Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras

Professor Reginaldo Demarque

Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Listas de Exercícios

Conteúdo

1 Coordenadas, distância entre pontos e Vetores no plano

1.1 — Determine a distância entre os pontos P e Q:

a) $P = (1, 3)$ e $Q = (2, 4)$.

b) $P = (1, 3)$ e $Q = (-1, 2)$.

c) $P = (2, -4)$ e $Q = (-2, 3)$.

d) $P = (1/2, -2/3)$ e $Q = (-5/2, 4/3)$.

e) $P = (\sqrt{3}, 1)$ e $Q = (\sqrt{6}, 2)$.

f) $P = (\pi, 1)$ e $Q = (2, 3)$.

1.2 — Calcule a área e o perímetro do triângulo cujos vértices são $A = (-1, 3)$, $B = (1, 0)$ e $C = (5, 0)$.

1.3 — Determine a equação para os pontos do plano equidistantes de $P = (1, -2)$ e $Q = (3, 4)$.

1.4 — Um ponto $P = (x, y)$ do plano se move de maneira que a soma dos quadrados das suas distâncias aos pontos $(2, 0)$ e $(-1, 0)$ é sempre igual a 5. Encontre uma equação que relaciona as coordenadas x e y do ponto P, determinando o lugar geométrico descrito pelo ponto P. Você consegue representar este conjunto no plano?

1.5 — Para cada uma das equações abaixo esboce no plano OXY o conjunto dos pontos (x, y) cujas coordenadas satisfazem essa equação:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

b) $y^2 - 6y + 9 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 1 = 0$;

d) $|x| + y = 0$;

e) $(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7y + 6) = 0$;

f) $(x^2 + 1)(x - y) = 0$;

g) $x^3 + x - x^2y - y = 0$;

h) $x^2 + y^2 = x$;

i) $x^2 + y^2 + y = 0$;

j) $x^2 + y^2 + x + y = 1$

k) $x^3 + xy^2 - x^2y - x + y - y^3 = 0$;

1.6 — Esboce o conjunto $X = \{(x, y); |y| \leq x \leq 3\}$.

1.7 — Em cada um dos casos abaixo, esboce o conjunto dos pontos cujas coordenadas (x, y) cumprem as condições especificadas:

a) $|x-3|<1$;

b) $|x-3|=1$;

c) $|x-3|\leq 1$ e $|y-2|\leq 5$;

d) $|x-3|\leq 1$ e $|y-2|\leq 5$;

e) $|x|\geq 2$ e $|y|\geq 3$;

f) $xy=0$;

g) $x>y$;

h) $x\geq y$;

i) $0\leq x\leq y\leq 1$;

j) $x^2<y^2$;

k) $x^2\leq y^2$;

1.8 – Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam dos pontos $(1,3)$ e $(5,1)$.

1.9 – Determine a equação do lugar geométrico dos pontos que equidistam do eixo OX e do ponto $(0,2)$.

1.10 – São dados dois pontos $A=(1,3)$ e $B=(5,1)$. Determine o lugar geométrico dos pontos P tais que $d(A,P)^2+d(B,P)^2=k^2$ onde K é uma constante dada. Determine para que valores de k o problema tem solução.

1.11 – Se $A=(1,1)$, $B=(2,2)$, $C=(-1,0)$ e $D=(0,1)$, então $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$? E $AB=CD$? Justifique.

1.12 – Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

a) $AB\in\overrightarrow{AB}$

b) $AB\equiv CD\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow A=C$ e $B=C$

d) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow AC\equiv BD$

2 Operações com Vetores e Produto Escalar

2.1 — Localize os pontos $A = (1,1)$, $B = (-3,0)$, $C = (4,1)$, $D = (2,-3)$, $E = (3,-2)$ e $F = (-4,-3)$ no plano cartesiano e efetue os seguintes cálculos:

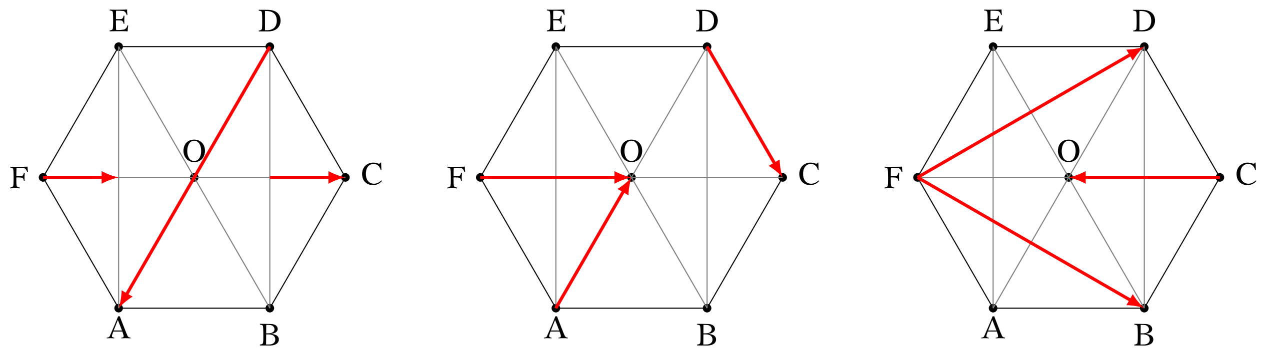
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

b) $2(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EC}) + 3\overrightarrow{EF} - 2\overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EA}$

d) $+\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{ED} - (\overrightarrow{EB} - \overrightarrow{DC})$

2.2 — Nas figuras abaixo os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.



(a) (b) (c)

2.3 — Prove, usando a definição de soma de vetores, que $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.

2.4 — Prove que, se $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$, então $A = B$.

2.5 — Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores no plano, então $\|\vec{u}\|\vec{v}$ e $\|\vec{v}\|\vec{u}$ são vetores de mesmo comprimento.

b) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ têm mesmo comprimento, então $\vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{u} + \vec{v}$ são ortogonais.

c) Se $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot w$, então $\vec{v} = \vec{w}$.

d) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores no plano, então $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

e) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores no plano, então $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$.

f) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são vetores no plano, então $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$.

g) Se $\vec{u} = (x, 1)$ e $\vec{v} = (x, -1)$ são ortogonais, então $x = 1$ ou $x = -1$.

h) Existe uma reta que contém os pontos $A = (1, 3)$, $B = (-1, 2)$ e $C = (5, 4)$.

i) O triângulo determinado pelos vértices $A = (1, 0)$, $B = (0, 2)$ e $C = (-2, 1)$ é retângulo.

j) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, então $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$.

