Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação de Aprendizagem 2
Cálculo III-A
12.026 HE, 02 de junho
02/06/2026
Turma M1– 2026-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

(a) [1 pt] Mostre que o seguinte limite não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^4+y^7}$$

(b) [2 pts] Sejam $u = \dfrac{1}{r^2+s^2}$, $r = x + y^3$ e $s = \sqrt{x}\tan(y)$.

Determine $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ quando $x = 2, y = 0$.

Solução:

(a) Fazendo $y = mx$, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^3x^4}{m^7x^7+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{m^3}{m^7x^3+1} = m^3.$$

Como para cada valor de m temos um valor diferente para o limite, o limite não existe.

(b) Note que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{2r}{(r^2+s^2)^2},\quad \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{2s}{(r^2+s^2)^2},$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = 1,\quad \frac{\partial r}{\partial y} = 3y^2,$$

e

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\tan(y)}{2\sqrt{x}},\quad \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{\cos^2(y)}.$$

Também,

$$r(2,\ 0) = 2 \text{ e } s(2,\ 0) = 0$$

Com isso,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{2r}{(r^2+s^2)^2} + -\frac{s\tan(y)}{\sqrt{x}\,(r^2+s^2)^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(2,\ 0) = -\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}.$$

Analogamente,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{6ry^2}{(r^2+s^2)^2} + -\frac{2s\sqrt{x}}{(r^2+s^2)^2\cos^2(y)}$$

Logo,

$$\frac{\partial u}{\partial y}(2,\ 0) = 0 + 0 = 0$$

Questão 2. ....________/ 5 pts

Considere a função $f(x,y) = xy^3 + e^{x^2+2y}$.

(a) [1 pt] Determine $f(2,\ -2)$.

(b) [2 pts] Determine a taxa de variação máxima da função f no ponto $(2,\ -2)$ e a direção em que isso ocorre.

(c) [1 pt] Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ no ponto $(2,\ -2)$ na direção do vetor $\vec{v} = (2,5)$.

(d) [1 pt] Determine as derivadas f_{xx} e f_{xy}.

Solução:

(a) $f(2,\ -2) = -15$

(b)

$$f_x = 2xe^{x^2+2y} + y^3,\ \ f_y = 3xy^2 + 2e^{x^2+2y}.$$

$$\nabla f(x,y) = \left(2xe^{x^2+2y} + y^3,\ 3xy^2 + 2e^{x^2+2y}\right).$$

Portanto, a direção cuja taxa de variação é máxima é dada pelo vetor:

$$\nabla f(2,\ -2) = (-4,\ 26).$$

E a taxa de variação máxima é dada por:

$$\|\nabla f(2,\ -2)\| = 2\sqrt{173} \approx 26.3.$$

(c) Note que $\|\vec{v}\| = \sqrt{29}$, daí, como $\vec{v}$ não é unitário, precisamos nomralizá-lo.

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2,\ 5).$$

Donde,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,\ -2) = \nabla f(2,\ -2) \cdot \vec{u} = \frac{122\sqrt{29}}{29}.$$

(d) Do item (b), temos que

$$f_{xx} = 2\left(2x^2+1\right)e^{x^2+2y},\ \ f_{xy} = 4xe^{x^2+2y} + 3y^2$$

Questão 3. .... ______/ 2 pts

Determine o plano tangente à superfície $S: x^2 - y + z^3 = -9$ no ponto $P = (1,\ 2,\ -2)$.

Solução:

A superfície pode ser vista como a superfície de nível da função $f(x,y,z) = x^2 - y + z^3$ no nível -9. Com isso, sabemos que o vetor normal ao plano tangente à S em um ponto (x,y,z) é dado por

$$\nabla f(x,y,z) = \left(2x,\ -1,\ 3z^2\right).$$

Substituindo $P = (1,\ 2,\ -2)$, temos que

$$\nabla f\,(1,\ 2,\ -2) = (2,\ -1,\ 12)\,.$$

Logo, a equação do plano é

$$2x - y + 12z + 24 = 0.$$