Universidade Federal Fluminense
Faculdade Federal de Rio das Ostras
Departamento de Ciência e Tecnologia (RCT)

Gabarito da $2^{\underline{a}}$ Prova – Cálculo III – 27/10 – 09:00 - 11:00

Questão 1 (3 pontos): Determine o limite ou mostre que não existe

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$; b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3xy^2}{x^2+y^2}$; c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y}$;

Solução:

a) Calculando este limite pelos caminhos da forma $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+a^2x^2} = \frac{1}{1+a^2},$$

Portanto este limite não existe pois depende do parâmetro a.

b) Note que

$$\left|\frac{x^4+3xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{3|x|y^2}{x^2+y^2} \le \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} + \frac{3|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = x^2+y^2+3|x|.$$

Daí,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{x^4+3xy^2}{x^2+y^2}\right| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2+3|x|) = 0$$

e portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+3xy^2}{x^2+y^2} = 0.$$

c) Calculando o limite pelo caminho $x = 0$ temos que

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y} = 0.$$

Pelo caminho $y = x^3 - x^2$ temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3+(x^3-x^2)^3}{x^3} = 1.$$

Portanto, pela unicidade do limite, este limite não existe.

Questão 2 (3 pontos): Uma lámina de metal está situada num plano de modo que a temperatura $T = T(x,y)$ num ponto (x,y) é inversamente proporcional à distância do ponto à origem. Sabendo que a temperatura no ponto $P = (3,4)$ é 100^o C, determine a direção em que T aumenta mais rapidamente no ponto P .

Solução:

Como T é inversamente proporcional à distância do ponto à origem, temos que T é da forma

$$T(x,y) = \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

para algum $k \in \mathbb{R}$. Neste caso,

$$100 = T(3,4) = \frac{k}{5} \Rightarrow k = 500.$$

Sabemos que o vetor gradiente indica a direção de maior crescimento da temperatura, daí,

$$\nabla T(x,y) = \left(\frac{-500x}{(\sqrt{x^2+y^2})^{\frac{3}{2}}}, \frac{-500y}{(\sqrt{x^2+y^2})^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Com isso, a direção em que T aumenta mais rapidamente no ponto P é dado pelo vetor

$$\nabla T(3,4) = (-12,-16).$$

Questão 3 (2 pontos): Discuta a diferenciabilidade da função $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Solução:

Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

Como estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, pois é o quociente de funções contínuas, temos que f é diferenciável em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

Vejamos o ponto $(0,0)$. Note que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}.$$

Como o último limite não existe temos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ não existe no ponto $(0,0)$, logo f não pode ser diferenciável em $(0,0)$.

Questão 4 (2 pontos): Seja $g : \mathbb{R}^2 \to R$ diferenciável, defina $f(r,\theta) = g(r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$. Sabendo que $\frac{\partial g}{\partial x}(0,1) = 2$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,1) = 3$, calcule $\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Solução:

Considere as funções $x(r,\theta) = r\cos\theta$ e $y(r,\theta) = r \operatorname{sen}\theta$ e note que $x\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 0$ e $y\left(1,\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Assim, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}.$$

Com isso,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}(r,\theta) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) r \operatorname{sen}\theta + \frac{\partial g}{\partial y} r\cos\theta.$$

Daí,

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = -2.$$