;\; 1 \;\; 2]\}$ e $\{[1 \;\; 0 \;\; -1], [1 \;\; 1 \;\; 1]\}$ são conjuntos formados por vetores-linha linearmente independentes e qualquer um deles gera lin(A) = $\{[a \;\; b \;\; -a + 2b]\}$. Os conjuntos $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ e $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ são conjuntos formados por vetores-coluna linearmente independentes e qualquer um deles gera col(A) = $\mathbb{R}^2$.

23. $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

25. $\{[1 \;\; 0 \;\; 0], [0 \;\; 1 \;\; 0], [0 \;\; 0 \;\; 1]\}$

27. $\{[2 \;\; -3 \;\; 1], [1 \;\; -1 \;\; 0], [4 \;\; -4 \;\; 1]\}$

31. posto(A) = 2, nulidade(A) = 1

33. posto(A) = 3, nulidade(A) = 1

35. Se A é 3×5, então posto(A) ≤ 3, e, portanto, não pode haver mais que três colunas linearmente independentes.

37. nulidade(A) = 2, 3, 4 ou 5

39. Se $a = -1$, então posto(A) = 1; se $a = 2$, então posto(A) = 2; para $a \neq -1, 2$, posto(A) = 3.

41. Sim **43.** Sim

45. O vetor $\mathbf{w}$ será um elemento de ger($\mathcal{B}$) se e somente se o sistema linear com matriz completa $[\mathcal{B} \mid \mathbf{w}]$ for consistente, o que é verdadeiro neste caso, pois

$$[\mathcal{B} \mid \mathbf{w}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A partir dessa forma escalonada reduzida por linhas, fica claro que $[\mathbf{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

47. posto(A) = 2, nulidade(A) = 1

49. posto(A) = 3, nulidade(A) = 1

51. Sejam $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_m$ os vetores-linha de A tal que $\text{lin}(A) = \text{ger}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m)$. Se $\mathbf{x}$ é um elemento de anul(A), então, uma vez que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, também temos $\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} = 0$, para $i = 1, \ldots, m$, pela definição linha-coluna de multiplicação de matriz. Se $\mathbf{r}$ é um elemento de lin(A), então $\mathbf{r}$ é da forma $\mathbf{r} = c_1\mathbf{A}_1 + \cdots + c_m\mathbf{A}_m$. Portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \cdot \mathbf{x} &= (c_1\mathbf{A}_1 + \cdots + c_m\mathbf{A}_m) \cdot \mathbf{x} \\ &= c_1(\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}) + \cdots + c_m(\mathbf{A}_m \cdot \mathbf{x}) = 0\end{aligned}$$

53. (a) Se um conjunto de colunas de AB é linearmente independente, então as colunas correspondentes de B são linearmente independentes (por um argumento semelhante ao usado para resolver o Exercício 29 da Seção 3.2). Segue que o número k *máximo* de colunas linearmente independentes de AB [isto é, $k = \text{posto}(AB)$] não pode ser maior que o número r *máximo* de colunas linearmente independentes de B [isto é, $r = \text{posto}(B)$]. Em outras palavras, $\text{posto}(AB) \le \text{posto}(B)$.

55. (a) Do Exercício 53(a), temos que $\text{posto}(UA) \le \text{posto}(A)$ e $\text{posto}(A) = \text{posto}((U^{-1}U)A) = \text{posto}(U^{-1}(UA)) \le \text{posto}(UA)$. Assim, $\text{posto}(UA) = \text{posto}(A)$.

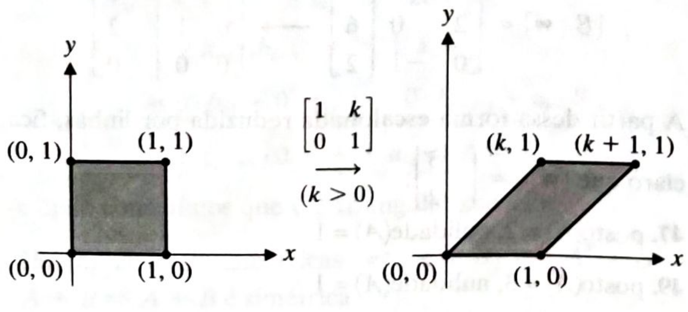
Exercícios 3.6

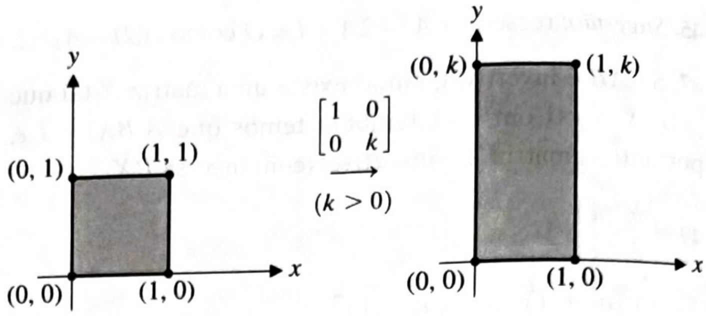
1. $T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \end{bmatrix}, T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

15. $[F] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **17.** $[D] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ estica ou encolhe na direção Ox (combinada com uma reflexão pelo eixo Oy, se $k < 0$); $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ estica ou encolhe na direção Oy (combinada com uma reflexão pelo eixo Ox, se $k < 0$); $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é uma reflexão pela linha $y = x$; $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é uma *distorção* na direção Ox; $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$ é uma *distorção* na direção Oy. Por exemplo,





21. $\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ **27.** $\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