2.6 — Ache o ângulo entre os vetores

a) $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (1, 1)$

b) $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (3, 2)$

c) $\vec{u} = (1, 1)$ e $\vec{v} = (1, 2)$

d) $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (\sqrt{3}, 1)$

2.7 — Encontre os vetores com norma $3\sqrt{3}$ e perpendiculares a $\vec{v} = (2, 3)$. Quais formam ângulo agudo com $(1, 0)$?

2.8 — Sabendo que $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\overrightarrow{v}\| = 1$ e que o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é de $\frac{\pi}{6}$ radianos, ache a medida em radianos do ângulo entre $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

2.9 — Se $\vec{u}$ tem norma 2, qual é a norma do vetor $\vec{v} = -3\vec{u}$?

2.10 — Dados $A = (1, -1)$, $B = (-1, 1)$ e $C = (1, 3)$, determine o ponto D tal que o quadrilátero ABDC seja um paralelogramo.

2.11 — Dados $A = (1, 1)$ e $B = (3, -1)$, determine os pontos que dividem o segmento $\overline{AB}$ em três partes iguais.

2.12 — Considere o triângulo cujos vértices são os pontos $A = (5, 1)$, $B = (1, 3)$ e $C = (0, 2)$. Note que um ponto P qualquer entre A e C satisfaz $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AC}$, para algum $\lambda \in (0, 1)$. Determine as coordenadas do ponto P que é o pé da reta perpendicular baixada de B sobre $\overline{AC}$. Use as informações para determinar a área do triângulo ABC.

2.13 — Dado o vetor $\vec{u} = (1, 4\sqrt{3})$, determine os vetores $\vec{v}$ que fazem ângulo de $30°$ com o vetor $\vec{u}$ e têm o mesmo comprimento deste vetor.

2.14 — Três vértices de um paralelogramo ABCD são $A = (-2, -7/2)$, $B = (3, 0)$ e $D = (-2, -3/2)$. Pede-se:

a) Determine as coordenadas do vértice C.

b) Determine um vetor cuja direção seja a bissetriz do ângulo agudo desse paralelogramo.

* **2.15 —** O objetivo deste exercício é deduzir uma fórmula para a rotação de um vetor por um ângulo θ.

a) Dado $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, determine as coordenadas dos vetores unitários $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ que fazem um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ com $\vec{v}$.

b) Dado um vetor unitário $\vec{v} = (a, b)$, determine as coordenadas dos vetores unitários $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ que fazem um ângulo de $\frac{\pi}{6}$ com $\vec{v}$.

c) Dado um vetor unitário $\vec{v} = (a, b)$, mostre que as coordenadas dos vetores unitários $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ que fazem um ângulo de θ com $\vec{v}$ são dados por:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ e } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

d) Mostre que a mesma fórmula vale para $\vec{v}$ não seja unitário.

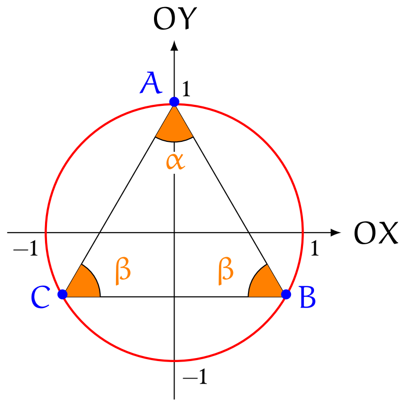
Observação: A primeira matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{1}$$

é chamada de **matriz de rotação** por um ângulo θ e ela gira o vetor $\vec{v}$ por um ângulo θ no sentido anti-horário. A segunda matriz gira o vetor no sentido horário e é igual a $R_{(-\theta)}$.

* **2.16 –** Determine as coordenadas dos vértices do pentágono inscrito no círculo de centro na origem e raio 1, sabendo-se que um dos vértice é o ponto $A = (0, -1)$.

* **2.17 –** Considere o triângulo isósceles ABC inscrito no círculo de centro na origem e raio 1, como na figura abaixo.

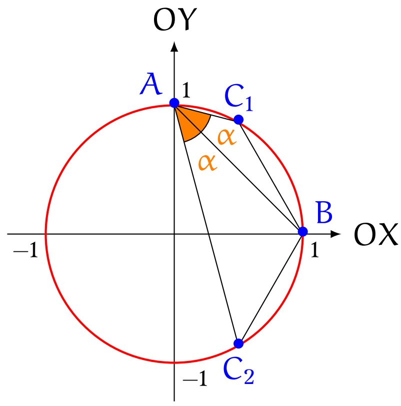


a) Determine os pontos B e C sabendo-se que $A = (0, 1)$ e $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

b) Repita o exercício para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

c) Deduza uma fórmula geral para um ângulo qualquer $\alpha \in (0, \pi)$.

** **2.18 –** Dados $A = (0, 1)$ e $B = (1, 0)$, considere os pontos C_1 e C_2 do círculo que formam com A e B triângulos cujo ângulo do vértice A é de α, como na figura abaixo.



a) Determine os pontos C_1 e C_2 para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

b) Repita o exercício para $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

c) Deduza uma fórmula geral para um ângulo qualquer $\alpha \in (0, \pi)$.

* **2.19 –** Mostre que:

a) Se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$, então $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ divide o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao meio.

b) $\left| \|\overrightarrow{u}\| - \|\overrightarrow{v}\| \right| \leq \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$.

c) $|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são paralelos.

3 Projeção Ortogonal e Aplicações do Produto Escalar

3.1 – Verifique se é verdadeira ou falsa cada afirmação e justifique sua resposta.

a) Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não são nulos e $Pr_{\vec{v}}\vec{u} = 0$, então $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) Se $\vec{v}$ é múltiplo do vetor $\vec{u}$, então $Pr_{\vec{u}}\vec{v} = \vec{v}$.

3.2 – Determine $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$, sabendo-se que $\vec{v}$ é unitário e faz ângulo de $30°$ com $\vec{u}$ de comprimento 2.

3.3 – Marque as alternativas verdadeiras com respeito à $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$.

a) é um número real.

b) é um vetor perpendicular ao vetor $\vec{v}$.

c) é um vetor paralelo ao vetor $\vec{v}$.

d) $\vec{v}$ pode ser nulo.

e) $\vec{u}$ pode ser nulo.

