Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

Verificação de Reposição
Cálculo 3
07/07/2025
Turma M2 – 2025-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Considere a curva

$$\vec{r}(t) = \left(\frac{t^3}{3} - 2t,\ 3 - t^2,\ 2t + 1\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

(a) [1,5 pts] Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva no ponto $\left(\frac{5}{3},\ 2,\ -1\right)$.

(b) [1,5 pts] Calcule a curvatura da curva dada por $\vec{r}$.

Solução:

(a) Primeiramente, vamos determinar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r}(t) = \left(\frac{5}{3},\ 2,\ -1\right)$, isto é,

$$\begin{cases} \frac{t^3}{3} - 2t = \frac{5}{3} \\ 3 - t^2 = 2 \\ 2t + 1 = -1 \end{cases}$$

Da última equação devemos ter que $t = -1$. O que é confirmado ao substituirmos em $\vec{r}$:

$$\vec{r}(-1) = \left(\frac{5}{3},\ 2,\ -1\right).$$

A fim de determinar a reta tangente, vamos calcular o vetor tangente em $t = -1$.

$$\vec{r}\,'(t) = \left(t^2 - 2,\ -2t,\ 2\right) \Longrightarrow \vec{r}\,'(-1) = (-1,\ 2,\ 2).$$

Com isso, as equações paramétricas da reta tangente são:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} - t \\ y = 2 + 2t \\ z = -1 + 2t,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b)

$$\vec{r}_2\,'' = (2t,\ -2,\ 0) \quad \text{e} \quad \|\vec{r}_2\,'\| = \sqrt{t^4 + 8}.$$

Daí,

$$\vec{r}_2\,' \times \vec{r}_2\,'' = \left(4,\ 4t,\ 2t^2 + 4\right) \Rightarrow \|\vec{r}_2\,' \times \vec{r}_2\,''\| = 2\sqrt{t^4 + 8t^2 + 8}.$$

Portanto,

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}_2\,' \times \vec{r}_2\,''\|}{\|\vec{r}_2\,'\|^3} = \frac{2\sqrt{t^4 + 8t^2 + 8}}{(t^4 + 8)^{\frac{3}{2}}}.$$

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Considere a função $f(x,y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$.

(a) Determine os pontos críticos.

(b) Classifique-os como máximos ou mínimos locais ou pontos de selas.

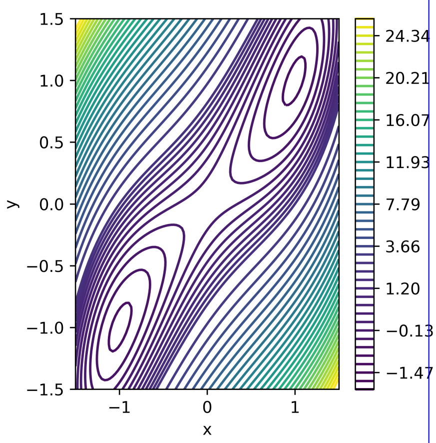
(c) Marque os pontos encontrados no mapa de contornos da função.

Solução: Fazendo

$$\nabla f(x,y) = \big(4x^3 + 2x - 6y, -6x + 6y\big) = (0,0),$$

encontramos os 3 seguintes pontos críticos:

$$P_1 = (-1,-1)\,,\ P_2 = (0,0)\,,\ P_3 = (1,1)\,.$$



Vamos calcular a matriz Hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 + 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Com isso, vamos aplicar o teste 2ª derivada em cada ponto:

$$\det D^2 f(-1,-1) = \det \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = 48 \text{ e } f_{xx}(-1,-1) > 0, \quad \text{mínimo local.}$$

$$\det D^2 f(0,0) = \det \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = -24, \ \text{ponto de sela.}$$

$$\det D^2 f(1,1) = \det \begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = 48, \ \text{ e } f_{xx}(1,1) > 0, \quad \text{mínimo local.}$$

Questão 3. .... ________/ 4 pts

Utilize Multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 + 6y$ sujeito à restrição $x^2 + 3y^2 = 4$.

Solução: Defina $g(x, y) = x^2 + 3y^2$. Queremos encontrar $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 6 = 6\lambda y \\ x^2 + 3y^2 = 4. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos as 4 seguintes soluções:

$$P_1 = (-1, 1), \lambda = 1;\ P_2 = (1, 1), \lambda = 1;\ P_3 = \left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2};\ P_4 = \left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Substituindo-se os pontos na função, vemos que:

$$f(-1, 1) = 7,\ f(1, 1) = 7,\ f\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -4\sqrt{3},\ f\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 4\sqrt{3},$$

Com isso, o valor máximo absoluto é 7 e o mínimo é $-4\sqrt{3}$.