Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Dê uma parametrização das seguintes curvas:

(a) [1 pt] O segmento de reta ligando os pontos $A = (1,\ 0,\ 1)$ e $B = (3,\ 1,\ 4)$.

(b) [1 pt] O círculo de centro $(0,\ -2)$ e raio $r = 3$.

(c) [1 pt] O gráfico da função $y = \log(x)$.

Solução:

(a) Note que $\overrightarrow{AB} = (2,\ 1,\ 3)$, daí,

$$\vec{r}(t) = (1,\ 0,\ 1) + t\,(2,\ 1,\ 3) = (2t+1,\ t,\ 3t+1)\,,\ t \in [0, 1].$$

(b)

$$\vec{r}(t) = (3\cos(t),\ 3\sin(t) - 2)\,,\, t \in [0, 2\pi].$$

(c)

$$\vec{r}(x) = (x,\ \log(x))\,,\ x \in (0, +\infty[.$$

Questão 2. .... ______/ 3,5 pts

Determine a curvatura da curva parametrizada $\vec{r}(t) = (t^2,\ 2t,\ \log(t))$, $t > 0$.

Solução:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \left(2t,\ 2,\ \frac{1}{t}\right) \Rightarrow v(t) = \|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 4 + \frac{1}{t^2}}.$$

$$\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t) = \left(2,\ 0,\ -\frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow \vec{v} \times \vec{a} = \left(-\frac{2}{t^2},\ \frac{4}{t},\ -4\right)$$

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{v^3} = \frac{2t}{4t^4 + 4t^2 + 1}$$

Questão 3. ....________/ 3,5 pts

Considere a curva $\vec{r}(t) = (t^3,\ 2t+1,\ t^4)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) [1,5 pts] Determine o ponto que esta curva corta o plano XZ.

(b) [2 pts] Qual o ângulo que o vetor tangente faz com este plano.

Solução:

(a) A curva corta o plano XZ quando a segunda coordenada de $\vec{r}$ é nula, isto é,

$$2t + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}.$$

Com isso, o ponto de interseção é:

$$P = \vec{r}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{16}\right).$$

(b) Primeiramente, vamos obter o vetor tangente no ponto de interseção.

$$\vec{r}\,'(t) = \left(3t^2,\ 2,\ 4t^3\right) \Rightarrow \vec{v} = \vec{r}\,'\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{4},\ 2,\ -\frac{1}{2}\right).$$

Sabemos que o vetor normal ao plano XZ é o vetor $\vec{j} = (0,\ 1,\ 0)$. Com isso, o cosseno do ângulo entre $\vec{v}$ e $\vec{j}$ é:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{j}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{j}\|} = \frac{2}{\frac{\sqrt{77}}{4}} = \frac{8\sqrt{77}}{77}.$$

Assim,

$$\theta = \arccos\left(\frac{8\sqrt{77}}{77}\right) \approx 24.2608319318853\,^\circ.$$

Por fim, o ângulo buscado é o complementar deste, isto é,

$$\alpha = 90 - \theta \approx 65.7391680681147\,^\circ.$$