Exercício 1. ....

Considere os vetores $\vec{v}_1 = (1,\ 1,\ -2)$ e $\vec{v}_2 = (1,\ 1,\ 1)$.

(a) Verifique se $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são ortogonais.

(b) Determine um vetor $\vec{v}_3$ que seja ortogonal a $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ simultaneamente.

(c) Escreva $\vec{v} = (2,\ -2,\ 1)$ como combinação linear de $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$.

Solução:

(a) Note que
$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (1,\ 1,\ -2) \cdot (1,\ 1,\ 1) = 0,$$
portanto são ortogonais.

(b) Basta tomar o produto vetorial
$$\vec{v}_3 = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (3,\ -3,\ 0)\,.$$

(c) Queremos determinar x, y, z tais que
$$\vec{v} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3.$$
Multiplicando-se esta equação por $\vec{v}_1$, temos que
$$\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = x\|\vec{v}_1\|^2 \Rightarrow -2 = 6x \Rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$
Multiplicando-se esta equação por $\vec{v}_2$, temos que
$$\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = y\|\vec{v}_2\|^2 \Rightarrow 1 = 3y \Rightarrow y = \frac{1}{3}.$$
Por fim, multiplicando-se esta equação por $\vec{v}_3$, temos que
$$\vec{v} \cdot \vec{v}_3 = z\|\vec{v}_3\|^2 \Rightarrow 12 = 18z \Rightarrow z = \frac{2}{3}.$$
Logo,
$$\vec{v} = -\frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_2 + \frac{2}{3}\vec{v}_3.$$

Exercício 2. ....

Seja V o subespaço gerado pelos vetores.
$$\vec{v}_1 = (1,\ -1,\ 5,\ 2)\,,\ \vec{v}_2 = (-2,\ 3,\ 1,\ 0)\,,\ \vec{v}_3 = (4,\ -5,\ 9,\ 4)$$
$$\vec{v}_4 = (0,\ 4,\ 2,\ -3)\,,\ \vec{v}_5 = (-7,\ 18,\ 2,\ -8)$$
que forma uma base para o espaço gerado por eles.

(a) V é subespaço de qual $\mathbb{R}^n$?

(b) Determine um subconjunto de $G = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4, \vec{v}_5\}$ que forma uma base de V.

DON'T PANIC

(c) Qual a dimensão de V?

(d) Escreva os vetores de G, que não estão na base, como combinação linear dos vetores da base.

Solução:

(a) V é um subespaço de $\mathbb{R}^4$.

(b) Para isso, vamos escrever a matriz cujas colunas são os vetores $\vec{v}_i$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & -7 \\ -1 & 3 & -5 & 4 & 18 \\ 5 & 1 & 9 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & -3 & -8 \end{bmatrix}.$$

Note que a forma escalonada reduzida de A é:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a base de V buscada é:

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4\}.$$

(c) Portanto, $\dim(V) = 3$.

(d) Da matriz B vemos que

$$\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_5 = -\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_4$$

Exercício 3. ....

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os autovalores de A.

(b) Detemine uma base para cada autoespaço.

(c) A é diagonalizável? Justifique. Se sim, determine a matriz P que diagonaliza A e a matriz diagonal D semelhante a A.

Solução:

DON'T PANIC

(a) Primeiramente, vamos calcular o polinômio característico.

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -\lambda-1 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -\lambda-1 \end{bmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+1)^2.$$

Com isso, os autovalores são:

$$\lambda = -1,\ \lambda = 1 \text{ e } \lambda = 3.$$

(b)

Autoespaço associado à $\lambda = -1$: Note que

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \text{ cuja forma escalonada reduzida é, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que o autoespaço é:

$$E_{-1} = \{(-\delta,\ \beta,\ 0,\ \delta)\,;\ \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para este subespaço é:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Autoespaço associado à $\lambda = 1$: Note que

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \text{ cuja forma escalonada reduzida é, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que o autoespaço é:

$$E_3 = \{(0,\ 0,\ -\delta,\ \delta)\,;\ \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para este subespaço é:

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Autoespaço associado à $\lambda = 3$: Note que

DON'T PANIC

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \text{ cuja forma escalonada reduzida é, } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde podemos concluir que o autoespaço é:

$$E_3 = \{(-\delta,\ \delta,\ -2\delta,\ \delta)\,;\, \gamma \in \mathbb{R}\}.$$

Portanto, uma base para este subespaço é:

$$\mathcal{B}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Sim, A é diagonalizável pois $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ formado por autovetores. Por fim, as matrizes P e D são:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

DON'T PANIC

O Guia do Mochileira das Galáxias, Douglas Adams.

