Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Utilize Multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = x^3 + y^2$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Defina $g(x,y) = x^2 + y^2$. Queremos encontrar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} 3x^2 = 2\lambda x \\ 2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos as 6 seguintes soluções:

$$\left\{\lambda : -\frac{3}{2},\ x : -1,\ y : 0\right\}, \{\lambda : 1,\ x : 0,\ y : -1\}, \{\lambda : 1,\ x : 0,\ y : 1\},$$
$$\left\{\lambda : 1,\ x : \frac{2}{3},\ y : -\frac{\sqrt{5}}{3}\right\}, \left\{\lambda : 1,\ x : \frac{2}{3},\ y : \frac{\sqrt{5}}{3}\right\}, \left\{\lambda : \frac{3}{2},\ x : 1,\ y : 0\right\}.$$

Substituindo-se os pontos na função, vemos que:

$$f(-1,0) = -1,\ f(0,-1) = 1,\ f(0,1) = 1,\ f\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{23}{27},\ f\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right) = \frac{23}{27} \text{ e } f(1,0) = 1.$$

Com isso, o valor máximo absoluto é 1 e o mínimo é -1.

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Determine o plano tangente à superfície $S : -x^2y + yz + e^{xz} + \cos(\pi x) = 4$ no ponto $P = (0,\ 1,\ 2)$.

Solução:

(a) Defina $f(x, y, z) = -x^2y + yz + e^{xz} + \cos(\pi x)$, daí, S é uma superfície de nível de f no nível 4. Com isso, sabemos que o vetor gradiente é ortogonal à S. Note que

$$\nabla f(x, y, z) = \left(-2xy + ze^{xz} - \pi \sin(\pi x), -x^2 + z, xe^{xz} + y\right) \Rightarrow \nabla f\,(0,\ 1,\ 2) = (2, 2, 1)\,.$$

Com isso o plano tangente é da forma

$$d + 2x + 2y + z = 0.$$

Substituindo o ponto nesta equação temos que

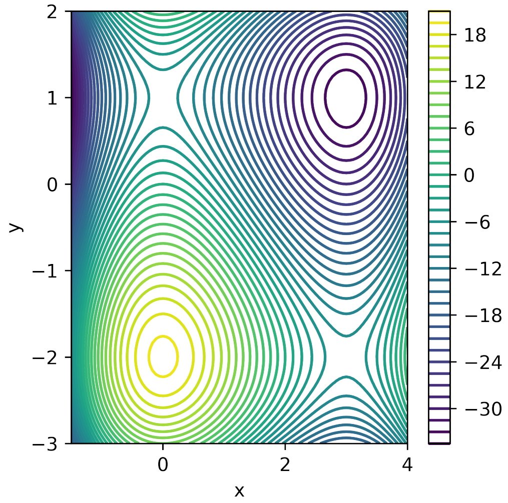
$$d + 4 = 0 \Rightarrow d = -4.$$

Logo, o plano tangente tem equação:

$$2x + 2y + z - 4 = 0.$$

Questão 3. .... ______/ 4 pts

Determine os pontos críticos da seguinte função $f(x,y) = 2x^3 - 9x^2 + 2y^3 + 3y^2 - 12y$ e classifique-os como máximos ou mínimos locais ou pontos de selas.



Mapa de contornos da função f

Solução: Fazendo

$$\nabla f(x,y) = \big(6x\,(x-3)\,, 6y^2 + 6y - 12\big) = (0,0),$$

encontramos os 4 seguintes pontos críticos:

$$P_1 = (0,-2)\,,\ P_2 = (0,1)\,, P_3 = (3,-2)\ \text{ e } P_4 = (3,1)\,.$$

Vamos calcular a matriz Hessiana:

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x - 18 & 0 \\ 0 & 12y + 6 \end{bmatrix}$$

Com isso, vamos aplicar o teste 2ª derivada em cada ponto:

$$\det D^2 f(0,-2) = \det \begin{bmatrix} -18 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix} = 324,\ \text{ e } f_{xx}\,(3,-2) = -18,\ \text{máximo local}$$

$$\det D^2 f(0,1) = \det \begin{bmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} = -324,\ \text{ponto de sela}$$

$$\det D^2 f\,(3,-2) = \det \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & -18 \end{bmatrix} = -324 \text{ ponto de sela}$$

$$\det D^2 f(3,1) = \det \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} = 324,\ \text{ e } f_{xx}\,(3,-2) = 18,\ \text{mínimo local}$$