Em qualquer caso, precisamos determinar o domínio para θ. Então nos perguntamos: quantas rotações completas são necessárias até que a curva comece a se repetir? Se a resposta for n, então

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta+2n\pi)}{5}=\operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5}+\frac{16n\pi}{5}\right)=\operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

e assim precisamos que $16n\pi/5$ seja um múltiplo par de π. Isso ocorrerá primeiro quando $n = 5$. Portanto, traçamos a curva inteira se especificarmos que $0 \leqslant \theta \leqslant 10\pi$. Trocando de θ para t, temos as equações

$$x = \operatorname{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \operatorname{sen}(8t/5)\operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 10\pi$$

e a Figura 18 nos mostra a curva resultante. Observe que essa rosácea tem 16 laços. □

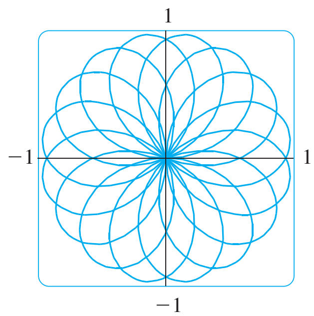


FIGURA 18
$r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$

EXEMPLO 11 Investigue a família de curvas polares dada por $r = 1 + c\operatorname{sen}\theta$. Como o formato muda conforme c varia? (Essas curvas são chamadas **limaçons**, que em francês significa caracol, por causa do formato dessas curvas para certos valores de c.)

■ No Exercício 55 pediremos que você demonstre analiticamente o que descobriu a partir dos gráficos na Figura 19.

SOLUÇÃO A Figura 19 mostra gráficos desenhados por computador para vários valores de c. Para $c > 1$ existe um laço que reduz de tamanho quando c diminui. Quando $c = 1$, o laço desaparece e a curva torna-se a cardioide que esboçamos no Exemplo 7. Para c entre 1 e $\frac{1}{2}$, a cúspide da cardioide é suavizada e torna-se uma "covinha". Quando c diminui de $\frac{1}{2}$ para 0, a limaçon parece oval. Essa oval se torna mais circular quando $c \to 0$ e quando $c = 0$, a curva é apenas o círculo $r = 1$.

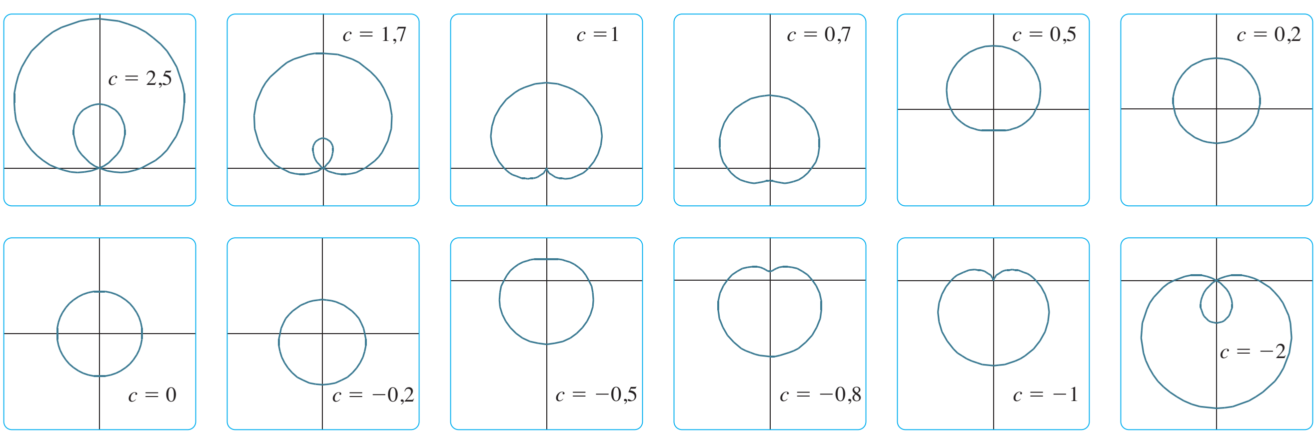


FIGURA 19
Membros da família de limaçons
$r = 1 + c\operatorname{sen}\theta$

As partes restantes da Figura 18 mostram que, quando c se torna negativo, os formatos mudam na ordem inversa. De fato, essas curvas são reflexões ao redor do eixo horizontal das curvas correspondentes com c positivo. □