3.4 – Determine a $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$, onde $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (2,2)$.

3.5 – Seja $\vec{u}$ um vetor de comprimento 6 que faz ângulo de $45°$ com o eixo x. Decomponha este vetor como a soma dos vetores unitário paralelos aos eixos coordenados $\vec{i}$ e $\vec{j}$.

3.6 – Calcule a área do triângulo ΔABC, onde $A = (2,1)$, $B = (4,3)$ e $C = (3,5)$.

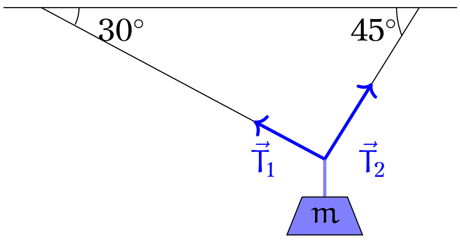
3.7 – Determine a norma da projeção do vetor $\vec{u}$ sobre o vetor $\vec{v}$.

* **3.8 –** Dados $\vec{u} = (4,-1)$ e $\vec{v} = (2,-1)$ encontre dois vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ tais que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$, $\vec{u}_1$ é paralelo a $\vec{v}$ e $\vec{u}_2$ é perpendicular a $\vec{v}$. Esboce essa decomposição.

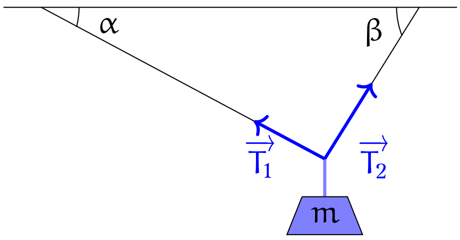
3.9 – Determine os pontos C, com duas coordenadas iguais, que forma com os pontos $A = (2,0)$ e $B = (0,1)$ um triângulo de área 2.

3.10 – Determine os pontos C sobre o eixo OY que forma com $A = (3,1)$ e $B = (1,-3)$ um triângulo de área 3.

* **3.11 –** Uma carga com massa de m kg está pendurada em dois cabos, como mostrado na figura abaixo. Sabendo-se que o módulo da tensão $\vec{T}_2 = 100N$, encontre o valor da massa m.

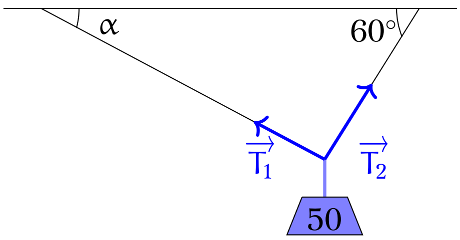


** **3.12 –** Uma carga com massa de m kg está pendurada em dois cabos, como mostrado na figura abaixo. Determine os módulos das tensões $\vec{T_1}$ e $\vec{T_2}$ em ambos os fios em função de m, α, β e da aceleração da gravidade g.



Dica: Lembre-se que $\cos(90-\theta) = \operatorname{sen}\theta$.

** **3.13 –** Considere um peso de 50 N suspenso por dois fios, conforme a figura a seguir. Se o norma de $\vec{T}_1$ é de 35 N, encontre o ângulo α e a norma do vetor $\vec{T}_2$.



4 Equações da Reta

4.1 – Qual ponto do eixo OX é equidistante dos pontos $A = (1, -3)$ e $B = (3, 1)$?

4.2 – Para cada reta e ponto dados abaixo encontre a equação da reta paralela e da reta perpendicular passando pelo ponto:

a) $y = -2x + 5$, $P = (1, 1)$;

b) $3x + 2y = 10$, $P = (0, 1)$;

c) $y = 3$, $P = (-1, 2)$;

d) $y = \pi x + \pi$, $P = (\sqrt{2}, 3)$.

4.3 – Considere os pontos $A = (3, 1)$ e $B = (1, -3)$. Determine os pontos sobre a reta $r : x + 2y = 5$ que formem com A e B um triângulo de área 25.

4.4 – Dados $A = (3, 2)$ e $B = (2, -1)$ determine os pontos sobre a reta horizontal passando por A que formam com A e B um triângulo de área 3.

4.5 – Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (3, 2)$ e $B = (2, -1)$ e cujo centro pertence à reta $x + y - 1 = 0$.

4.6 – Determine as coordenadas do ponto P interseção do círculo de centro na origem e raio 1 com a reta que passa pelos ponto $A = (0, 1)$ e $B = (2, 0)$.

* **4.7 –** Encontre as coordenadas do ponto P interseção do círculo de centro $(0, 1)$ e raio 1 com a reta que passa pelo ponto $(0, 2)$ e corta o eixo OX em um ponto $(x_0, 0)$ qualquer.

4.8 – Ache os pontos da reta $y = 2x + 1$ que estão situados à distância 2 da origem.

4.9 – Qual é o ponto de ordenada 3 na reta paralela a $3x - 2y = 2$ passando pelo ponto $A = (5, -1)$?

4.10 – Qual é o ponto de interseção da reta $ax + by = c$ com a reta OA, onde $A = (a, b)$?

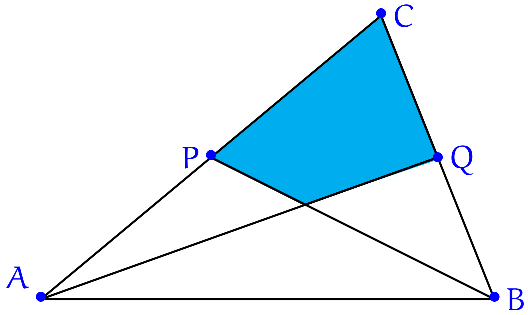
4.11 – Em que pontos a reta $ax + by = c$ corta oes eixos OX e OY?

4.12 – Obtenha equações paramétricas para a reta que passa pelo ponto $(2, 3)$ e é perpendicular à reta $5x - 3y = 2$.

4.13 – Determine a e b de modo que as equações $x = at + 1$, $y = bt + 5$ sejam uma representação paramétrica da reta $y = 2x + 3$.

4.14 – Que ângulos faz a reta $3x + 4y = 7$ com os eixos OX e OY?

** **4.15 –** No triângulo a seguir, os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ medem respectivamente 4, 3 e 2. Os pontos P e Q são os pontos médios dos segmentos a que pertencem. Calcule a área sombreada.



