Universidade Federal Fluminense
Faculdade Federal de Rio das Ostras
Departamento de Ciência e Tecnologia (RCT)

Gabarito da $2^{\underline{a}}$ Prova – Cálculo III – 10/06 – 11:00 - 13:00

Questão 1 (4 pontos):

Solução:

a) Calculando o limite ao longo das retas da forma $y = ax$ temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{6ax^4}{2x^4 + a^4x^4} = \frac{6a}{2+a^4}.$$

Como para valores distintos de a temos valores distintos do limtes, então o limite não existe.

b) Calculando o limite ao longo reta $y = x$ temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+1} = 0.$$

Calculando o limite ao longo da curva $y = x^2$ temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Logo o limite não existe, já que por caminhos distintos obtemos limites distintos.

c) Calculando o limite ao longo reta $y = x$ temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x^8 + x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^6+1} = 0.$$

Por outro lado, pelo caminho $y = x^4$ temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^8}{x^8 + x^8} = \frac{1}{2}.$$

Logo o limite não existe.
d) Note que, como $x^2 \leq x^2 + y^2$ temos que

$$0 \leq \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} \leq \frac{(x^2+y^2)\operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} = \operatorname{sen}^2 y,$$

Daí,

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}^2 y = 0.$$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen}^2 y}{x^2+y^2} = 0.$

Questão 2 (4 pontos):

Solução:

a) Note que, para $(x, y) \neq (0, 0)$ temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Em $(0,0)$, pela definição temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Daí,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2yx^4}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

As duas funções são contínuas para $(x,y)\neq(0,0)$. Vejamos que também são contínuas em $(0,0)$.
Note que como $y^4 \leq (x^2+y^2)^2$, então

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|x|(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x| = 0,$$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ e portanto $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ é contínua.
Analogamente, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ é contínua.
Logo, como as derivadas parciais são contínuas, então f é diferenciável.

b) Basta verificar que as derivadas de g são contínuas. Note que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{(x^2+y^2+1)^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Como as derivadas parciais são quocientes de polinômios, então são contínuas em seu domínio que neste caso é $\mathbb{R}^2$ já que o denominador nunca se anula. Logo, g é diferenciável.

Questão 3 (2 pontos):

Solução:

a) Note que $T(1,4,0)=1$, portanto queremos encontrar a equação dos ponto (x,y,z) tais que $T(x,y,z)=1$, ou seja, $e^{y\ln(x)-z} = 1 = e^0$, como a exponencial é injetiva, $y\ln(x)-z=0$, logo todos os pontos do espaço com temperatura 1 satisfazem

$$z = y\ln(x)$$

b) A superfície $z=y\ln(x)$ é o gráfico da função $f(x,y)=y\ln(x)$, que é uma função diferenciável. Neste caso, sabemos que a equação do plano tangente no ponto $(1,4,0)$é dada por

$$z = f(1,4) + f_x(1,4)(x-1) + f_y(1,4)(y-4).$$

Vemos que

$$f_x(x,y) = \frac{y}{x} \text{ e } f_y(x,y) = \ln(x),$$

daí, a equação do plano tangente é

$$z = 4(x-1).$$