31. $[S \circ T] = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

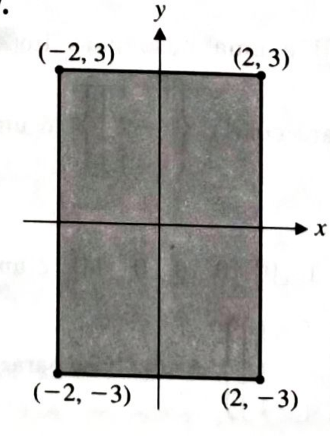
33. $[S \circ T] = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -6 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

35. $[S \circ T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

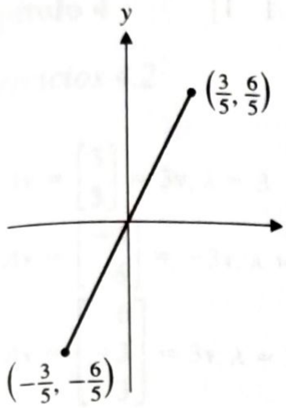
37. $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$ **39.** $\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix}$

45. Sejam as retas paralelas dadas na forma vetorial por $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$ e $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + t\mathbf{d}$. Suas imagens sob T serão, respectivamente, $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{p} + t\mathbf{d}) = T(\mathbf{p}) + tT(\mathbf{d})$ e $T(\mathbf{x}') = T(\mathbf{p}' + t\mathbf{d}) = T(\mathbf{p}') + tT(\mathbf{d})$. Suponhamos que $T(\mathbf{d}) \neq \mathbf{0}$. Se $T(\mathbf{p}') - T(\mathbf{p})$ é paralelo a $T(\mathbf{d})$, então as imagens representam a mesma linha; caso contrário, as imagens representam linhas paralelas distintas. Por outro lado, se $T(\mathbf{d}) = \mathbf{0}$, então as imagens representam dois pontos distintos se $T(\mathbf{p}') \neq T(\mathbf{p})$; caso contrário, um único ponto.

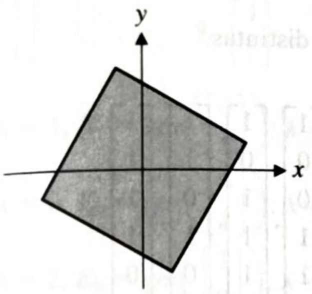
47.



49.



51.



Exercícios 3.7

1. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0{,}38 \\ 0{,}62 \end{bmatrix}$

3. 64%

5. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 150 \\ 120 \\ 120 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 155 \\ 120 \\ 115 \end{bmatrix}$

7. $\frac{5}{18}$

9. (a) $P = \begin{bmatrix} 0{,}662 & 0{,}250 \\ 0{,}338 & 0{,}750 \end{bmatrix}$ (b) 0,353

(c) 42,5% de dias úmidos; 57,5% de dias secos

11. (a) $P = \begin{bmatrix} 0{,}08 & 0{,}09 & 0{,}11 \\ 0{,}07 & 0{,}11 & 0{,}05 \\ 0{,}85 & 0{,}80 & 0{,}84 \end{bmatrix}$

(b) 0,08; 0,1062; 0,1057; 0,1057; 0,1057

(c) 10,6% de boa safra, 5,5% de safra regular e 83,9% de safra ruim

13. Os elementos do vetor $\mathbf{j}P$ são apenas as somas das colunas da matriz P. Portanto, P é matriz estocástica se e somente se $\mathbf{j}P = \mathbf{j}$.

15. 4 **17.** 9,375

19. $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 500 \\ 70 \\ 50 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 720 \\ 350 \\ 35 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1.175 \\ 504 \\ 175 \end{bmatrix}$

21. (a) Para L_1, temos $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 50 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 200 \\ 32 \end{bmatrix},$

$\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 160 \\ 160 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 800 \\ 128 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 640 \\ 640 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_7 = \begin{bmatrix} 3.200 \\ 512 \end{bmatrix}$

$\mathbf{x}_8 = \begin{bmatrix} 2.560 \\ 2.560 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_9 = \begin{bmatrix} 12.800 \\ 2.048 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_{10} = \begin{bmatrix} 10.240 \\ 10.240 \end{bmatrix}.$

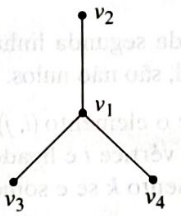
(b) A primeira população oscila entre dois estados, enquanto a segunda se aproxima do estado de repouso.

23. A população oscila em um ciclo composto de três estados (para a população relativa): se $0{,}1 < s \le 1$, a população real está crescendo; se $s = 0{,}1$, a população real está passando por um ciclo de comprimento 3; se $0 \le s < 0{,}1$, a população está declinando (e no fim irá se extinguir).

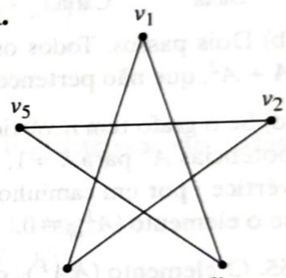
25. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

29.



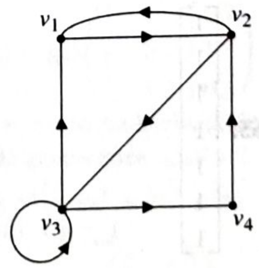
31.



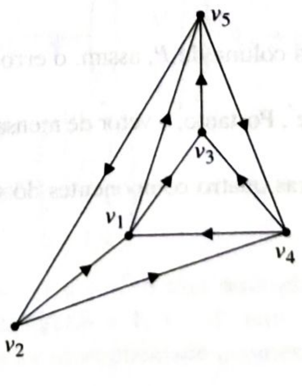
33. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

35. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

37.



39.