* **4.16 –** Dados os pontos $A = (2, 4)$, $B = (3, 1)$ e $C = (5, 3)$, obtenha as equações das retas mediatrizes dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ e determine as coordenadas da interseção dessas retas. A partir daí, ache a equação da circunferência que passa por A, B e C.

4.17 – No exercício anterior, mantenha os pontos A e B mas substitua C pelo ponto $D = (1, 7)$. Qual será a resposta?

4.18 – Qual é a equação da circunferência que passa pelos pontos $A = (1, 2)$, $B = (3, 4)$ e tem o centro sobre o eixo OY?

5 Posição Relativa entre Retas e ângulos

5.1 — A reta definida pelas equações paramétricas $x = 2t + 1$ e $y = 3t + 8$ forma um ângulo agudo α com a reta $5x + 11y = 6$. Determine α.

5.2 — Determine se as seguintes retas são paralelas, concorrentes ou coincidentes.

$$r : \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + t \end{cases} \quad \text{e } s : 2x + 6y + 7 = 0.$$

5.3 — Considere a reta $r : x + y - 1 = 0$ e os pontos $A = (3, 2)$ e $B = (2, -1)$.

a) Determine o ângulo entre r e a reta que passa por A e B.

b) Determine a posição relativa entre a reta r e a reta $s : \begin{cases} x = 2 - 2t, \\ y = 2t, \ t \in R. \end{cases}$

5.4 — Determine os valores de a, b e c tais que, simultaneamente, r e s sejam coincidentes e que s e u sejam paralelas.

$$r : \begin{cases} x = 8 - 2at, \\ y = 3 + bt, \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -6 + at \\ y = 5 + ct, \ t \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad u : x - ay + 1 = 0.$$

5.5 — Determine as equações paramétricas da reta bissetriz do ângulos formados pela retas:

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 - t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = -2 - 3t \\ y = 5 + 4t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Dica: use o exercício 2.19 (a).

* **5.6 —** Em cada caso abaixo determine as retas que passam pelo ponto P e formam o ângulo θ com a reta r :

a) $P = (0, 0)$, $\theta = 45°$ e $r : \frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2} = 1$

b) $P = (1, 1)$, $\theta = 30°$ e $r : x - 3y = 1$;

c) $P = (-5, 3)$, $\theta = 90°$ e $r : y = 2x - 1$;

d) $P = (-1, 1)$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$ e $r : 3x + 2y = 1$.

e) $P = (1, 2)$, $\theta = 60°$ e $r : y = -2x + 4$.

6 Distâncias no Plano

6.1 – Quais são as paralelas situadas à distância 5 da reta $3x - 4y = 1$?

6.2 – Qual é a distância entre as retas $x - 3y = 4$ e $2x - 6y = 1$?

6.3 – Determine a distância Δ do ponto $P = (3, 1)$ à reta $x + 2y = 3$. Ache o ponto $Q = (x, y)$ sobre esta reta, tal que $d(P, Q) = \Delta$

6.4 – Dadas as retas $r : ax + y - 3 = 0$, $s : y = bx$ e $m : x - y + b = 0$, determine todos os valores possíveis para a e b para os quais tenhamos simultaneamente, $r \perp s$ e $d(O, m) = a\sqrt{8}$, onde O é a origem do sistema de coordenadas.

6.5 – Considere o círculo Γ de raio 4, com centro na origem. Mostre que o ponto $P = (5, 1)$ está no exterior de Γ. Determine as retas que passam por P e tangencial o círculo Γ.

6.6 – Deduza uma equação do círculo de centro na origem e tangente à reta $3x - 4y + 20 = 0$.

6.7 – Determine uma equação para o círculo tangente às retas $y = x$ e $y = -x$ nos pontos $(3, 3)$ e $(-3, 3)$.

6.8 – A diagonal de um quadrado está contido na reta $2x + y = 1$. Sendo o ponto $A = (1, 3)$ um de seus vértices, determine os outros vértices.

6.9 – Uma empresa de engenharia esta projetando uma estrada retilínea que deve ser ligada ao trecho também retilíneo de uma outra estrada, como na figura abaixo. Esta ligação deve ser em forma de um arco de círculo. A fim de que a ligação deste trecho com as duas estradas seja suave, o arco de círculo deve ser tangente às duas estradas. Determine o ponto da estrada antiga em que deve ser feita a ligação com o trecho circular bem como o raio e o centro deste arco de círculo.

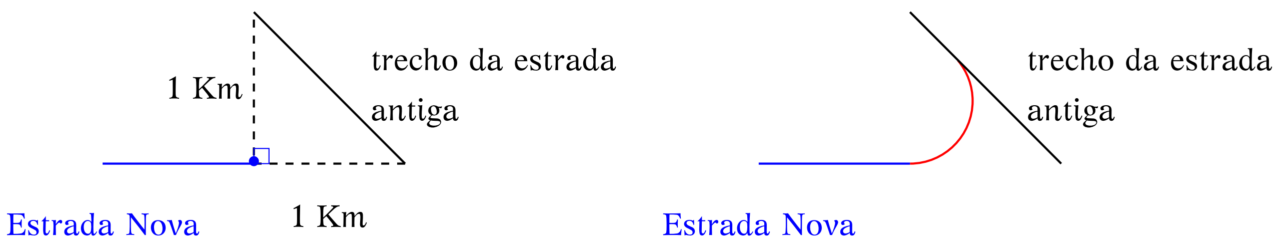


Figura 1: À esquerda os trechos das duas estradas a serem ligadas. À direita o trecho circular em vermelho a ser projetado.

7 Cônicas

7.1 – Qual é a excentricidade da elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

7.2 – Qual é a equação da elipse com focos em $(-3, 0)$ e $(3, 0)$ e cuja soma das distâncias de um ponto qualquer da elipse aos focos é 8.

7.3 – Qual é equação da elipse cujos focos estão sobre o eixo OX, o eixo menor mede 6 e a amplitude focal é 8.

7.4 – Quais são os focos da elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

7.5 – Determine a equação da hipérbole cujos vértices são $(2, 0)$ e $(-2, 0)$ e os focos são $(3, 0)$ e $(-3, 0)$.

7.6 – Determine a equação da hipérbole que passa pelo ponto $(5, 9)$ e as assíntotas têm equações $y = x$ e $y = -x$.

7.7 – Determine a equação da parábola cujo vértice é $(0, 0)$ e a reta diretriz é $r : x = -1$.