10.3 EXERCÍCIOS

1-2 Marque o ponto cujas coordenadas polares são dadas. A seguir, encontre dois outros pares de coordenadas polares desse ponto, um com $r > 0$ e o outro com $r < 0$.

1. (a) $(2, \pi/3)$ (b) $(1, -3\pi/4)$ (c) $(-1, \pi/2)$

2. (a) $(1, 7\pi/4)$ (b) $(-3, \pi/6)$ (c) $(1, -1)$

3-4 Marque o ponto cujas coordenadas polares são dadas. A seguir, encontre as coordenadas cartesianas do ponto.

3. (a) $(1, \pi)$ (b) $(2, -2\pi/3)$ (c) $(-2, 3\pi/4)$

4. (a) $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ (b) $(1, 5\pi/2)$ (c) $(2, -7\pi/6)$

5-6 As coordenadas cartesianas de um ponto são dadas.

(i) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r > 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

(ii) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r < 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

5. (a) $(2, -2)$ (b) $\left(-1, \sqrt{3}\right)$

6. (a) $\left(3\sqrt{3}, 3\right)$ (b) $(1, -2)$

7-12 Esboce a região no plano que consiste em pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas.

7. $1 \leqslant r \leqslant 2$

8. $r \geqslant 0, \quad \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$

9. $0 < r < 4, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/6$

10. $2 < r \leqslant 5, \quad 3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$

11. $2 < r < 3, \quad 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $r \geqslant 1, \quad \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

13. Encontre a distância entre os pontos com coordenadas polares $(2, \pi/3)$ e $(4, 2\pi/3)$.

14. Encontre uma fórmula para a distância entre os pontos com coordenadas polares (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2).

15-20 Encontre a equação cartesiana para a curva descrita pela equação polar dada.

15. $r = 2$

16. $r \cos \theta = 1$

17. $r = 3 \operatorname{sen} \theta$

18. $r = 2 \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta$

19. $r = \operatorname{cossec} \theta$

20. $r = \operatorname{tg} \theta \sec \theta$

21-26 Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

21. $y = 5$

22. $x^2 + y^2 = 9$

23. $x = -y^2$

24. $y = 2x - 1$

25. $x^2 + y^2 = 2cx$

26. $xy = 4$

27-28 Para cada uma das curvas descritas, decida se a curva seria mais facilmente dada por uma equação polar ou por uma equação cartesiana. Então, escreva uma equação para a curva.

27. (a) Uma reta que passa pela origem e forma um ângulo de $\pi/6$ com o eixo x positivo.
(b) Uma reta vertical pelo ponto $(3, 3)$.

28. (a) Um círculo com raio 5 e centro $(2, 3)$.
(b) Um círculo com centro na origem e raio 4.

29-48 Esboce a curva com a equação dada.

29. $\theta = -\pi/6$

30. $r^2 - 3r + 2 = 0$

31. $r = \operatorname{sen} \theta$

32. $r = -3 \cos \theta$

33. $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta), \theta \geqslant 0$

34. $r = 1 - 3 \cos \theta$

35. $r = \theta, \theta \geqslant 0$

36. $r = \ln \theta, \theta \geqslant 1$

37. $r = \operatorname{sen} 2\theta$

38. $r = 2 \cos 3\theta$

39. $r = 2 \cos 4\theta$

40. $r = 3 \cos 6\theta$

41. $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$

42. $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$

43. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$

44. $r^2 = \cos 4\theta$

45. $r = 2 \cos (3\theta/2)$

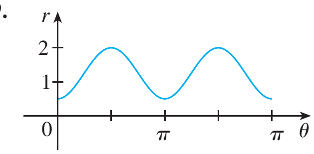
46. $r^2\theta = 1$

47. $r = 1 + 2 \cos 2\theta$

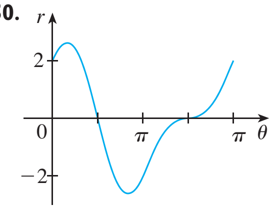
48. $r = 1 + 2 \cos(\theta/2)$

49-50 A figura mostra o gráfico de r como uma função de θ em coordenadas cartesianas. Use-o para esboçar a curva polar correspondente.