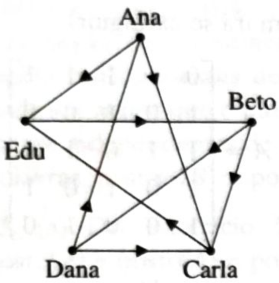
41. 2 **43.** 3

45. 0 **47.** 3

49. (a) O vértice i não é adjacente a nenhum outro vértice.

51. Se considerarmos apenas vitórias, P_2 estará em primeiro lugar; P_3, P_4 e P_6 estarão empatados em segundo lugar; P_1 e P_5 estarão empatados em terceiro. Se usarmos a noção de vitórias diretas e indiretas combinadas, os jogadores se classificarão desta maneira: P_2 em primeiro lugar, seguido por P_6, P_4, P_3, P_5 e P_1.

53. (a)



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Dois passos. Todos os elementos da segunda linha de $A + A^2$, que não pertencem à diagonal, são não nulos.

(d) Se o grafo tem n vértices, verifique o elemento (i, j) das potências A^k para $k = 1, \ldots, n - 1$. O vértice i é ligado ao vértice j por um caminho de comprimento k se e somente se o elemento $(A^k)_{ij} \neq 0$.

55. O elemento $(AA^T)_{ij}$ conta o número de vértices adjacentes a *ambos* os vértices i e j.

57. Bipartido **59.** Bipartido

61. Um único erro poderia mudar o vetor de código $\mathbf{c}_2 = [0, 1, 0, 1]$ em $\mathbf{c}' = [1, 1, 0, 1]$. No entanto, $\mathbf{c}'$ também poderia ser obtido do vetor de código $\mathbf{c}_4 = [1, 1, 1, 1]$ através de um único erro, por isso o erro não pode ser corrigido.

63. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **65.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

67. $P\mathbf{c}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ é a segunda coluna de P, assim, o erro está na segunda componente de $\mathbf{c}'$. Portanto, o vetor de mensagem correto (a partir das primeiras quatro componentes do vetor corrigido) é $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

69. (a) $P = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

(b) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) As colunas de P não são distintas.

71. (a) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; não é um código corretor de erros.

73. Um conjunto de candidatos para P e G é

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Capítulo 4

Exercícios 4.2

1. $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}, \lambda = 3$

3. $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \end{bmatrix} = -3\mathbf{v}, \lambda = -3$

5. $A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\mathbf{v}, \lambda = 3$

7. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

13. $\lambda = 1, E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \lambda = -1, E_{-1} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

15. $\lambda = 0, E_0 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \lambda = 1, E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

17. $\lambda = 2, E_2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right); \lambda = 3, E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

19. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \lambda = 1; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda = 2$

21. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \lambda = 2; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \lambda = 0$

23. $\lambda = 2, E_2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right); \lambda = 3, E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

25. $\lambda = 2, E_2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

27. $\lambda = 1 + i, E_{1+i} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}\right); \lambda = 1 - i, E_{1-i} =$ $\text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}\right)$

29. $\lambda = 1 + i, E_{1+i} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \lambda = 1 - i, E_{1-i} =$ $\text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

31. $\lambda = 1, 2$ **33.** $\lambda = 4$

Exercícios 4.3

1. 16 **3.** 0 **5.** -18
7. 6 **9.** -12 **11.** $a^2b + ab^2$
13. 4 **15.** $abdg$ **17.** 7
25. 8 **27.** -24 **29.** 0
31. 0 **33.** -24 **35.** 8
37. -4 **39.** -8 **45.** $k \neq 0, 2$
47. -6 **49.** $-\frac{3}{2}$ **51.** $(-2)3^n$

53. $\det(AB) = (\det A)(\det B) = (\det B)(\det A) = \det(BA)$

55. 0, 1 **57.** $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$

59. $x = -1, y = 0, z = 1$ **61.** $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

63. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercícios 4.4

1. (a) $\lambda^2 - 7\lambda + 12$ (b) $\lambda = 3, 4$

(c) $E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right); E_4 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) As multiplicidades algébrica e geométrica são todas iguais a 1.

3. (a) $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$ (b) $\lambda = -2, 1, 3$

(c) $E_{-2} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}\right); E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right); E_3 =$ $\text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 10 \end{bmatrix}\right)$

(d) As multiplicidades algébrica e geométrica são todas iguais a 1.

5. (a) $-\lambda^3 + \lambda^2$ (b) $\lambda = 0, 1$

(c) $E_0 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right); E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) $\lambda = 0$ tem multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 1; $\lambda = 1$ tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 1.

7. (a) $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27$
(b) $\lambda = 3$

(c) $E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

(d) $\lambda = 3$ tem multiplicidade algébrica igual a 3 e multiplicidade geométrica igual a 2.

9. (a) $\lambda^4 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 + 4\lambda - 12$
(b) $\lambda = -1, 2, 3$

(c) $E_{-1} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right); E_2 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right);$

$E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) $\lambda = -1$ e $\lambda = 3$ têm multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 1; $\lambda = 2$ tem multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 1.

11. (a) $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 3$

(b) $\lambda = -1, 1, 3$

(c) $E_{-1} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right); E_1 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right);$

$E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(d) $\lambda = -1$ e $\lambda = 3$ têm multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 1; $\lambda = 1$ tem multiplicidades algébrica e geométrica iguais a 2.