7.8 – Determine a equação da parábola cujo vértice é $(0, 0)$, a distância entre o foco e a reta diretriz é 1 e o foco está sobre o semi-eixo positivo das ordenadas.

7.9 – Determine a equação da parábola cujo vértice é $(0, 0)$ o ponto $(5, -10)$ pertence à parábola e o eixo OY é o eixo da parábola.

7.10 – Identifique as cônicas abaixo, determine seus focos, assíntotas (se for o caso) e faça um esboço.

a) $y = x^2 - 6x + 13$

b) $x^2 + 4y - 6x + 5 = 0$

c) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

d) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;

e) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$;

f) $10y^2 + 8x - 30y - 9 = 0$;

g) $x^2 + 3y^2 + 8x - 6y + 11 = 0$;

h) $9x^2 - 16y^2 - 54x + 32y - 79 = 0$;

i) $y^2 - x^2 + 3x + y - 2 = 0$;

8 Respostas e Dicas

1.1.

a) $d = \sqrt{2}$

b) $d = \sqrt{5}$

c) $d = \sqrt{65}$

d) $d = \sqrt{13}$

e) $d = \sqrt{10 - 6\sqrt{2}}$

f) $\sqrt{(\pi - 2)^2 + 4}$

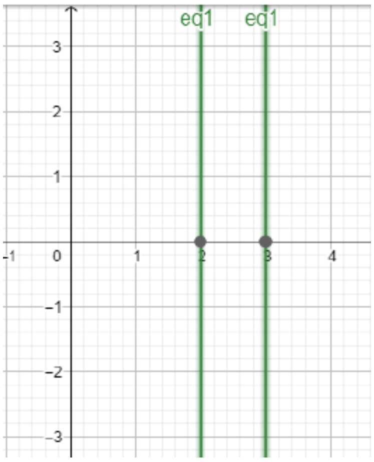
1.2. Perímetro=$\sqrt{13} + 4 + 3\sqrt{5}$, Área=6

1.3. $x + 3y = 5$

1.4. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Um círculo de centro $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e raio $\frac{1}{2}$.

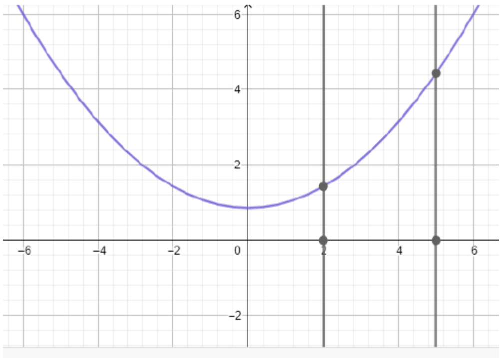
1.5.

a)

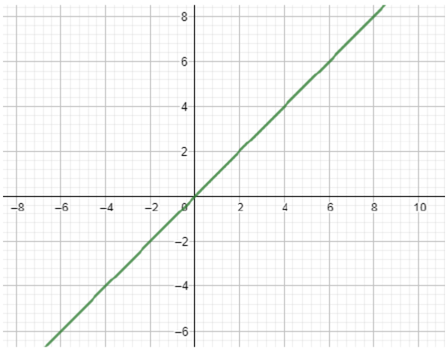


c) Solução é vazia.

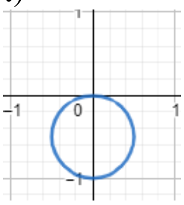
e)



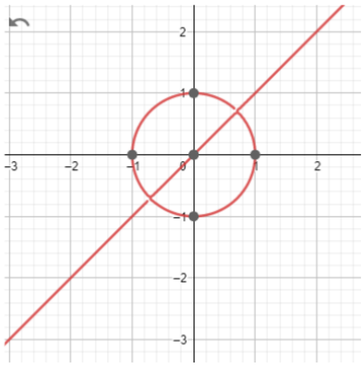
g)



i)

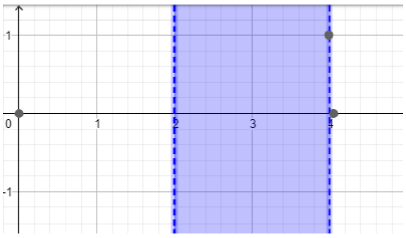


k)

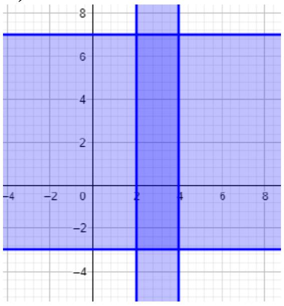


1.7.

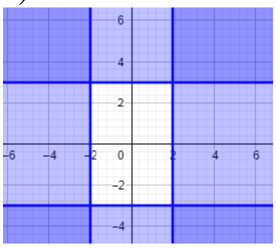
a)



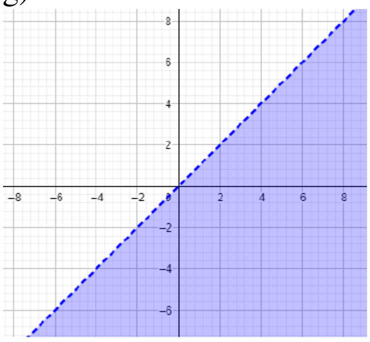
c)



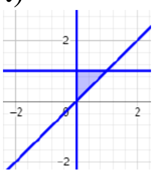
e)



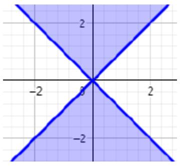
g)



i)



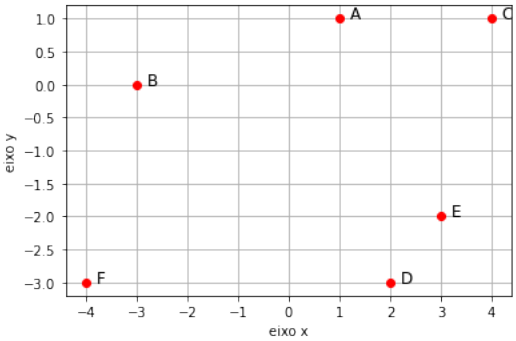
k)



1.9. O lugar geométrico é caracterizado pela equação $y = 1$.

1.11. Sim, $\overrightarrow{AB} = (1, 1) = \overrightarrow{CD}$, mas $AB \neq CD$, pois são segmentos orientados diferentes, mas representam o mesmo vetor.