49.



50.



51. Mostre que a curva polar $r = 4 + 2 \sec \theta$ (chamada **conchoide**) tem a reta $x = 2$ como uma assíntota vertical mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} x = 2$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchoide.

52. Mostre que a curva $r = 2 - \operatorname{cossec} \theta$ (também uma conchoide) tem a reta $y = -1$ como uma assíntota horizontal mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} y = -1$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchoide.

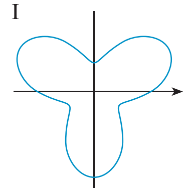
53. Mostre que a curva $r = \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$ (denominada **cissoide de Diocles**) tem a reta $x = 1$ como uma assíntota vertical. Mostre também que a curva está inteiramente dentro da faixa vertical $0 \leqslant x < 1$. Use esses fatos para ajudar a esboçar a cissoide.

54. Esboce a curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

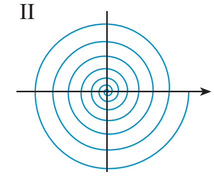
55. (a) No Exemplo 11 os gráficos sugerem que a limaçon $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ tem um laço interno quando $|c| > 1$. Demonstre que isso é verdadeiro e encontre os valores de θ que correspondam ao laço interno.
(b) A partir da Figura 19 parece que a limaçon perde sua covinha quando $c = \frac{1}{2}$. Demonstre isto.

56. Associe as curvas polares com seus respectivos gráficos I–VI. Dê razões para suas escolhas. (Não use uma ferramenta gráfica.)
(a) $r = \sqrt{\theta}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
(b) $r = \theta^2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$
(c) $r = \cos(\theta/3)$
(d) $r = 1 + 2 \cos \theta$
(e) $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$
(f) $r = 1 + 2 \operatorname{sen} 3\theta$

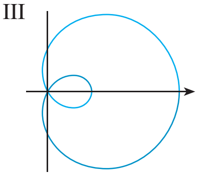
I

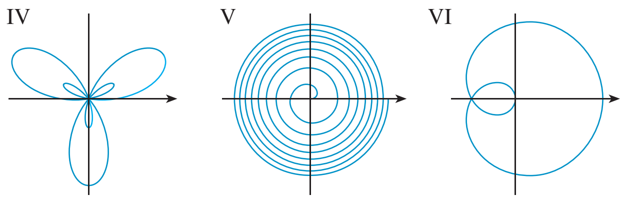


II



III





57-62 Calcule a inclinação da reta tangente para a curva polar dada no ponto especificado pelo valor de θ.

57. $r = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/6$

58. $r = 2 - \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/3$

59. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$

60. $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

61. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$

62. $r = 1 - 2\cos\theta, \quad \theta = \pi/3$

63-68 Encontre os pontos na curva dada onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

63. $r = 3\cos\theta$

64. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

65. $r = 1 + \cos\theta$

66. $r = e^{\theta}$

67. $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$

68. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

69. Mostre que a equação polar $r = a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, para a qual $ab \neq 0$, representa um círculo e calcule seu centro e o raio.

70. Mostre que as curvas $r = a\operatorname{sen}\theta$ e $r = a\cos\theta$ se interceptam com ângulos retos.

71-76 Use uma ferramenta gráfica para traçar a curva polar. Escolha o intervalo do parâmetro para ter certeza de que você fez a curva inteira.

