Universidade Federal Fluminense
Faculdade Federal de Rio das Ostras
Departamento de Ciência e Tecnologia (RCT)

Gabarito da 1ª Prova – Cálculo III – 29/04 – 11:00 - 13:00

Questão 1 (3,3 pontos):

Solução:

a) $\alpha(t) = (t, \, \texttt{sen}\, t), 0 \leq t \leq \pi$;

b) Vamos parametrizar a reta tangente a α no ponto $(\pi, 0)$. Note que $\alpha(\pi) = (\pi, 0)$, assim a reta tangente é a reta que passa pelo ponto $\alpha(\pi)$ e paralela ao vetor $\alpha'(\pi)$. Como $\alpha'(t) = (1, \cos t)$, esta reta pode ser parametrizada por

$$\beta(t) = \alpha(\pi) + t\alpha'(\pi) = (\pi + t, -t), \, t \in \mathbb{R}.$$

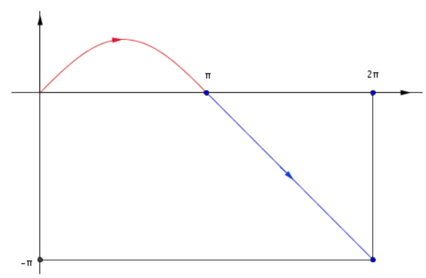
Como queremos o segmento de $(\pi, 0)$ até o ponto de abscissa 2π, limitamos $0 \leq t \leq \pi$.

c) Queremos criar uma curva dada pela junção das duas anteriores. Para isso precisamos mudar o parâmentreo de β de modo que o extremo inferior desse intervalo coincida com o extremo superior do intervalo de α. Precisamos criar uma função mudança de parametrização que leve o intervalo $[0, \pi]$ no intervalo $[\pi, 2\pi]$, ou seja, precisamos criar uma função bijetora $u : [0, \pi] \to [\pi, 2\pi]$. Note que a função mais simples que satisfaz essas propriedades é a reta $u(t) = t + \pi$. Assim, invertendo essa função temos que $t = u - \pi$. Então reparametrizando β temos que

$$\beta(u) = (u, \pi - u), \, u \in [\pi, 2\pi].$$

Com isso, a parametrização procurada e o traço da curva são dados por

$$\gamma(u) = \begin{cases} (u, \, \texttt{sen}\, u), 0 \leq u \leq \pi \\ (u, \pi - u), \, \pi \leq u \leq 2\pi. \end{cases}$$



Questão 2 (3,3 pontos):

Solução:

a) Sabemos que a função parâmetro de arco é dada por $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| du = \int_0^t \sqrt{3} e^u du = \sqrt{3}(e^t - 1)$. Invertendo essa função obtemos a mudança de parâmetro desejada, ou seja, $t = \ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$. Com isso, a reparametrização p.c.a é dada por

$$\alpha(s) = \left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right), \, \texttt{sen}\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right), 1\right), \, s \geq 0.$$

b) Sabemos que $k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|}$. Do item anterior temos que $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{3} e^t$. Daí,

$$T(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos t - \, \texttt{sen}\, t, \, \texttt{sen}\, t + \cos t, 1).$$

Assim,

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\,\texttt{sen}\,t + \cos t, \cos t - \,\texttt{sen}\,t, 0) \Rightarrow \|T'(t)\| = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Portanto,

$$k(t) = \frac{\sqrt{2}}{3e^t} \text{ e } \rho(t) = \frac{3e^t}{\sqrt{2}}.$$

Questão 3 (3,4 pontos):

Solução:

Sabemos que a compontete normal do vetor aceleração é dado por $A_N = v^2 k$, ou seja, depende somente da velocidade do caminhão e da curvatura da curva. Queremos encontrar os possíveis valores de v para que $A_N \leq 30$, portanto temos que $v \leq \sqrt{\frac{30}{k}}$. Como a curvatura depende somente da geometria da curva e não da parametrização, podemos parametrizar a parábola como gráfico de função $\alpha(t) = (t, \frac{t^2}{120})$ e sabemos que neste caso a curvatura é dada pela expressão $k = \dfrac{|y''|}{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$. Assim, no vétice temos que $t = 0$ e portanto

$$k(t) = \frac{\frac{1}{60}}{(1+(\frac{t}{60})^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow k(0) = \frac{1}{60}.$$

Logo, $v \leq 30\sqrt{2}$.