



Gabarito

1. Uma rampa em forma de hélice circular, como a da figura abaixo, será projetada em um edifício garagem. Sabendo que o raio médio da rampa é 6 metros, que o edifício tem 12 metros de altura e que a rampa dará 4 voltas completas para chegar ao topo do edifício, faça o que se pede:



- (a) Dê uma parametrização para a hélice descrita pelo raio médio da rampa.
(b) Estime o comprimento da rampa usando a parametrização da hélice obtida no item anterior.
(c) Estime o ângulo de inclinação da rampa em relação ao solo.

Solução:

- (a) Sabemos que uma hélice circular é da forma $\vec{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, onde a, b são constantes. Na rampa em questão, temos que

$$\vec{r}(t) = \left(6 \cos(t), 6 \sin(t), \frac{3t}{2\pi} \right), \quad t \in [0, 8\pi].$$

- (b) Note que $\vec{r}'(t) = (-6 \sin(t), 6 \cos(t), \frac{3}{2\pi})$ e

$$\|\vec{r}'(t)\| = \sqrt{36 \sin^2(t) + 36 \cos^2(t) + \frac{9}{4\pi^2}} = \frac{3\sqrt{1 + 16\pi^2}}{2\pi}.$$

Com isso, o comprimento da rampa é dado por

$$L = \int_0^{8\pi} \|\vec{r}'(t)\| dt = \frac{3\sqrt{1 + 16\pi^2}}{2\pi} \int_0^{8\pi} dt = 12\sqrt{1 + 16\pi^2} \approx 151.273158690198.$$

Portanto, a rampa tem aproximadamente 151 metros.

- (c) A inclinação da rampa é o ângulo θ entre o vetor tangente $\vec{v} = \vec{r}'(0)$ com o plano XY . Este ângulo é o complementar do ângulo α entre \vec{v} e o vetor $\hat{k} = (0, 0, 1)$.

Vamos calcular α . Note que $\vec{v} = \vec{r}'(0) = (0, 6, \frac{3}{2\pi})$, daí,

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \hat{k}|}{\|\vec{v}\| \cdot \|\hat{k}\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 16\pi^2}}.$$

Com isso,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1 + 16\pi^2}}\right) \approx 85.4501346908789^\circ.$$

Logo $\theta \approx 4.54986530912109^\circ$.