Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação de Aprendizagem 3
Cálculo III-A
12.026 HE, 23 de junho
23/06/2026
Turma M1– 2026-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Considere a função

$$f(x,y) = x^3 - \frac{5x^2}{2} + y^3 + y^2 - 8$$

(a) Determine os pontos críticos.

(b) Classifique-os como máximos ou mínimos locais ou pontos de selas.

Solução: Fazendo

$$\nabla f(x,y) = \left(x\left(3x-5\right), y\left(3y+2\right)\right) = (0,0),$$

encontramos os 4 seguintes pontos críticos:

$$P_1 = \left(0,\ -\frac{2}{3}\right), P_2 = (0,\ 0), P_3 = \left(\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3}\right), P_4 = \left(\frac{5}{3},\ 0\right)$$

Vamos calcular a matriz Hessiana:

$$D = D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 6x-5 & 0 \\ 0 & 6y+2 \end{bmatrix}$$

Com isso, vamos aplicar o teste 2ª derivada em cada ponto:

- $P_1 = \left(0,\ -\frac{2}{3}\right),\ \det(D) = \det\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = 10 > 0, D_{11} = -5 < 0,$ ponto de máximo local.
- $P_2 = (0,\ 0),\ \det(D) = \det\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = -10 < 0,$ ponto de sela.
- $P_3 = \left(\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3}\right),\ \det(D) = \det\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -10 < 0,$ ponto de sela.
- $P_4 = \left(\frac{5}{3},\ 0\right),\ \det(D) = \det\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 10 > 0, D_{11} = 5 > 0,$ ponto de mínimo local.

Questão 2. ....________/ 3 pts

Utilize Multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = x - 3y - 1$ sujeito à restrição $x^2 + 3y^2 = 16$.

Solução: Defina $g(x, y) = x^2 + 3y^2$. Queremos encontrar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -3 = 6\lambda y \\ x^2 + 3y^2 = 16. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos as 2 seguintes soluções:

$$P_1 = (-2, 2), \lambda = -\frac{1}{4}; \; P_2 = (2, -2), \lambda = \frac{1}{4};$$

Substituindo-se os pontos na função, vemos que:

$$f(-2, 2) = -9, \; f(2, -2) = 7,$$

Com isso, o valor máximo absoluto é 7 e o mínimo é -9.

Questão 3. ....________/ 3 pts

Encontre todos extremos absolutos de $f(x,y) = xy - 2x$ na região triangular D com vértices $(0,\ 0)$, $(0,\ 4)$ e $(4,\ 0)$.

Solução:

Como f é contínua em D, um conjunto fechado e limitado, pelo Teorema de Weierstrass, f assume máximo e mínimo absolutos.

1. Interior de D: Vamos buscar pelos pontos críticos.

$$(y-2,\ x) = (0,\ 0) \Rightarrow x = 0 \ \text{ e } \ y = 2.$$

Logo $P_0 = (0,\ 2)$ é o único ponto crítico da função, mas não está no interior de D.

2. Fronteira de D: Vamos estudar cada uma dos 3 lados do triângulo separadamente.

- Fronteira $L_1 : x = 0$, $f(0,y) = 0$, com $0 \leq y \leq 4$.
- Fronteira $L_2 : y = 0$, $f(x,0) = -2x$, com $0 \leq x \leq 4$. Assume máximo em $x = 0$ e mínimo em $x = 4$, isto é máximo em $f(0,0) = 0$ e mínimo em $f(4,0) = -8$.
- Fronteira $L_3 : y = 4 - x$, $f(x, 4-x) = -x\,(x-2)$, com $0 \leq x \leq 4$. Assume máximo em $x = 1$ e mínimo em $x = 4$, isto é máximo em $f(1,3) = 1$ e mínimo em $f(4,0) = -8$.

Logo o valor mínimo absoluto é -8 e é assumido no ponto $(4,0)$ e o valor máximo absoluto é 1 e é assumido no ponto $(1,3)$.