2.1.



a) $(0, -5)$ b) $(-11, 1)$ c) $(0, 0)$ d) $(-1, 11)$

2.2. (a) $\overrightarrow{DB}$ (b) $\overrightarrow{FC}$ (c) $\overrightarrow{FC}$

2.6.

a)$\arccos\left(-\frac{\sqrt{26}}{26}\right) \approx 1.76819188664478$

c)$\arccos\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \approx 0.321750554396642$

b)$\pi/2$

d)$\pi/6$

2.7. $\vec{u}_1 = \left(\frac{9\sqrt{39}}{13}, -\frac{6\sqrt{39}}{13}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(-\frac{9\sqrt{39}}{13}, \frac{6\sqrt{39}}{13}\right)$ e $\vec{u}_1$ forma um ângulo agudo com $(1, 0)$

2.8. $\arccos\left(\frac{2}{7}\right)$.

2.9. $\|\vec{v}\| = 6$.

2.10. $D = (-1, 5)$

2.11. $P_1 = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

2.12. $P = \left(\frac{50}{17}, -\frac{4}{17}\right)$ e área 11.

2.13. $\vec{v} = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}, \frac{11}{2}\right)$ ou $\vec{v} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{13}{2}\right)$

2.14. a) $C = (3, 2)$ b) A direção procurada é dada pelo vetor $\overrightarrow{w} = (10, \sqrt{149} + 7)$

2.16. A partir de A, no sentido anti-horário temos: $B = \left(\operatorname{sen}\frac{2\pi}{5}, -\cos\frac{2\pi}{5}\right)$, $C = \left(\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}, -\cos\frac{4\pi}{5}\right)$, $D = \left(\operatorname{sen}\frac{6\pi}{5}, -\cos\frac{6\pi}{5}\right)$ e $E = \left(\operatorname{sen}\frac{8\pi}{5}, -\cos\frac{8\pi}{5}\right)$

2.17. a) $B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. b) $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ e $C = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. c) $B = (\operatorname{sen}\alpha, -\cos\alpha)$ e $C = (-\operatorname{sen}\alpha, -\cos\alpha)$.

2.18. Passos da resolução do item (a)
Primeiramente, a fim de obter o ponto C_1, vamos rotacionar o vetor $\overrightarrow{AB}$ por um ângulo de $\frac{\pi}{3}$ no sentido anti-horário, utilizando a matriz de rotação (1), isto é,

$$\vec{v} = R_{\frac{\pi}{3}} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Para facilitar os cálculos a seguir, vamos escrever $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $b = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$, isto é, $\vec{v} = (a, b)$. Também note que como $\vec{v}$ é o vetor $\overrightarrow{AB}$ rotacionado, eles têm a mesma norma, assim

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 2.$$

Agora, para encontrar C_1, basta observar que $\overrightarrow{AC_1} = \lambda\vec{v}$. Faça $C = (x, y)$, com isso temos que

$$\begin{cases} x = \lambda a \\ y = 1 + \lambda b. \end{cases}$$

E como C pertence ao círculo de centro na origem e raio 1, temos que

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2)\lambda^2 + 2b\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(2\lambda + 2b) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = -b.$$

Obviamente a solução $\lambda = 0$ não nos serve, portanto $\lambda = -b$. Finalmente, substituindo-se os valores de $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda = -b$ no sistema acima, temos que

$$C_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Procedendo da mesma maneira, agora girando o vetor $\overrightarrow{AB}$ no sentido horário, obteremos o ponto

$$C_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Os demais itens seguem o mesmo raciocínio, onde no item (c) obtemos a seguinte resposta

$$C_1 = (\cos 2\alpha, \operatorname{sen} 2\alpha) \text{ e } C_2 = (\cos 2\alpha, -\operatorname{sen} 2\alpha).$$

3.2. $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \sqrt{3}\vec{v}$.

3.3. Itens (c) e (e).

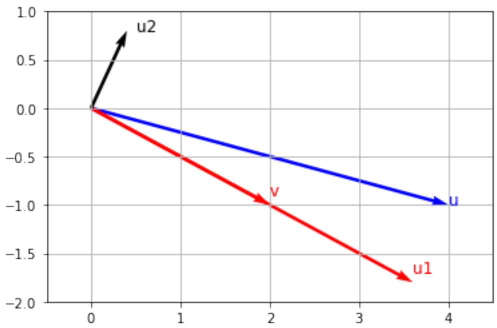
3.4. $\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

3.5. $\vec{u} = 3\sqrt{2}\ \vec{i} + 3\sqrt{2}\ \vec{j}$

3.6. A área é 3.

3.7. $\|\operatorname{proj}_{\vec{v}} \vec{u}\| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{v}\|}$

3.8. $\vec{u}_1 = \left(\frac{18}{5}, -\frac{9}{5}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$



3.9. $C = (2, 2)$ ou $C = (-2/3, -2/3)$.

3.10. $C = (0, -8)$ ou $C = (0, -2)$.

3.11. Fazendo $T_1 = \|\overrightarrow{T_1}\|$, $T_2 = \|\overrightarrow{T_2}\|$ e denotando por g a aceleração da gravidade, temos que

$$\begin{cases} \overrightarrow{T_1} = -T_1\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + T_1\frac{1}{2}\vec{j} \\ \overrightarrow{T_2} = T_2\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + T_2\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} \\ \overrightarrow{F} = -mg\vec{j} \end{cases}$$

Como $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$ e $T_2 = 100$, temos que

$$T_1 = T_2\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ e } m = \frac{T_2}{g}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx 11,38 \text{ kg},$$

onde estamos considerando $g \approx 9,8m/s^2$.

3.12. Fazendo $T_1 = \|\overrightarrow{T_1}\|$, $T_2 = \|\overrightarrow{T_2}\|$ e denotando por g a aceleração da gravidade, temos que

$$\begin{cases} \overrightarrow{T_1} = -T_1 \cos\alpha\ \vec{i} + T_1 \operatorname{sen}\alpha\ \vec{j} \\ \overrightarrow{T_2} = T_2 \cos\beta\ \vec{i} + T_2 \operatorname{sen}\beta\vec{j} \\ \overrightarrow{F} = -mg\ \vec{j} \end{cases}$$

Como $\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, temos que

$$T_1 = T_2\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \text{ e } T_2(\cos\beta\tan\alpha + \operatorname{sen}\beta) = mg.$$

Logo,

$$T_2 = \frac{mg}{\cos\beta\tan\alpha + \operatorname{sen}\beta} \text{ e } T_1 = T_2\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

3.13. $\alpha = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{14}\left(6\sqrt{2}+5\right)\right) \approx 74.42^\circ$ e $\|\vec{T}_2\| = 70\cos\alpha \approx 18.81$.