Muito além, nos confins inexplorados da região mais brega da Borda Ocidental desta Galáxia, há um pequeno sol amarelo e esquecido.

Girando em torno deste sol, a uma distância de cerca de 148 milhões de quilômetros, há um planetinha verde-azulado absolutamente insignificante, cujas formas de vida, descendentes de primatas, são tão extraordinariamente primitivas que ainda acham que relógios digitais são uma grande ideia.

Este planeta tem – ou melhor, tinha – o seguinte problema: a maioria de seus habitantes estava quase sempre infeliz. Foram sugeridas muitas soluções para esse problema, mas a maior parte delas dizia respeito basicamente à movimentação de pequenos pedaços de papel colorido com números impressos, o que é curioso, já que no geral não eram os tais pedaços de papel colorido que se sentiam infelizes.

E assim o problema continuava sem solução. Muitas pessoas eram más, e a maioria delas era muito infeliz, mesmo as que tinham relógios digitais.

Um número cada vez maior de pessoas acreditava que havia sido um erro terrível da espécie descer das árvores. Algumas diziam que até mesmo subir nas árvores tinha sido uma péssima ideia, e que ninguém jamais deveria ter saído do mar.

E então, uma quinta-feira, quase dois mil anos depois que um homem foi pregado num pedaço de madeira por ter dito que seria ótimo se as pessoas fossem legais umas com as outras para variar, uma garota, sozinha numa pequena lanchonete em Rickmansworth, de repente compreendeu o que tinha dado errado todo esse tempo e finalmente descobriu como o mundo poderia se tornar um lugar bom e feliz. Desta vez estava tudo certo, ia funcionar, e ninguém teria que ser pregado em coisa nenhuma.

Infelizmente, porém, antes que ela pudesse telefonar para alguém e contar sua descoberta, aconteceu uma catástrofe terrível e idiota, e a ideia perdeu-se para todo o sempre.

Esta não é a história dessa garota.

É a história daquela catástrofe terrível e idiota, e de algumas de suas consequências.

É também a história de um livro chamado O Guia do Mochileiro das Galáxias – um livro que não é da Terra, jamais foi publicado na Terra e, até o dia em que ocorreu a terrível catástrofe, nenhum terráqueo jamais o tinha visto ou sequer ouvido falar dele.

Apesar disso, é um livro realmente extraordinário.

Na verdade, foi provavelmente o mais extraordinário dos livros publicados pelas grandes editoras de Ursa Menor – editoras das quais nenhum terráqueo jamais ouvira falar.

O livro é não apenas uma obra extraordinária como também um tremendo best-seller – mais popular que a Enciclopédia Celestial do Lar, mais vendido que Mais Cinquenta e Três Coisas para se Fazer em Gravidade Zero, e mais polêmico que a colossal trilogia filosófica de Oolonn Colluphid, Onde Deus Errou, Mais Alguns Grandes Erros de Deus e Quem É Esse Tal de Deus Afinal?

Em muitas das civilizações mais tranquilonas da Borda Oriental da Galáxia, O Guia do Mochileiro das Galáxias já substituiu a grande Enciclopédia Galáctica como repositório-padrão de todo o conhecimento e sabedoria, pois ainda que contenha muitas omissões e textos apócrifos, ou pelo menos terrivelmente incorretos, ele é superior à obra mais antiga e mais prosaica em dois aspectos importantes.

Em primeiro lugar, é ligeiramente mais barato; em segundo lugar, traz na capa, em letras garrafais e amigáveis, a frase NÃO ENTRE EM PÂNICO.

Mas a história daquela quinta-feira terrível e idiota, a história de suas extraordinárias consequências, a história das interligações inextricáveis entre essas consequências e este livro extraordinário – tudo isso teve um começo muito simples.

Começou com uma casa.