Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Utilize Multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 2y - 1$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Defina $g(x,y) = x^2 + y^2$. Queremos encontrar $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 8y - 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtemos as seguintes soluções

$$\left\{\lambda : 1,\ x : -\frac{2\sqrt{2}}{3},\ y : \frac{1}{3}\right\}, \left\{\lambda : 1,\ x : \frac{2\sqrt{2}}{3},\ y : \frac{1}{3}\right\}, \{\lambda : 3,\ x : 0,\ y : 1\}, \{\lambda : 5,\ x : 0,\ y : -1\}.$$

Substituindo-se os pontos na função, vemos que:

$$f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},\ f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},\ f(0,1) = 1 \text{ e } f(0,-1) = 5.$$

Com isso, o valor máximo absoluto é 5 e o mínimo é $-\frac{1}{3}$.

Questão 2. .... ______/ 3 pts

Determine o plano tangente à superfície $S : x^3 + 8y^2z + 3y^2 - 3yz^3 = 4$ no ponto $P = (1,\ -1,\ 0)$.

Solução:

(a) Defina $f(x, y, z) = x^3 + 8y^2z + 3y^2 - 3yz^3$, daí, S é uma superfície de nível de f no nível 4. Com isso, sabemos que o vetor gradiente é ortogonal à S. Note que

$$\nabla f(x, y, z) = \left(3x^2, 16yz + 6y - 3z^3, 8y^2 - 9yz^2\right) \Rightarrow \nabla f\,(1,\ -1,\ 0) = (3, -6, 8)\,.$$

Com isso o plano tangente é da forma

$$d + 3x - 6y + 8z = 0.$$

Substituindo o ponto nesta equação temos que

$$d + 9 = 0 \Rightarrow d = -9.$$

Logo, o plano tangente tem equação:

$$3x - 6y + 8z - 9 = 0.$$

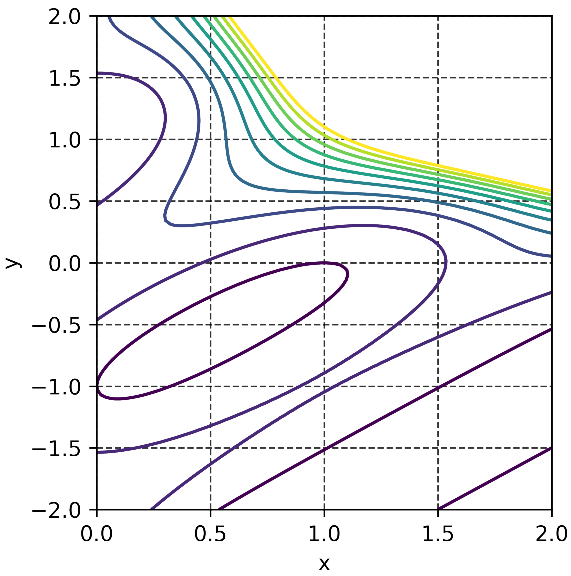
Questão 3. .... ______/ 4 pts

Considere a função $f(x,y) = e^{2xy} + \cos(\pi(x-y))$.

(a) [1 pt] Qual é o nome dado ao gráfico abaixo? E como são chamadas as curvas deste gráfico?

(b) [2 pts] Determine a direção na qual a função f cresce mais rapidamente no ponto $(1,\ 0)$. E desenhe no gráfico abaixo esta direção.

(c) [1 pt] Determine a derivada direcional de f na direção do vetor $v = (1,\ 3)$, no ponto $(1,\ 0)$).



Solução:

(a) O gráfico é chamado mapa de contorno e as curvas são chamadas curvas de nível.

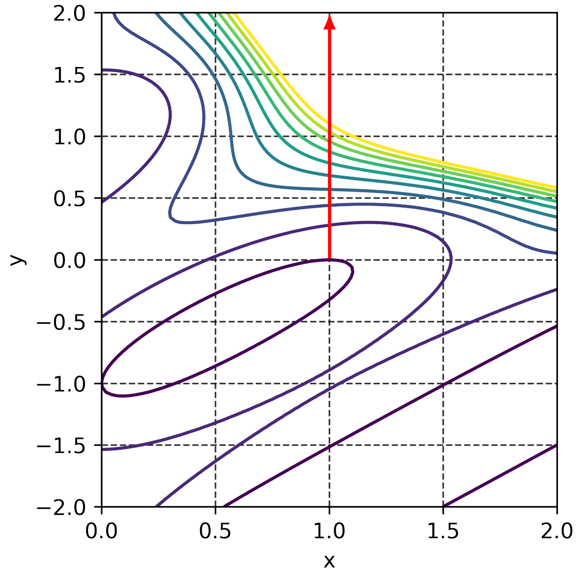
(b) Sabemos que esta direção é dada pelo $\nabla f\,(1,\ 0)$. Note que

$$\nabla f(x,y) = \left(2ye^{2xy} - \pi\sin(\pi(x-y)),\ 2xe^{2xy} + \pi\sin(\pi(x-y))\right).$$

Portanto,

$$\nabla f\,(1,\ 0) = (0,\ 2)\,.$$

A seguir apresentamos o vetor gradiente no gráfico.



(c) Primeiramente, vamos normalizar v. Note que $\|v\| = \sqrt{10}$, com isso

$$u = \frac{v}{\|v\|} = \left(\frac{\sqrt{10}}{10},\ \frac{3\sqrt{10}}{10}\right).$$

Portanto, a derivada direcional na direção do vetor v e no ponto P é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1,\ 0) = \nabla f\,(1,\ 0) \cdot u = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$