4.1. $P = (0, 0)$

4.2. As retas paralelas e perpendiculares são respectivamente:

a) $2x + y - 3 = 0$ e $-x + 2y - 1 = 0$

b) $3x + 2y - 2 = 0$ e $-2x + 3y - 3 = 0$

c) $y = 2$ e $x = -1$

d) $-\pi x + y - 3 + \sqrt{2}\pi = 0$ e $-x - \pi y + \sqrt{2} + 3\pi = 0$

4.3. $P_1 = (13, -4)$ e $P_2 = (-7, 6)$.

4.4. $P_1 = (4/3, 3)$ e $P_2 = (5/3, 3)$.

4.5. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$.

4.6. $\left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$

4.7. Seja $(x_0, 0)$ o ponto de interseção da reta com o eixo OX. Neste caso,

$$P = \left(\frac{4x_0}{x_0^2+4}, \frac{2x_0^2}{x_0^2+4}\right)$$

Esta representação é conhecida como **projeção estereográfica**. Com ela, é possível projetar os pontos do círculo unitário, menos o "polo norte", na reta. Além disso, a função que leva os pontos do círculo na reta é uma função bijetiva e contínua, o que em matemática chamamos de um **homeomorfismo**. Neste caso, dizemos que o círculo menos um ponto é **homeomorfo** à reta, isto é, eles tem a mesma forma no sentido topológico. A mesma conclusão pode ser feita em relação à esfera e o plano.

4.8. O pontos são: $P_1 = \left(\dfrac{-2+\sqrt{19}}{5}, \dfrac{1+2\sqrt{19}}{5}\right)$ e $P_2 = \left(\dfrac{-2-\sqrt{19}}{5}, \dfrac{1-2\sqrt{19}}{5}\right)$

4.9. $\left(\dfrac{23}{3}, 3\right)$.

4.10. $\left(\dfrac{ac}{a^2+b^2}, \dfrac{bc}{a^2+b^2}\right)$

4.11. Eixo OX em $P = \left(\frac{c}{a}, 0\right)$ e eixo OY em $Q = \left(0, \frac{c}{b}\right)$. No caso em que $a = 0$, então só intercepta o eixo OY e no caso em que $b = 0$ somente o eixo OX.

4.12. $r : (x, y) = (2, 3) + t(3, 5),\ t \in \mathbb{R}$.

4.13. $(a, b) = (1, 2)$.

4.14. Ângulo com eixo OX: $\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0.643501108793284$ rad $\approx 36.869897645844°$
Ângulo com eixo OY: $\arccos\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0.927295218001612$ rad $\approx 53.130102354156°$

4.15. Escolha um sistema de eixos com o eixo OY contendo os pontos A, C e P se tendo A como a origem. Neste caso, $A = (0, 0)$, $C = (0, 2)$ e $P = (0, 1)$. A partir daí, usando-se que $d(B, A) = 2$ e $d(C, B) = 3$, pode-se determinar $B = \left(\frac{3\sqrt{15}}{4}, \frac{11}{4}\right)$. Em seguida, obtém-se que $Q = \left(\frac{3\sqrt{15}}{8}, \frac{19}{8}\right)$. Agora, determinando-se equações para a reta que passa por P e B e da reta por A e Q, pode-se determinar o ponto de interseção $X = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{19}{12}\right)$. Por fim, usando-se a fórmula de área de um triângulo, obtém-se Área=$\frac{\sqrt{15}}{4}$, dada pela pela soma das áreas dos dois triângulos determinados pelos pontos C, P, X e por C, X, Q.

4.16. Mediatriz de AB: $x - 3y + 5 = 0$, Mediatriz de BC: $2x + 2y - 12 = 0$.

Equação da circunferência: $\left(x - \dfrac{13}{4}\right)^2 + \left(y - \dfrac{11}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{8}$.

4.17. Os pontos são colineares, portanto não existe uma circunferência que os contém.

4.18. $x^2 + (y-5)^2 = 10$.

5.1. $\alpha = \arccos\left(\frac{7\sqrt{1898}}{1898}\right) \approx 1.40942121637421$ rad $\approx 80.7538872544368°$

5.2. Coincidentes

5.3. a) $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \approx 1.1071487177940904$ b) r e s são paralelas.

5.4. $a = -7$, $b = 2$ e $c = 1$.

5.5. $\begin{cases} x = 1 + t\left(\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ y = 1 + t\left(-\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

5.6.

a) $r_1 : \left(\sqrt{3} - 2\right)x + y = 0$ e $r_2 : \left(\sqrt{3} + 2\right)x + y = 0$

b) $r_1 : \left(-6 + 5\sqrt{3}\right)x + 13y - 5\sqrt{3} - 7 = 0$

$r_2 : \left(-5\sqrt{3} - 6\right)x + 13y - 7 + 5\sqrt{3} = 0$

c) Existe uma única reta: $x + 2y - 1 = 0$

d) $r_1 : \left(-27 + 13\sqrt{2}\right)x + 34y - 61 + 13\sqrt{2} = 0$

$r_2 : \left(-27 - 13\sqrt{2}\right)x + 34y - 61 - 13\sqrt{2} = 0$

e) $r_1 : 5x - y - 11 = 0$ e $r_2 : x + 5y + 3 = 0$.

6.1. $3x - 4y - 24 = 0$ e $3x - 4y + 26 = 0$.

6.2. $\dfrac{7\sqrt{10}}{20}$

6.3. $\Delta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $Q = \left(\frac{13}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

6.4. $a = \frac{1}{2}$, e $b = 2$ ou $a = -\frac{1}{2}$, e $b = -2$

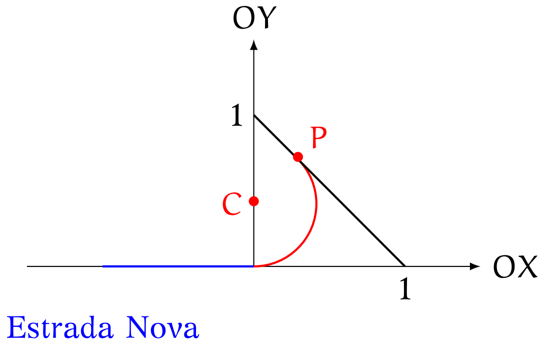
6.5. As retas são: $y = \frac{5\pm 4\sqrt{10}}{9}(x-1)+5$

6.6. $x^2 + y^2 = 16$

6.7. $x^2 + (y-6)^2 = 18$.

