Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia
Departamento de Física e Matemática
Gabarito da 2ª prova de Cálculo III 2/2011

Questão 1 (3 pontos):

Seja $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le x \le 2 \text{ e } -2 \le y \le 2\}$.

a) Encontre todos os pontos críticos no interior de D.

b) Determine a natureza dos pontos críticos do item (a).

c) Encontre os pontos de máximo e mínimo absolutos.

Solução:

a) Como f é de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$ os pontos críticos são os pontos $(x,y) \in D$ que satisfazem

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 3) = (0,0).$$

Daí, os pontos críticos são: $P_1 = (1,1)$ e $P_2 = (1,-1)$.

b) Note que $f_{xx}(x,y) = 6x$ e $\det D^2 f(x,y) = 36xy$. Portanto, pelo Teste da derivada segunda,

$$\det D^2 f(P_1) = 36 \text{ e } f_{xx}(P_1) = 6 \Rightarrow P_1 \text{ é ponto de mínimo relativo.}$$

$$\det D^2 f(P_2) = -36 \Rightarrow P_2 \text{ é ponto de sela.}$$

c) Como D é fechado e limitado e f é contínua em $\mathbb{R}^2$, então, pelo Teorema de Weierstrass, f assume máximo e mínimo absolutos em D. No item (b) vimos que, no interior de D, P_1 é o único ponto de mínimo relativo em D e não temos máximo relativo, portanto $f(P_1) = -4$ é candidato a mínimo absoluto.

A análise da fronteira de D será feita por casos:

1) $0 \le x \le 2$ e $y = -2$.
Neste caso defina $h(x) = f(x,2) = x^3 - 3x - 2$, $x \in [0,2]$ e note que $h'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.
Como $h(0) = -2$, $h(2) = 0$ e $h(1) = -4$, temos que
$P_3 = (1,-2) \Rightarrow f(P_3) = -4$, daí, P_3 é candidato a mínimo.
$P_4 = (2,-2) \Rightarrow f(P_4) = 0$ é candidato a máximo.

2)

Questão 2 (3 pontos): Mostre que a equação

$$xy + z + 3xz^5 = 4$$

define z implicitamente como função de x e y na vizinhança do ponto $(1, 0, 1)$ e calcule as derivadas z_x, z_y e z_{xy} no ponto $(1, 0)$.

Questão 3 (3 pontos): Utilizando o método dos multiplicadores de Lagrange encontre os pontos de máximo e mínimo da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ sujeita a restrição $x^2 + y^2 = 1$.

Questão 4 (1 pontos): Mostre que o valor máximo de $a^2b^2c^2$ sobre uma esfera de raio r centrada na origem é $\left(\dfrac{r^2}{3}\right)^3$. Usando este fato, prove que para números não negativos a, b, c,

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a + b + c}{3}.$$