Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação de Aprendizagem 3
Cálculo 3
12.025 HE, 02 de dezembro
02/12/2025
Turma M2 – 2025-2

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Considere a função $f(x,y) = -x^3 - 2xy + x + y^2$.

(a) Determine os pontos críticos.

(b) Classifique-os como máximos ou mínimos locais ou pontos de selas.

Solução: Fazendo

$$\nabla f(x,y) = \big(-3x^2 - 2y + 1, -2x + 2y\big) = (0,0),$$

encontramos os 2 seguintes pontos críticos:

$$P_1 = (-1,-1)\,,\ P_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Vamos calcular a matriz Hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} -6x & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Com isso, vamos aplicar o teste 2ª derivada em cada ponto:

$$\det D^2 f\,(-1,-1) = \det \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 8 \ \text{ e } f_{xx}\,(-1,-1) > 0,\ \text{ponto de mínimo.}$$

$$\det D^2 f \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = -8 \ \text{ponto de sela.}$$

Questão 2. .... _______/ 3 pts

Utilize Multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x, y, z) = 2x - y + z - 1$ sujeito à restrição $x^2 + 3y^2 + z^2 = 3$.

Solução: Defina $g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$. Queremos encontrar $(x, y, z) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -1 = 6\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + 3y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Note que $\lambda \neq 0$, pois se $\lambda = 0$, teríamos logo na primeira equação $2 = 0$, um absurdo. Portanto, como λ não é zero, podemos dividir as 3 primeiras equações por λ, isolando-se as três variáveis x, y e z, obtendo-se:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\lambda} \\ y = -\frac{1}{6\lambda} \\ z = \frac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

Subistituindo-as na equação da restrição, teremos:

$$\frac{4}{3\lambda^2} = 3 \Longrightarrow \lambda = \pm\frac{2}{3}.$$

Portanto, obtemos as 2 seguintes soluções:

$$P_1 = \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right), \lambda = -\frac{2}{3};\ P_2 = \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \lambda = \frac{2}{3};$$

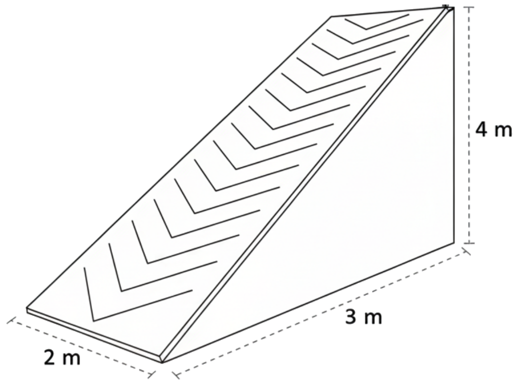
Substituindo-se os pontos na função, vemos que:

$$f\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right) = -5,\ f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right) = 3,$$

Com isso, o valor máximo absoluto é 3 e o mínimo é -5.

Questão 3. .... ______/ 3 pts

A figura ao lado representa o projeto de uma rampa a ser construída.



(a) [1 pt] Qual será a área da rampa?

(b) [2 pts] Qual é a estimativa do erro no cálculo dessa área, sabendo-se que o erro cometido nas medidas é de no máximo 1%, isto é, 0.01 cm? Dê a porcentagem do erro em relação à medida da área.

Solução:

(a) Pelo Teorema de Pitágoras, temos que o comprimento da rampa é dado por $5\,m$. Portanto, a área da rampa é $10\,m^2$.

(b) A fórmula para a área da rampa é dada por

$$A(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + z^2},$$

onde x é a largura da rampa, y é a medida da base da rampa e z a altura final. Vamos usar a diferencial para estimar o erro.

$$dA = \sqrt{y^2 + z^2}dx + \frac{xy}{\sqrt{y^2 + z^2}}dy + \frac{xz}{\sqrt{y^2 + z^2}}dz$$

Substituindo os valores fornecidos, temos que o erro estimado é de no máximo $0.078\,m^2$. Portanto, o erro cometido é de 0.78%.