Universidade Federal Fluminense
Faculdade Federal de Rio das Ostras
Departamento de Ciência e Tecnologia (RCT)

Gabarito da 1ª Prova – Cálculo III – 13/09 – 09:00 - 11:00

Questão 1 (4 pontos):

Solução:

a) As funções coordenadas do vetor α para cada $t \in \mathbb{R}$ são $x = 1-t$ e $y = 3t-2$, daí, isolando t em cada equação vemos que $y = 3x-5$, logo a trajetória de α é uma reta. Do mesmo modo vemos que as coordenadas do vetor β satisfazem a equação cartesiana $y = (1-x)^2$, portanto a trajetória de β é uma parábola. Os pontos onde as trajetórias se cruzam são aqueles que satisfazem as duas equações, portanto quando $3x - 5 = (1-x)^2$. Resolvendo essa equação, vemos que tais pontos são $(2,1)$ e $(3,4)$.

b) Para que as partículas se encontre devemos ter $\alpha(t) = \beta(t)$ para algum $t \in \mathbb{R}$, ou seja, $1 - t = 1 + t$ e $3t - 2 = t^2$. Da primeira equação vemos que a única possibilidade é $t = 0$, entretanto 0 não satisfaz a segunda, logo $\alpha(t)$ nunca é igual a $\beta(t)$.

c) Queremos encontrar $t \in \mathbb{R}$ tal que $\|\alpha'(t)\| = \|\beta'(t)\|$. Podemos ver que $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{10}$ e $\|\beta'(t)\| = \sqrt{1+4t^2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Com isso,

$$\|\alpha'(t)\| = \|\beta'(t)\| \Leftrightarrow t = -\frac{3}{2} \text{ ou } t = \frac{3}{2}.$$

Questão 2 (4 pontos):

Solução:

Note que $\alpha(0) = (1,2)$. Denotemos por r a reta perpendicular à α no ponto $(1,2)$. Sabemos que os coeficientes da equação cartesiana da reta r são sempre as coordenadas de um vetor perpendicular a esta reta, portanto são as coordenadas de um vetor tangente à α. Assim, um vetor tangente à α no ponto $(1,2)$ é o vetor $\alpha'(0) = (2,2)$. Com isso, a reta r tem equação da forma.

$$2x + 2y + c = 0.$$

Como r passa pelo ponto $(1,2)$ temos que este deve satisfazer a equação da reta, portanto obtemos que $c = 6$, daí,

$$r: \; 2x + 2y + 6 = 0.$$

Questão 3 (2 pontos):

Solução:

Sabemos que $V = v\,T$, onde T é o vetor tangente unítario. Como o vetor tangente unitário é o mesmo para qualquer parametrização com mesmo sentido de percurso da partícula, tomemos a seguinte parametrização $\alpha(t) = (t, t^2)$. Com isso,

$$T = \frac{\alpha'(2)}{\|\alpha'(2)\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(1,4) \qquad \text{e} \qquad V = \frac{3}{\sqrt{17}}(1,4).$$

Sabemos que o vetor aceleração é dado por

$$A = \frac{dv}{dt}T + v^2kN,$$

onde k é a curvatura e N é o vetor normal unitário da curva no ponto $(2,4)$. Como N aponta para o lado côncavo da curva, sabemos que N é a rotação de 90^o do vetor T no sentido anti-horário, ou seja, $N = \frac{1}{\sqrt{17}}(-4,1)$. Além disso, temos que

$$k = \frac{|y''(2)|}{(1+y'(2))^{3/2}} = \frac{2}{17\sqrt{17}}.$$

Com isso,

$$A = \frac{7}{\sqrt{17}}(1,4) + \frac{18}{(17)^{5/2}}(-4,1) = \frac{1}{(17)^{5/2}}(65,46).$$