Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação de Aprendizagem 1
Cálculo 3
12.025 HE, 23 de setembro
23/09/2025
Turma M2 – 2025-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3,5 pts

Considere a curva parametrizada

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3},\ 1,\ t^2\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

(a) [1,5 pts] Calcule a curvatura da curva dada por $\vec{r}$.

(b) [2 pts] Determine o comprimento da curva entre os pontos $\left(\frac{1}{3},\ 1,\ 1\right)$ e $\left(\frac{8}{3},\ 1,\ 4\right)$.

Solução:

(a) Note que

$$\vec{r}\,'(t) = \left(t^2,\ 0,\ 2t\right),\ \vec{r}_2\,'' = (2t,\ 0,\ 2) \quad \text{e} \quad \|\vec{r}_2\,'\| = t\sqrt{t^2+4}.$$

Daí,

$$\vec{r}_2\,' \times \vec{r}_2\,'' = \left(0,\ 2t^2,\ 0\right) \Rightarrow \|\vec{r}_2\,' \times \vec{r}_2\,''\| = 2t^2.$$

Portanto,

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}_2\,' \times \vec{r}_2\,''\|}{\|\vec{r}_2\,'\|^3} = \frac{2}{t\left(t^2+4\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

(b) Primeiramente, vamos determinar os pontos inicial e final.

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{3},\ 1,\ 1\right) \Longrightarrow \left(\frac{t^3}{3},\ 1,\ t^2\right) = \left(\frac{1}{3},\ 1,\ 1\right) \Longrightarrow t = 1.$$

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{8}{3},\ 1,\ 4\right) \Longrightarrow \left(\frac{t^3}{3},\ 1,\ t^2\right) = \left(\frac{8}{3},\ 1,\ 4\right) \Longrightarrow t = 2.$$

Com isso, temos que

$$L = \int_1^2 t\sqrt{t^2+4}\,dt.$$

Fazendo a substituição simples $u = t^2 + 4$, $du = 2t\,dt$ temos

$$\begin{aligned}\int_1^2 t\sqrt{t^2+4}\,dt &= \frac{1}{2}\int_5^8 \sqrt{u}\,du \\ &= \frac{1}{3}u\sqrt{u}\Big|_{u=5}^{u=8} \\ &= -\frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{16\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Questão 2. .... ________/ 3 pts

Considere a curva dada pela seguinte equação cartesiana

$$x\sqrt{x^2+y^2} = y.$$

(a) [1 pt] Determine a equação em coordenadas polares.

(b) [1 pt] Use a equação em coordenadas polares para parametrizar esta curva.

(c) [1 pt] Determine o vetor tangente.

Solução:

(a) Substituindo $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ e $x^2+y^2 = r^2$ temos

$$r\cos(\theta)r = r\sin(\theta) \Longrightarrow r\cos(\theta) = \sin(\theta) \Longrightarrow r = \tan(\theta).$$

(b) Com isso, uma parametrização desta curva é:

$$\vec{\alpha}(\theta) = \tan(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta)),\ \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

(c) Basta derivar $\vec{\alpha}$:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}\,'(\theta) &= \sec^2(\theta)(\cos(\theta), \sin(\theta)) + \tan(\theta)(-\sin(\theta), \cos(\theta))\\ &= \left(\frac{1}{\cos(\theta)}, \frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right) + \left(\frac{-\sin^2(\theta)}{\cos(\theta)}, \sin(\theta)\right)\\ &= \left(\cos(\theta),\ \left(1 + \frac{1}{\cos^2(\theta)}\right)\sin(\theta)\right)\end{aligned}$$

Questão 3. .... ______/ 3,5 pts

Considere as superfícies $S_1 : x^2 + y^2 = 9$ e $S_2 : 4x^2 + y^2 - z^2 = 9$.

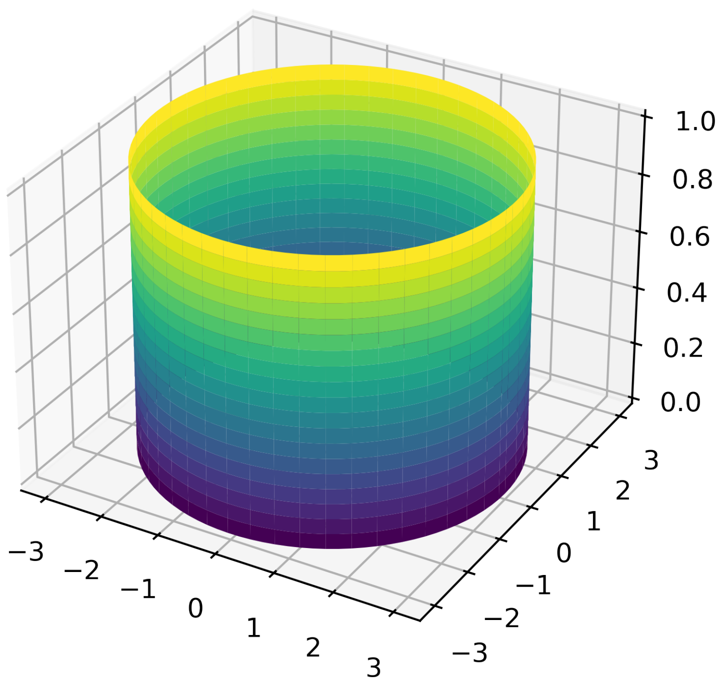
(a) [0,5 pts] Reconheça e faça um esboço da superfícies S_1.

(b) [1 pt] Reconheça e faça um esboço da superfícies S_2.

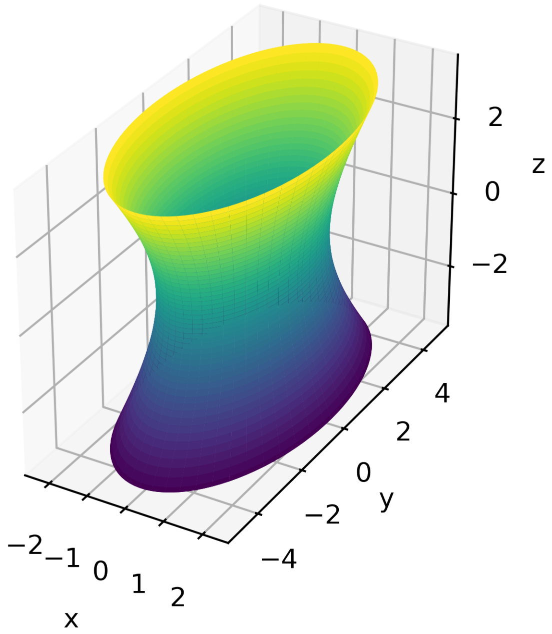
(c) [2 pts] Determine a parametrização da curva de interseção das duas superfícies que está acima do plano xy.

Solução:

(a) S_1 é um cilindro de base um círculo de centro na origem e raio 3.



(b) S_2 é um hiperboloide de uma folha.



(c) Parametrizando o círculo da base do cilindro:

$$\vec{\alpha} = (3\cos(t), 3\sin(t)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Neste caso, a coordenada z da parametrização é dada por:

$$z^2 = 4x^2 + y^2 - 9 = 36\cos^2(t) + 9\sin^2(t) - 9 = 27\cos^2(t) \Longrightarrow z = 3\sqrt{3}\left|\cos(t)\right|.$$

Logo a parametrização é:

$$r(\vec{t}) = \left(3\cos(t), 3\sin(t), 3\sqrt{3}\left|\cos(t)\right|\right),\ t \in \mathbb{R}.$$