Universidade Federal Fluminense – PURO
Instituto de Ciência e Tecnologia
Departamento de Física e Matemática
Gabarito da 1ª Cálculo III

Questão 1 (3 pontos): Determine o limite ou mostre que não existe

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

Solução: Testando os caminhos da forma $y = mx$ temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Como o limite depende da constante m temos que ele não existe.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^6}{x^6+y^2}$

Solução: Pelo caminho $y = x$, vemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6+x^2} = 0.$$

Pelo caminho $y = 0$, vemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6} = 1.$$

Logo o limite não existe.

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)$

Solução: Note que

$$0 \le \left| x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right| \le |x| \to 0,$$

quando $(x,y)\to(0,0)$. Logo, pelo Teorema do Confronto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$$

Questão 2 (3 pontos): Determine o domínio e discuta a continuidade e a diferenciabilidade das funções

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solução: Domínio de f é $\mathbb{R}^2$. Como $z = \sqrt{t}$ é contínua em $\{t \in \mathbb{R}; t \geq 0\}$, $t(x,y) = x^2+y^2 \geq 0$ é contínua em $\mathbb{R}^2$ e $f(x,y) = z \circ t(x,y)$, então f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

Como
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
são contínuas em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, então f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Como as derivadas parciais não exitem em $(0,0)$, temos que f não é diferenciável em $(0,0)$.

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solução: O domínio de g é $\mathbb{R}^2$. Em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ g é racional, portanto é contínua. Pelo item (a) da Questão 1 vimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ não existe, portanto g não é contínua em $(0,0)$ e assim não é diferenciável na origem.

Note que
$$\frac{\partial g}{\partial x} = \begin{cases} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \begin{cases} \frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Daí, $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ são contínuas $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, pois são racionais, logo g é diferenciável em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Questão 3 (3 pontos): Seja $f(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ a altura de uma montanha na posição (x,y).

a) Determine **o vetor unitário** que indica a direção que se deve caminhar para subir a montanha mais rapidamente, partindo do ponto $P = (2,0)$.

b) Qual a taxa de variação máxima de subida do item anterior?

Solução:

a) Sabemos que o vetor gradiente de f nos dá a direção de maior crescimento da função. Neste caso, note que

$$\nabla f(x,y) = (-4xe^{-x^2}, -6ye^{-3y^2}) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (-8e^{-4}, 0).$$

Portanto, o vetor unitário que indica a direção que se deve caminhar para subir a montanha mais rapidamente, partindo de P é

$$\frac{\nabla f(0,0)}{\|\nabla f(0,0)\|} = (-1,0).$$

b) Sabemos que a taxa máxima de subida é a norma do gradiente, porntanto a taxa máxima é

$$\|\nabla f(0,0)\| = 8e^{-4}$$

Questão 4 (1 pontos): Se $z = f(x,y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ e $u(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2$$

Solução: Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Com isso,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\operatorname{sen}\theta\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(-r\operatorname{sen}\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$