15. $\begin{bmatrix} 2^{-9} + 3 \cdot 2^{10} \\ -2^{-9} + 3 \cdot 2^{10} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} 2 \\ (2 \cdot 3^{20} - 1)/3^{20} \\ 2 \end{bmatrix}$

23. (a) $\lambda = -2, E_{-2} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right); \lambda = 5, E_5 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(b) (i) $\lambda = -\frac{1}{2}, E_{-1/2} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right); \lambda = \frac{1}{5}, E_{1/5} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

(iii) $\lambda = 0, E_0 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\right); \lambda = 7, E_7 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

27. $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 12$

35. $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} -9 & -11 \\ 22 & 13 \end{bmatrix}, A^4 = \begin{bmatrix} -31 & -24 \\ 48 & 17 \end{bmatrix}$

37. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, A^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{7}{25} & \frac{4}{25} \\ -\frac{8}{25} & -\frac{1}{25} \end{bmatrix}$

Exercícios 4.5

1. O polinômio característico de A é $\lambda^2 - 5\lambda + 1$, mas o de B é $\lambda^2 - 2\lambda + 1$.

3. Os autovalores de A são $\lambda = 2$ e $\lambda = 4$, mas os de B são $\lambda = 1$ e $\lambda = 4$.

5. $\lambda_1 = 4, E_4 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right); \lambda_2 = 3, E_3 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$

7. $\lambda_1 = 6, E_6 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right); \lambda_2 = -2, E_{-2} = \text{ger}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

9. Não diagonalizável

11. $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Não diagonalizável

15. $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 35.839 & -69.630 \\ -11.605 & 24.234 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} (3^k + 3(-1)^k)/4 & (3^{k+1} - 3(-1)^k)/4 \\ (3^k - (-1)^k)/4 & (3^{k+1} + (-1)^k)/4 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23.

$$\begin{bmatrix} (5 + 2^{k+2} + (-3)^k)/10 & (2^k - (-3)^k)/5 & (-5 + 2^{k+2} + (-3)^k)/10 \\ (2^{k+1} - 2(-3)^k)/5 & (2^k + 4(-3)^k)/5 & (2^{k+1} - 2(-3)^k)/5 \\ (-5 + 2^{k+2} + (-3)^k)/10 & (2^k - (-3)^k)/5 & (5 + 2^{k+2} + (-3)^k)/10 \end{bmatrix}$$

25. $k = 0$

27. $k = 0$

29. Todos os valores reais de k

35. Se $A \sim B$, existe uma matriz invertível P tal que $B = P^{-1}AP$. Assim, temos

$\text{tr}(B) = \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(APP^{-1}) = \text{tr}(AI) = \text{tr}(A)$

usando o Exercício 45 da Seção 3.3.

37. $P = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 10 & -3 \end{bmatrix}$ **39.** $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 0 \end{bmatrix}$

Exercícios 4.6

1. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}$, 6,000

(b) $\lambda_1 = 6$

3. (a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0{,}618 \end{bmatrix}$, 2,618

(b) $\lambda_1 = (3 + \sqrt{5})/2 \approx 2{,}618$

5. (a) $m_5 = 11{,}001, \mathbf{y}_5 = \begin{bmatrix} -0{,}333 \\ 1{,}000 \end{bmatrix}$

7. (a) $m_8 = 10{,}000, \mathbf{y}_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

9.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}26\\8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17,692\\5,923\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}18,018\\6,004\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17,999\\6,000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}18,000\\6,000\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,308\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,335\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,333\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,333\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,333\end{bmatrix}$
m_k	1	26	17,692	18,018	17,999	18,000

Logo, $\lambda_1 \approx 18$, $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix}1\\0,333\end{bmatrix}$.

11.

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,571\\2,857\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,755\\3,132\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,808\\3,212\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,823\\3,234\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,827\\3,240\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,286\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,377\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,404\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,411\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,413\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,414\end{bmatrix}$
m_k	1	7	7,571	7,755	7,808	7,823	7,827

Logo, $\lambda_1 \approx 7,827$, $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix}1\\0,414\end{bmatrix}$.

13.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}21\\15\\13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16,809\\12,238\\10,714\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17,011\\12,371\\10,824\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16,999\\12,363\\10,818\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17,000\\12,363\\10,818\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,714\\0,619\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,728\\0,637\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,727\\0,636\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,727\\0,636\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,727\\0,636\end{bmatrix}$
m_k	1	21	16,809	17,011	16,999	17,000

Logo, $\lambda_1 \approx 17$, $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix}1\\0,727\\0,636\end{bmatrix}$.

15. $\lambda_1 \approx 5$, $\mathbf{v}_1 \approx \begin{bmatrix}1\\0\\0,333\end{bmatrix}$

17.

k	0	1	2	3	4	5	6
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,571\\2,857\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,755\\3,132\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,808\\3,212\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,823\\3,234\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}7,827\\3,240\end{bmatrix}$
$R(\mathbf{x}_k)$	7	7,755	7,823	7,828	7,828	7,828	7,828
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,286\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,377\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,404\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,411\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,413\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0,414\end{bmatrix}$

19.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}21\\15\\13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16{,}809\\12{,}238\\10{,}714\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17{,}011\\12{,}371\\10{,}824\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}16{,}999\\12{,}363\\10{,}818\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}17{,}000\\12{,}363\\10{,}818\end{bmatrix}$
$R(\mathbf{x}_k)$	16,333	16,998	17,000	17,000	17,000	17,000
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}714\\0{,}619\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}728\\0{,}637\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}727\\0{,}636\end{bmatrix}$

21.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}8\\3{,}2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}667\\2{,}667\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}571\\2{,}286\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}500\\2{,}000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}444\\1{,}778\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}400\\1{,}600\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}364\\1{,}455\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}667\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}571\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}500\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}444\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}400\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}364\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}333\end{bmatrix}$
m_k	1	5	4,8	4,667	4,571	4,500	4,444	4,400	4,364

Como $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, m_k está convergindo devagar para a resposta exata.

