Gabarito

Questão 1. .... ______/ 1 pts

Determine a linearização da função $f(x,y) = \dfrac{9}{\sqrt{x^2+2y^2}}$ no ponto $P=(1,2)$ e use-a para encontrar um valor aproximado para $f(1.3, 1.7)$.

Solução: Note que $f(1,2) = 3$ e

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{9x}{(x^2+2y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{1}{3},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{18y}{(x^2+2y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{4}{3}.$$

Assim, a linearização é dada por:

$$L(x,y) = 3 - \frac{1}{3}(x-1) - \frac{4}{3}(y-2)$$

Logo,

$$f(1.3, 1.7) \approx L(1.3, 1.7) = 3.3.$$

Questão 2. .... ______/ 2 pts

Mostre que os limites não existem:

(a) [1 pt] $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y}{x-y}$

(b) [1 pt] $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\sin(y)}{x^3+2y^3}$

Solução:

(a) Testando os caminhos da forma $y = kx$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-kx}{x-kx} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x-k)}{x(1-k)} = \lim_{x\to 0}\frac{x-k}{1-k} = \frac{-k}{1-k}.$$

Como este limite tem valores diferentes para distintos valores de k, temos que o limite em questão não existe.

(b) Testando os caminhos da forma $x = ky$:

$$\lim_{y\to 0}\frac{k^2y^2\sin(y)}{k^3y^3+2y^3} = \lim_{y\to 0}\frac{k^2y^2\sin(y)}{y^3(k^3+2)} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{k^2}{k^3+2}\frac{\sin(y)}{y}\right) = \frac{k^2}{k^3+2}$$

Como este limite tem valores diferentes para distintos valores de k, temos que o limite em questão não existe.

Questão 3 (bonus). ....________/ 1 bonus

Em regiões com inverno severo, o índice de sensação térmica é frequentemente utilizado para descrever a severidade aparente do frio. Esse índice W mede a temperatura subjetiva que depende da temperatura real T e da velocidade do vento, v. Assim, W é uma função de T e de v, e podemos escrever $W = W(T, v)$. A tabela a seguir apresenta valores de W compilados pelo Serviço Nacional de Meteorologia dos Estados Unidos e pelo Serviço Meteorológico do Canadá.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C): T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Usando uma aproximação linear para W, dê uma estimativa para a sensação térmica quando a temperatura estiver a $-18°C$ e a velocidade do vento for de 35 km/h.

Solução: Vamos calcular a aproximação linear em torno do ponto $(-20, 30)$, que está mais próximo do ponto $(-18, 35)$. Sabemos que $W(-20, 30) = -33$. Vamos estimar as derivadas parciais neste ponto:

$$\frac{\partial W}{\partial T}(-20,\ 30) \approx \frac{W(-20+5, 30) - W(-20,\ 30)}{5} = \frac{W(-15, 30) - W(-20,\ 30)}{5}$$
$$= \frac{-26 - (-33)}{5} = 1.4$$

e

$$\frac{\partial W}{\partial v}(-20,\ 30) \approx \frac{W(-20, 30+10) - W(-20,\ 30)}{10} = \frac{W(-20, 40) - W(-20,\ 30)}{10}$$
$$= \frac{-34 - (-33)}{10} = -0.1$$

Com isso, temos a seguinte aproximação linear:

$$L(T, v) = -33 + 1.4(T + 20) - 0.1(v - 30) = 1.4T - 0.1v - 2.0$$

Calculando em $(-18, 35)$ encontramos $L(-18, 35) = -30.7$.

Logo, a sensação térmica será de aproximadamente $-30.7°C$