Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Considere a função $f(x,y) = -x^3 + xy - y^2$.

(a) Determine os pontos críticos.

(b) Classifique-os como máximos ou mínimos locais ou pontos de selas.

Solução: Fazendo

$$\nabla f(x,y) = \left(-3x^2 + y, x - 2y\right) = (0,0),$$

encontramos os 2 seguintes pontos críticos:

$$P_1 = (0,0)\,,\ P_2 = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right).$$

Vamos calcular a matriz Hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Com isso, vamos aplicar o teste 2ª derivada em cada ponto:

$$\det D^2 f(0,0) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -1 \ \text{ ponto de sela.}$$

$$\det D^2 f\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1 \text{ e } f_{xx}\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}\right) < 0, \ \text{ ponto de máximo.}$$

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Utilize Multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = x - 3y - 1$ sujeito à restrição $x^2 + 3y^2 = 16$.

Solução: Defina $g(x, y) = x^2 + 3y^2$. Queremos encontrar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -3 = 6\lambda y \\ x^2 + 3y^2 = 16. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos as 2 seguintes soluções:

$$P_1 = (-2, 2)\,, \lambda = -\frac{1}{4};\; P_2 = (2, -2)\,, \lambda = \frac{1}{4};$$

Substituindo-se os pontos na função, vemos que:

$$f(-2, 2) = -9,\; f(2, -2) = 7,$$

Com isso, o valor máximo absoluto é 7 e o mínimo é -9.

Questão 3. .... ______/ 4 pts

Considere a função $f(x, y) = xy + \sin(x + 2y)$.

(a) [1 pt] Determine $f\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$.

(b) [1 pt] Determine a taxa de variação máxima da função f no ponto $\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ e a direção em que isso ocorre.

(c) [2 pts] Suponha que f represente a distribuição de temperaturas no plano. Se um formiga caminhar sobre a reta $x = 2y$, em que ponto do plano **a taxa de variação máxima da temperatura** será a menor possível? Justifique.

Solução:

(a) $f\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right) = 1$

(b) Note que

$$\nabla f(x, y) = (y + \cos(x + 2y),\ x + 2\cos(x + 2y)).$$

Portanto, a direção cuja taxa de variação é máxima é dada pelo vetor:

$$\nabla f\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4},\ 0\right).$$

E a taxa de variação máxima é dada por:

$$\left\|\nabla f\left(0,\ \frac{\pi}{4}\right)\right\| = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Substituindo $x = 2y$ no gradiente da função, temos

$$\nabla f(2y, y) = (y + 1,\ 2 - 2y).$$

A taxa de variação máxima em cada ponto desta reta é dada pela norma do gradiente:

$$\sqrt{5y^2 - 6y + 5}$$

Que atinge seu ponto de mínimo no vértice da parábola, isto é, em

$$y = \frac{3}{5}.$$

Portanto, o ponto buscado é $\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$.