23.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5\\4\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}2\\3{,}2\\0{,}2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}048\\3{,}048\\0{,}048\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}012\\3{,}012\\0{,}012\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}003\\3{,}003\\0{,}003\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}001\\3{,}001\\0{,}001\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}000\\3{,}000\\0{,}000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4{,}000\\3{,}000\\0{,}000\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}8\\0{,}2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}762\\0{,}048\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}753\\0{,}012\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}751\\0{,}003\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}750\\0{,}001\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}750\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}750\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0{,}750\\0\end{bmatrix}$
m_k	1	5	4,2	4,048	4,012	4,003	4,001	4,000	4,000

Nesse caso, $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$ e $E_4 = \text{ger}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

É claro que m_k está convergindo para 4 e $\mathbf{y}_k$ está convergindo para um vetor no auto-espaço E_4 — precisamente, $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 0{,}75\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

25.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$
m_k	1	1	-1	1	-1	1

Os autovalores exatos são complexos (i e $-i$), de modo que o método de potência não poderá convergir para nenhum autovalor dominante nem para nenhum autovetor dominante se começarmos com uma iteração inicial *real*. Em vez disso, o método de potência oscilará entre dois conjuntos de valores reais.

27.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3\\4\\3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2{,}500\\4{,}000\\2{,}500\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2{,}250\\4{,}000\\2{,}250\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2{,}125\\4{,}000\\2{,}125\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2{,}063\\4{,}000\\2{,}063\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}750\\1\\0{,}750\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}625\\1\\0{,}625\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}562\\1\\0{,}562\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}531\\1\\0{,}531\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}516\\1\\0{,}516\end{bmatrix}$
m_k	1	4	4	4	4	4

Os autovalores são $\lambda_1 = -12, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$, com autovetores

correspondentes $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

Como $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3$, o vetor inicial $\mathbf{x}_0$ tem uma componente nula na direção do autovetor dominante, de modo que o método de potência não pode convergir para o autovalor/autovetor dominante. Em vez disso, ele converge para um *segundo* par autovalor/autovetor, como os cálculos mostram.

29. Aplique o método de potência para $A-18I = \begin{bmatrix}-4 & 12\\ 5 & -15\end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}8\\-10\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}15{,}2\\-19\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}15{,}2\\-19\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}8\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}8\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}8\\1\end{bmatrix}$
m_k	1	-10	-19	-19

Conseqüentemente, -19 é o autovalor dominante de $A - 18I$ e $\lambda_2 = -19 + 18 = -1$ é o segundo autovalor de A.

31. Aplique o método de potência a $A - 17I = \begin{bmatrix}-8 & 4 & 8\\ 4 & -2 & -4\\ 8 & -4 & -8\end{bmatrix}$.

k	0	1	2	3
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}4\\-2\\-4\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-18\\9\\18\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-18\\9\\18\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-0{,}5\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-0{,}5\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-0{,}5\\-1\end{bmatrix}$
m_k	1	4	-18	-18
$R(\mathbf{x}_k)$	$-0{,}667$	-18	-18	-18

Nesse caso, não existe nenhum autovalor dominante. (Poderíamos escolher 18 ou -18 para $m_k, k \geq 2$.) Entretanto, o método do quociente de Rayleigh (Exercícios de 17 a 20) converge para -18. Então, -18 é o autovalor dominante de $A - 17I$, e $\lambda_2 = -18 + 17 = -1$ é o segundo autovalor de A.

33.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}5\\-0{,}5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}833\\1{,}056\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}798\\-0{,}997\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}800\\-1{,}000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}800\\-1{,}000\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}789\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}801\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}800\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}800\\1\end{bmatrix}$
m_k	1	0,5	1,056	−0,997	−1,000	−1,000

Então, o autovalor de A que é o menor em magnitude é $1/(-1) = -1$.

35.

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}500\\0{,}000\\0{,}500\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}500\\0{,}333\\-0{,}500\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}500\\0{,}111\\-0{,}500\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}500\\0{,}259\\-0{,}500\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}500\\0{,}160\\-0{,}500\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1{,}000\\0{,}000\\1{,}000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1{,}000\\-0{,}667\\1{,}000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1{,}000\\-0{,}222\\1{,}000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1{,}000\\-0{,}518\\1{,}000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1{,}000\\-0{,}321\\1{,}000\end{bmatrix}$
m_k	1	−0,500	−0,500	−0,500	−0,500	−0,500

É claro que m_k converge para −0,5, por isso o menor autovalor de A é $1/(-0{,}5) = -2$.

37. Os cálculos são os mesmos que os do Exercício 33.

39. Aplicamos o método de potência inverso a $A - 5I = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 6\\-1 & -2 & 1\\6 & 0 & -1\end{bmatrix}$. Tomando $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, temos

k	0	1	2	3
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}200\\-0{,}500\\0{,}200\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}080\\-0{,}500\\-0{,}080\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}032\\-0{,}500\\0{,}032\end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}400\\1\\-0{,}400\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0{,}160\\1\\0{,}160\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-0{,}064\\1\\-0{,}064\end{bmatrix}$
m_k	1	−0,500	−0,500	−0,500

É claro que m_k converge para −0,5, por isso o autovalor de A mais próximo de 5 é $5 + 1/(-0{,}5) = 5 - 2 = 3$.

41. 0,732 **43.** −0,619

Exercícios 4.7

1. Não regular **3.** Regular

5. Não regular **7.** $L = \begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$

9. $L = \begin{bmatrix}0{,}304 & 0{,}304 & 0{,}304\\0{,}354 & 0{,}354 & 0{,}354\\0{,}342 & 0{,}342 & 0{,}342\end{bmatrix}$

11. $1, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ **13.** $2, \begin{bmatrix}16\\4\\1\end{bmatrix}$

15. A população é crescente, decrescente e constante, respectivamente.

17.

$$P^{-1}LP = \begin{bmatrix} b_1 & b_2s_1 & b_3s_1s_2 & \cdots & b_{n-1}s_1s_2\cdots s_{n-2} & b_ns_1s_2\cdots s_{n-1}\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de L é $(\lambda^n - b_1\lambda^{n-1} - b_2s_1\lambda^{n-2} - b_3s_1s_2\lambda^{n-3} - \cdots - b_n s_1s_2\cdots s_{n-1})(-1)^n$.

