Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

1ª prova de
Cálculo 3
13/05/2025
Turma M2 – 2025-1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Considere as superfícies $S_1 : x^2 + y^2 = 1$ e $S_2 : z = 4x^2 + y^2$.

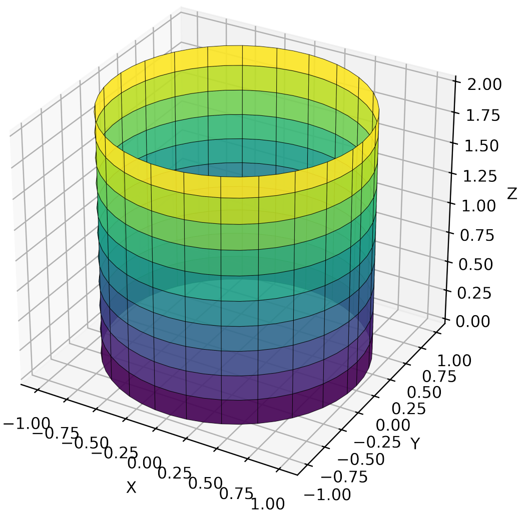
(a) [1 pt] Reconheça e faça um esboço da superfícies S_1.

(b) [1 pt] Reconheça e faça um esboço da superfícies S_2.

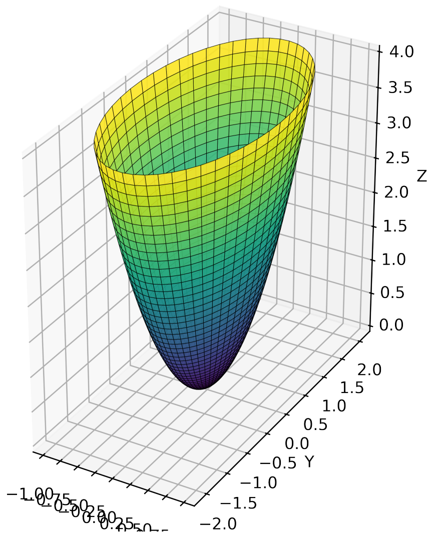
(c) [1 pt] Dê uma parametrização para a curva de interseção de S_1 e S_2.

Solução:

(a) Essa superfície é um cilindro.



(b) Essa superfície é um paraboloide elíptico.



(c) Tomando como a base da curva o círculo do cilindro, fazemos $x(t) = \cos(t),\ y(t) = \sin(t)$. E a "altura" z da curva dada pelo paraboloide, temos:

$$z(t) = 4\cos^2(t) + \sin^2(t) = 3\cos^2(t) + 1.$$

Com isso, uma parametrização é:

$$\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 3\cos^2(t) + 1),\ t \in (0, 2\pi).$$

Questão 2. .... _______/ 7 pts

Considere as curvas

$$\vec{r}_1(t) = \left(\sin(\pi t),\ \cos(\pi t),\ \frac{2\pi t^{\frac{3}{2}}}{3}\right),\ 0 \le t \le 2$$

e

$$\vec{r}_2(t) = \left(2t,\ t,\ \frac{e^{2t}}{2}\right), t \in \mathbb{R}.$$

(a) [1 pt] Determine os pontos inicial e final de $\vec{r}_1$.

(b) [1 pt] Determine os pontos que a curva $\vec{r}_1$ intercepta o plano yz.

(c) [1 pt] Determine os vetores tangente de $\vec{r}_1$ e de $\vec{r}_2$.

(d) [2 pts] Calcule o comprimento de arco de $\vec{r}_1$.

(e) [2 pts] Calcule a curvatura da curva de $\vec{r}_2$.

Solução:

(a) Ponto inicial: $\vec{r}_1(0) = (0,\ 1,\ 0)$, Ponto final: $\vec{r}_1(2) = \left(0,\ 1,\ \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\right)$.

(b) Isso ocorre quando

$$\sin(\pi t) = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ou } t = 1 \text{ ou } t = 2.$$

Portanto, $\vec{r}_1$ intercepta o plano yz nos pontos

$$\vec{r}_1(0) = (0,\ 1,\ 0),\ \vec{r}_1(1) = \left(0,\ -1,\ \frac{2\pi}{3}\right) \text{ e } \vec{r}_1(2) = \left(0,\ 1,\ \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}\right).$$

(c)

$$\vec{r}_1'(t) = \left(\pi\cos(\pi t),\ -\pi\sin(\pi t),\ \pi\sqrt{t}\right)$$

e

$$\vec{r}_2'(t) = \left(2,\ 1,\ e^{2t}\right)$$

(d) Do item (c)

$$\|\vec{r}_1'(t)\| = \pi\sqrt{t+1}$$

Com isso,

$$L = \int_0^2 \pi\sqrt{t+1}\,dt = \left.\frac{2\pi(t+1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{t=0}^{t=2} = -\frac{2\pi}{3} + 2\sqrt{3}\pi$$

(e) Do item (c)

$$\vec{r}_2'' = \left(0,\ 0,\ 2e^{2t}\right) \quad \text{e} \quad \|\vec{r}_2'\| = \sqrt{e^{4t}+5}.$$

Daí,

$$\vec{r}_2' \times \vec{r}_2'' = \left(2e^{2t},\ -4e^{2t},\ 0\right) \Rightarrow \|\vec{r}_2' \times \vec{r}_2''\| = 2\sqrt{5}e^{2t}.$$

Portanto,

$$k(t) = \frac{\|\vec{r}_2' \times \vec{r}_2''\|}{\|\vec{r}_2'\|^3} = \frac{2\sqrt{5}e^{2t}}{(e^{4t}+5)^{\frac{3}{2}}}.$$

Questão 3 (bonus). .... ______/ 1 bonus

Mesmo a terra sendo redonda, quando olhamos para o horizonte vemos uma linha reta. Sabendo que a terra é aproximadamente uma esfera, com raio de 6 371 quilômetros, use o que você aprendeu sobre curvas para explicar esse fenômeno.

Solução: A superfície da terra é aproximadamente uma esfera. Quando olhamos para o horizonte, o que vemos é um pedaço bem pequeno de uma curva circular. Sabemos que a curvatura de um círculo de raio r é $k = \frac{1}{r}$.

Sabemos que retas têm curvatura zero. No caso da terra, a curvatura de um círculo máximo é $k = \frac{1}{6371} \approx 0.000157$. Ou seja, muito próximo de zero, o que dá a ilusão de ser uma reta.