



Gabarito

Questão 1. / 3 pts

Considere a curva dada por

$$\vec{r}(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), 2), t \geq 0.$$

- (a) Determine o comprimento da curva.
- (b) Determina a função $t = t(s)$ que reparametriza a curva pelo comprimento de arco.

Solução:

- (a) Primeiramente, note que

$$\vec{r}'(t) = (-3 \sin(t) \cos^2(t), 3 \sin^2(t) \cos(t), 0),$$

donde,

$$\begin{aligned} \|\vec{r}'(t)\| &= 3\sqrt{\sin^2(t) \cos^4(t) + \sin^4(t) \cos^2(t)} = 3\sqrt{\sin^2(t) \cos^2(t) (\cos^2(t) + \sin^2(t))} \\ &= 3\sqrt{\sin^2(t) \cos^2(t)} = 3 |\sin(t) \cos(t)| \end{aligned}$$

Com isso, temos que

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 |\sin(t) \cos(t)| dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t) dt = -\frac{3}{4} \cos(2t) \Big|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

$$s(t) = \int_0^t 3 |\sin(u) \cos(u)| du = \frac{3}{2} \int_0^t \sin(2u) du = -\frac{3}{4} (\cos(2t) - 1).$$

Então, isolando-se t , temos:

$$t = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{4}{3}s + 1\right)$$



Questão 2. / 3 pts

Considere a equação da curva em coordenadas polares

$$r = \frac{6}{3 \cos(\theta) + 2 \sin(\theta)}$$

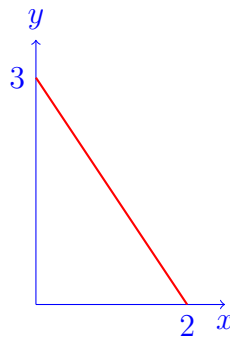
- (a) [1 pt] Determine a equação da curva em coordenadas cartesianas.
- (b) [1 pt] Faça um esboço da curva.
- (c) [1 pt] Dê uma parametrização para a curva.

Solução: Note que

(a)

$$3r \cos(\theta) + 2r \sin(\theta) = 6 \Rightarrow 3x + 2y = 6 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

(b) A curva é seguinte reta.



(c) Sabemos que $\vec{v} = (-2, 3)$ é um vetor diretor da reta e que o ponto $A = (2, 0)$ pertence à reta. Logo,

$$\vec{r}(t) = (2 - 2t, 3t), t \in \mathbb{R}.$$



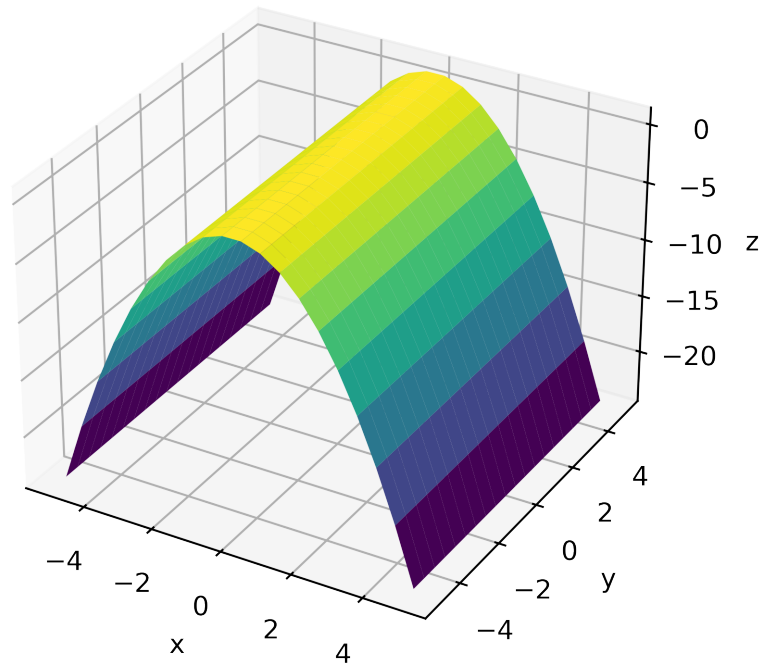
Questão 3. / 4 pts

Considere as superfícies $S_1 : z = 1 - x^2$ e $S_2 : z = x^2 + y^2$.

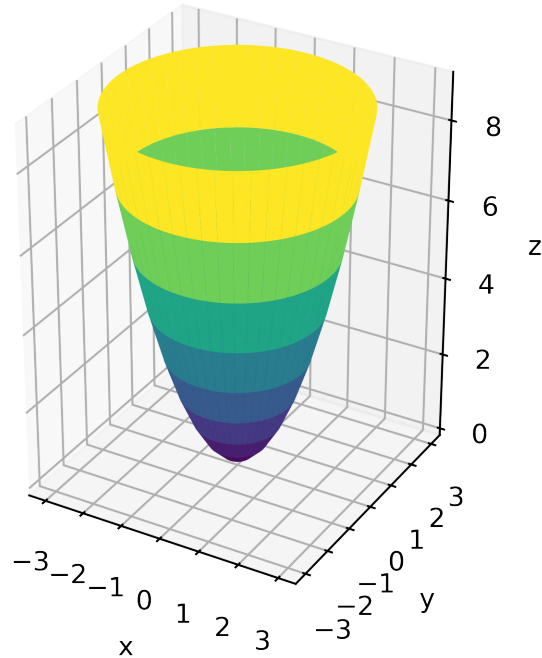
- (a) [1 pt] Reconheça cada uma das superfícies e faça um esboço de cada uma delas.
- (b) [2 pts] Determine a projeção da interseção das duas superfícies no plano xy e faça um esboço.
- (c) [1 pt] Dê uma parametrização da curva de interseção das duas superfícies.

Solução:

(a) S_1 é um cilindro cuja curva diretriz é uma parábola.



S_2 é um parabolóide elíptico.



(b) Substituindo-se z da primeira na segunda, temos:

$$x^2 + y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{1/2} + y^2 = 1.$$

Isto é, a projeção da interseção é uma elipse.

(c) Fazendo $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t)$ e $y = \sin(t)$, temos que

$$z = 1 - x^2 = 1 - \frac{1}{2} \cos^2(t).$$

Logo, a parametrização da curva é:

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(t), \sin(t), 1 - \frac{1}{2} \cos^2(t) \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$