19. $\lambda \approx 1{,}746$, $\mathbf{p} \approx \begin{bmatrix}0{,}660\\0{,}264\\0{,}076\end{bmatrix}$

21. $\lambda \approx 1{,}092$, $\mathbf{p} \approx \begin{bmatrix} 0{,}535 \\ 0{,}147 \\ 0{,}094 \\ 0{,}078 \\ 0{,}064 \\ 0{,}053 \\ 0{,}029 \end{bmatrix}$

25. (a) $h \approx 0{,}082$ **29.** $3, \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

31. $3, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ **33.** Redutível

35. Irredutível **41.** 1, 2, 4, 8, 16

43. 0, 1, 1, 0, −1 **45.** $x_n = 4^n - (-1)^n$

47. $y_n = (n - \frac{1}{2})2^n$

49. $b_n = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}[(1 + \sqrt{3})^n - (1 - \sqrt{3})^n]$

55. (a) $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 5, d_5 = 8$

(b) $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$

(c) $d_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

57. A solução geral é $x(t) = -3C_1e^{-t} + C_2e^{4t}$, $y(t) = 2C_1e^{-t} + C_2e^{4t}$. A solução particular é $x(t) = -3e^{-t} + 3e^{4t}$, $y(t) = 2e^{-t} + 3e^{4t}$.

59. A solução geral é $x_1(t) = (1+\sqrt{2})C_1e^{\sqrt{2}t} + (1-\sqrt{2})C_2e^{-\sqrt{2}t}$, $x_2(t) = C_1e^{\sqrt{2}t} + C_2e^{-\sqrt{2}t}$. A solução particular é $x_1(t) = (2+\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t}/4 + (2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t}/4$, $x_2(t) = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}/4 - \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}t}/4$.

61. A solução geral é $x(t) = -C_1 + C_3e^{-t}$, $y(t) = C_1 + C_2e^t - C_3e^{-t}$, $z(t) = C_1 + C_2e^t$. A solução particular é $x(t) = 2 - e^{-t}$, $y(t) = -2 + e^t + e^{-t}$, $z(t) = -2 + e^t$.

63. (a) $x(t) = -120e^{8t/5} + 520e^{11t/10}$, $y(t) = 240e^{8t/5} + 260e^{11t/10}$ A linhagem X morre após aproximadamente 2,93 dias; a linhagem Y continua a crescer.

65. $a = 10$, $b = 20$; $x(t) = 10e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) + 10$, $y(t) = 10e^t(\cos t - \operatorname{sen} t) + 20$. A espécie Y morre quando $t \approx 1{,}22$.

69. $x(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$

Capítulo 5

Exercícios 5.2

1. Ortogonal **3.** Não ortogonal

5. Ortogonal **7.** $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$

9. $[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ **11.** Ortonormal

13. $\begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3\sqrt{5} \\ 4/3\sqrt{5} \\ -5/3\sqrt{5} \end{bmatrix}$

15. Ortonormal

17. Ortogonal, $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

19. Ortogonal, $\begin{bmatrix} \cos\theta \operatorname{sen}\theta & \cos^2\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}^2\theta & -\cos\theta\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

21. Não ortogonal

27.
$$\begin{aligned}
\cos(\angle(Q\mathbf{x}, Q\mathbf{y})) &= \frac{(Q\mathbf{x})\cdot(Q\mathbf{y})}{\|Q\mathbf{x}\|\|Q\mathbf{y}\|} \\
&= \frac{(Q\mathbf{x})^TQ\mathbf{y}}{\sqrt{(Q\mathbf{x})^TQ\mathbf{x}}\sqrt{(Q\mathbf{y})^TQ\mathbf{y}}} \\
&= \frac{\mathbf{x}^TQ^TQ\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}^TQ^TQ\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}^TQ^TQ\mathbf{y}}} \\
&= \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|} \\
&= \cos(\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y}))
\end{aligned}$$

29. Rotação, $\theta = 45°$ **31.** Reflexão, $y = \sqrt{3}x$

33. (a) $A(A^T + B^T)B = AA^TB + AB^TB = IB + AI = B + A = A + B$

(b) Da parte (a),
$$\begin{aligned}
\det(A + B) &= \det(A(A^T + B^T)B) \\
&= \det A \det(A^T + B^T)\det B \\
&= \det A \det((A + B)^T)\det B \\
&= \det A \det(A + B) \det B
\end{aligned}$$

Assuma que $\det A + \det B = 0$ (de modo que $\det B = -\det A$) mas que $A + B$ é invertível. Então, $\det(A + B) \neq 0$, assim $1 = \det A \det B = \det A(-\det A) = -(\det A)^2$. Isso é impossível, e então concluímos que $A + B$ não pode ser invertível.