6.8. $B = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $C = \left(\frac{-7}{5}, \frac{19}{5}\right)$ e $D = \left(\frac{-11}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

6.9. Considere o sistema de coordenadas cartesianas como abaixo, encontramos o centro do círculo $C = \left(0, \sqrt{2}-1\right)$, o raio $r = \sqrt{2}-1$ e o ponto da estrada antiga é $P = \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



7.1. $\frac{3}{5}$

7.2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

7.3. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

7.4. $F_1 = (-\sqrt{3}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{3}, 0)$

7.5. $5x^2 - 4y^2 = 20$

7.6. $y^2 - x^2 = 56$

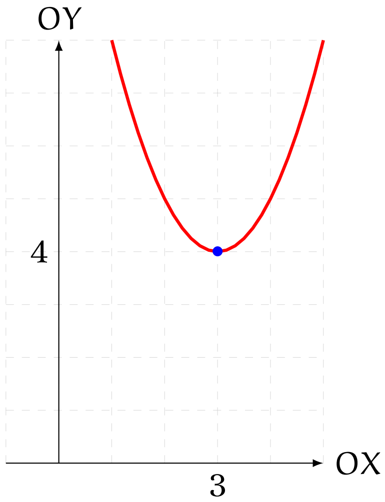
7.7. $y^2 = 4x$

7.8. $y^2 = 2x$

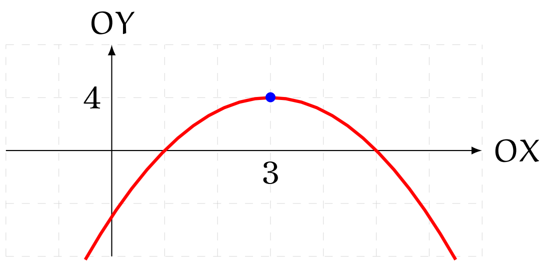
7.9. $2x^2 + 5y = 0$

7.10.

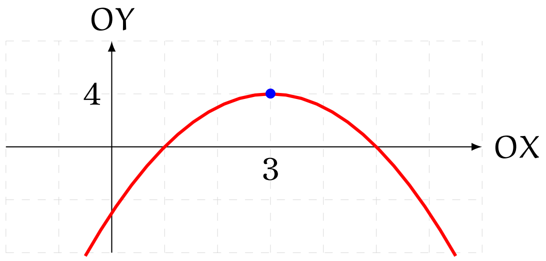
a) $y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 1$



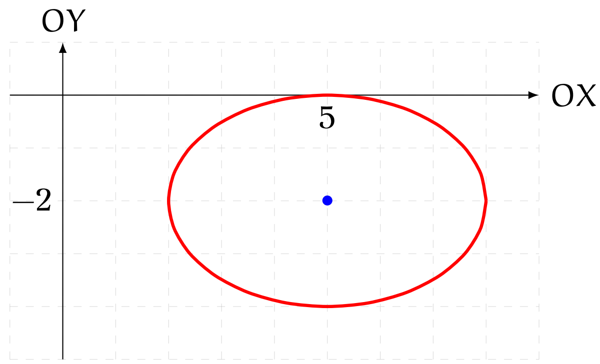
b) $y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 1$



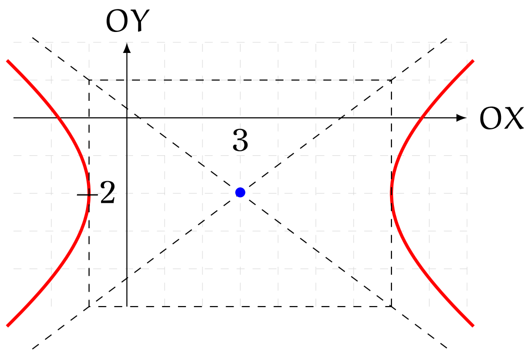
c) $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$



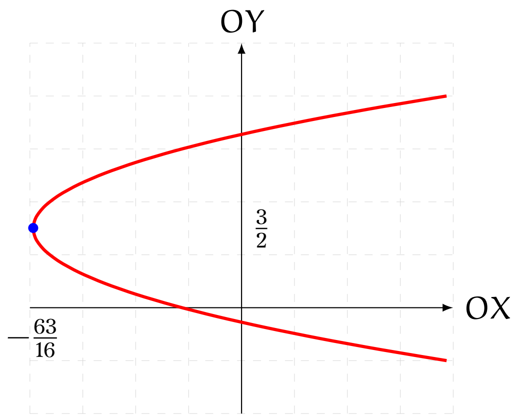
d) $\dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{4}=1$



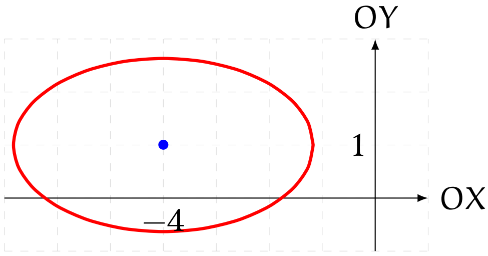
e) $\dfrac{(x-3)^2}{16}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$



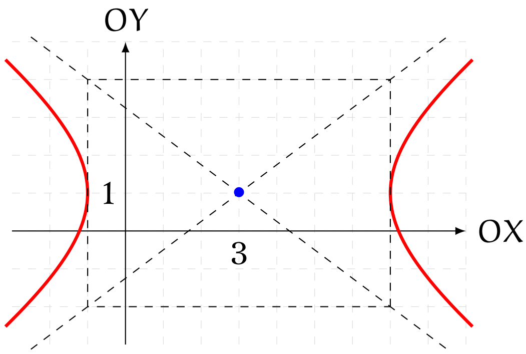
f) $\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{4\left(x+\frac{63}{16}\right)}{5}$



g) $\dfrac{(x+4)^2}{8} + \dfrac{(y-1)^2}{8/3} = 1$



h) $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$



i) $-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$