Exercícios 5.3

1. $W^\perp = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x + 2y = 0\right\}, B^\perp = \left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

5. $W^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x - y + 3z = 0 \right\}, \mathcal{B}^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

7. $\text{lin}(A) = \{[1 \quad 0 \quad 1], [0 \quad 1 \quad -2]\}$, $\text{anul}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

9. $\text{col}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$, $\text{anul}(A^T) =$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

11. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$ **13.** $\left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

15. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ **17.** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix}$

19. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$ **21.** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -2 \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

25. Não

Exercícios 5.4

1. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}; \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix},$

$\mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

5. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ **7.** $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{8}{9} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{38}{9} \\ -\frac{38}{9} \\ \frac{19}{9} \end{bmatrix}$

9. $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\}$

11. $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{3}{35} \\ \frac{34}{35} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{15}{34} \\ 0 \\ \frac{9}{34} \end{bmatrix} \right\}$

13. $\begin{bmatrix} 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

15. $R = \begin{bmatrix} 3 & 9 & \frac{1}{3} \\ 0 & 6 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

17. $A = AI$

19. $A^{-1} = (QR)^{-1} = R^{-1}Q^{-1} = R^{-1}Q^T =$

$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & -1/2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 3/2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

21. Suponha que $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Então, $A\mathbf{x} = QR\mathbf{x} = Q\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Como $A\mathbf{x}$ representa uma combinação linear de colunas de A (que são linearmente independentes), precisamos ter $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Conseqüentemente, R é invertível, pelo Teorema Fundamental.

Exercícios 5.5

1. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

3. $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7. $Q = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix},$

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

11. $Q^TAQ = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{bmatrix} = D$

13. (a) Se A e B são ortogonalmente diagonalizáveis, então cada uma é simétrica, pelo Teorema Espectral. Logo, $A + B$ é simétrica, pelo Exercício 35 da Seção 3.3, e então é ortogonalmente diagonalizável, pelo Teorema Espectral.

15. Se A e B são ortogonalmente diagonalizáveis, então cada uma é simétrica, pelo Teorema Espectral. Como $AB = BA$, AB também é simétrica, pelo Exercício 36 da Seção 3.3. Então, AB é ortogonalmente diagonalizável, pelo Teorema Espectral.

17. $A = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$

Exercícios 5.6

1. $G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, C' = C$

3. $G' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, C' é equivalente a C, mas $C' \neq C$

5. $P' = [1 \quad 0 \quad 1]$, C' é equivalente a C, mas $C' \neq C$

7. $P' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, C' é equivalente a C, mas $C' \neq C$

9. $C^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

11. $C^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

13. $G^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $G^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $G^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, P^{\perp} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

23. $2x^2 + 6xy + 4y^2$

25. 123

27. -5

29. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$

33. $\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

35. $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{bmatrix}, y_1^2 + 6y_2^2$

37. $Q = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & -1/3 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 2/3 \\ 1/\sqrt{5} & 0 & 2/3 \end{bmatrix}, 9y_1^2 + 9y_2^2 - 9y_3^2$

39. $Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{bmatrix}, 2(x')^2 + (y')^2 - (z')^2$

41. Positiva definida

43. Negativa definida

45. Positiva definida

47. Indefinida

51. Para cada vetor $\mathbf{x}$, temos que $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T B^T B\mathbf{x} = (B\mathbf{x})^T(B\mathbf{x}) = \|B\mathbf{x}\|^2 \geq 0$. Se $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$, então $\|B\mathbf{x}\|^2 = 0$, de modo que $B\mathbf{x} = 0$. Como B é invertível, isso implica que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Logo, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, e então $A = B^T B$ é positiva definida.

53. (a) Todo autovalor de cA é da forma $c\lambda$ para algum autovalor λ de A. Pelo Teorema 4, $\lambda > 0$ e $c\lambda > 0$, pois c é positivo. Conseqüentemente, cA é positiva definida, pelo Teorema 4.

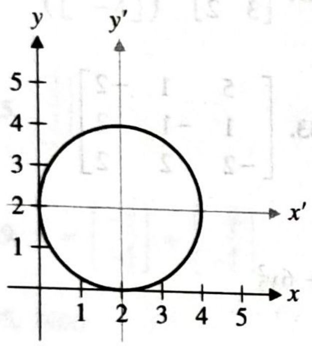
(c) Seja $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Então, $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} > 0$ e $\mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0$, pois A e B são positivas definidas. Mas então $\mathbf{x}^T(A + B)\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A\mathbf{x} + \mathbf{x}^T B\mathbf{x} > 0$, e então $A + B$ é positiva definida.

55. O valor máximo de $f(\mathbf{x})$ é 2 quando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$; o valor mínimo de $f(\mathbf{x})$ é 0 quando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

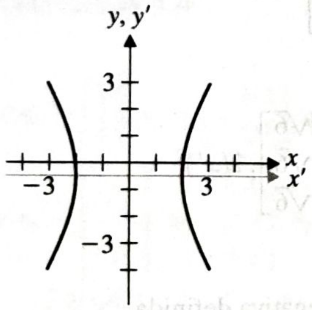
57. O valor máximo de $f(\mathbf{x})$ é 4 quando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$; o valor mínimo de $f(\mathbf{x})$ é 1 quando $\mathbf{x} = \pm\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ ou $\pm\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.

61. Elipse **63.** Parábola **65.** Hipérbole

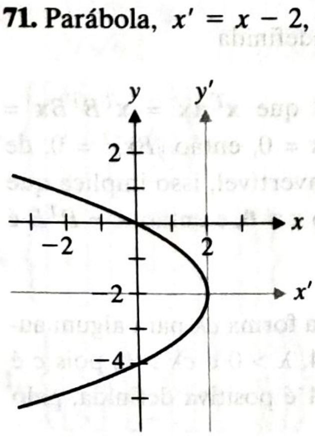
67. Círculo, $x' = x - 2$, $y' = y - 2$, $(x')^2 + (y')^2 = 4$



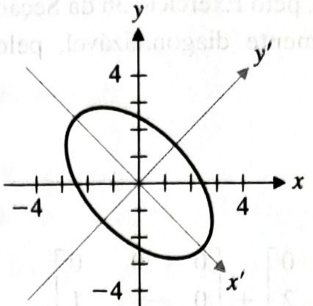
69. Hipérbole, $x' = x$, $y' = y + \frac{1}{2}$, $(x')^2/4 - (y')^2/9 = 1$



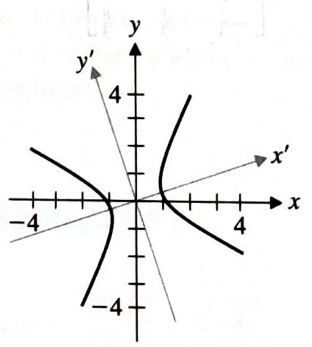
71. Parábola, $x' = x - 2$, $y' = y + 2$, $x' = -\frac{1}{2}(y')^2$



73. Elipse, $(x')^2/4 + (y')^2/12 = 1$



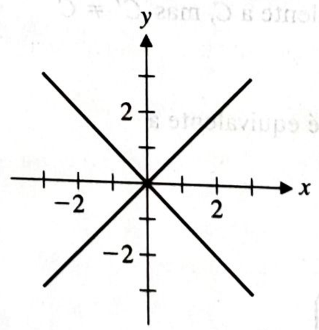
75. Hipérbole, $(x')^2 - (y')^2 = 1$



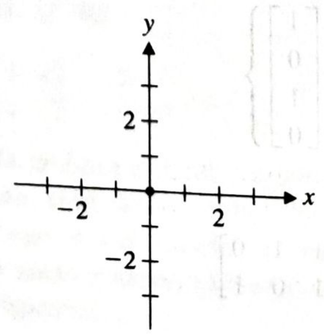
77. Elipse, $(x'')^2/50 + (y'')^2/10 = 1$

79. Hipérbole, $(x'')^2 - (y'')^2 = 1$

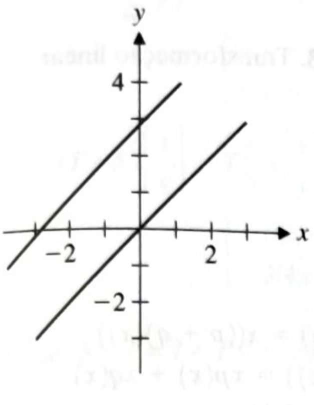
81. Degenerada (duas retas)



83. Degenerada (um ponto)



85. Degenerada (duas retas)



89. Hiperbolóide de uma folha, $(x')^2 - (y')^2 + 3(z')^2 = 1$

91. Parabolóide hiperbólico, $z = -(x')^2 + (y')^2$

93. Parabolóide hiperbólico, $x' = -\sqrt{3}(y')^2 + \sqrt{3}(z')^2$

95. Elipsóide, $3(x'')^2 + (y'')^2 + 2(z'')^2 = 4$

Capítulo 6

Exercícios 6.2

1. Espaço vetorial

3. Não é um espaço vetorial; o axioma 1 não vale.

5. Não é um espaço vetorial; o axioma 8 não vale.

7. Espaço vetorial

9. Espaço vetorial

11. Espaço vetorial

15. Espaço vetorial complexo

17. Não é um espaço vetorial complexo; o axioma 6 não vale.

19. Não é um espaço vetorial; os axiomas 1, 4 e 6 não valem.

21. Não é um espaço vetorial; as operações de adição e multiplicação nem são as mesmas.

25. Subespaço

27. Subespaço

29. Não é um subespaço

31. Subespaço

33. Subespaço

35. Subespaço

37. Não é um subespaço

39. Subespaço

41. Subespaço

43. Não é um subespaço

45. Não é um subespaço

47. O está em Mag_3^0. Se A e B estão em Mag_3^0 todas as somas de linhas, colunas e diagonais são 0. Logo, isso também é verdadeiro para $A + B$ e cA para todo escalar c. Assim, $A + B$ e cA também estão em Mag_3^0, e então Mag_3^0 é um subespaço de M_{33}.

49. Tome U como o eixo x e W como o eixo y, por exemplo. Então, $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ estão em $U \cup W$, mas $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ não está.

51. Não

53. Sim; $s(x) = (3 + 2t)p(x) + (1 + t)q(x) + tr(x)$ para todo escalar t.

55. Sim; $h(x) = f(x) + g(x)$

57. Não **59.** Não **61.** Sim

Exercícios 6.3

1. Linearmente independente

3. Linearmente dependente;

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\-1 & 7\end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix}-1 & 1\\-2 & 2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3 & 0\\1 & 1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0 & 2\\-3 & 1\end{bmatrix}$$

5. Linearmente independente

7. Linearmente dependente; $3x + 2x^2 = 7x - 2(2x - x^2)$

9. Linearmente independente

11. Linearmente dependente; $1 = \text{sen}^2 x + \cos^2 x$

13. Linearmente dependente; $\ln(x^2) = -2\ln 2 \cdot 1 + 2 \cdot \ln(2x)$

17. (a) Linearmente independente

(b) Linearmente dependente

19. Base

21. Não é uma base

23. Não é uma base

25. Não é uma base

27. $[A]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\4\end{bmatrix}$

29. $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}6\\-1\\3\end{bmatrix}$

35. $\dim V = 2$, $\mathcal{B} = \{1 - x, 1 - x^2\}$

37. $\dim V = 3$, $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

39. $\dim V = 2$, $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$

41. $(n^2 - n)/2$

43. 3

45. $\{1 + x, 1 + x + x^2, 1\}$

47. $\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$

49. $\{1, 1 + x\}$

51. $\{1 - x, x - x^2\}$

53. $\{\text{sen}^2 x, \cos^2 x\}$