71. $r = 1 + 2\operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide de Freeth)

72. $r = \sqrt{1 - 0{,}8\operatorname{sen}^2\theta}$ (hipopédia)

73. $r = e^{\operatorname{sen}\theta} - 2\cos(4\theta)$ (curva borboleta)

74. $r = \operatorname{sen}^2(4\theta) + \cos(4\theta)$

75. $r = 2 - 5\operatorname{sen}(\theta/6)$

76. $r = \cos(\theta/2) + \cos(\theta/3)$

77. Como os gráficos $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ e $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ estão relacionados ao gráfico $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$? Em geral, como o gráfico de $r = f(\theta - \alpha)$ está relacionado ao gráfico de $r = f(\theta)$?

78. Use um gráfico para estimar a coordenada y dos pontos mais altos na curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$. Então, use o cálculo para encontrar o valor exato.

79. (a) Investigue a família de curvas definidas pelas equações polares $r = \operatorname{sen} n\theta$, onde n é um inteiro positivo. Como o número de laços está relacionado a n?

(b) O que aconteceria se a equação na parte (a) fosse trocada por $r = |\operatorname{sen} n\theta|$?

80. Uma família de curvas é dada pelas equações $r = 1 + c\operatorname{sen} n\theta$, onde c é um número real e n é um inteiro positivo. Como o gráfico muda quando n aumenta? Como ele muda quando c varia? Ilustre traçando membros suficientes da família para justificar suas conclusões.

81. Uma família de curvas tem equações polares

$$r = \frac{1 - a\cos\theta}{1 + a\cos\theta}$$

Investigue como o gráfico muda quando o número a varia. Em particular, você deveria identificar os valores de transição de a para os quais o formato básico da curva muda.

82. O astrônomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudou a família de curvas com equações polares

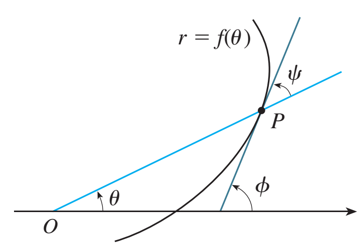
$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

para as quais a e c são números reais positivos. Essas curvas são chamadas **ovais de Cassini**, embora tenham formato oval apenas para certos valores de a e c. (Cassini pensou que essas curvas pudessem representar as órbitas planetárias melhor que as elipses de Kepler.) Investigue a variedade de formatos que essas curvas podem ter. Em particular, como estão relacionados a e c quando a curva se divide em duas partes?

83. Seja P um ponto qualquer (exceto a origem) na curva $r = f(\theta)$. Se ψ for o ângulo entre a reta tangente em P e a reta radial OP, mostre que

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[*Sugestão*: Observe que $\psi = \phi - \theta$ na figura.]



84. (a) Use o Exercício 83 para mostrar que o ângulo entre a reta tangente e a reta radial é $\psi = \pi/4$ em cada ponto na curva $r = e^{\theta}$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente aos pontos onde $\theta = 0$ e $\pi/2$.

(c) Demonstre que qualquer curva polar $r = f(\theta)$, com a propriedade de que o ângulo ψ entre a reta radial e a reta tangente é uma constante, deve ser do tipo $r = Ce^{k\theta}$, onde C e k são constantes.

Pela Fórmula 9 essa distância é

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0{,}53$$ □

12.5 EXERCÍCIOS

1. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
(a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
(b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.
(c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.
(d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos.
(e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
(f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
(g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.
(h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos.
(i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.
(j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelas.
(k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.

2-5 Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.

2. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, -3)$ e é paralela ao vetor $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

3. A reta que passa pelo ponto $(-2, 4, 10)$ e é paralela ao vetor $\langle 3, 1, -8 \rangle$

4. A reta que passa pelo ponto $(0, 14, -10)$ e é paralela à reta $x = -1 + 2t$, $y = 6 - 3t$, $z = 3 + 9t$

5. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, 6)$ e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$

6-12 Determine as equações paramétricas e as equações simétricas para a reta.

6. Reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, 2, 3)$

7. Reta que passa pelos pontos $(1, 3, 2)$ e $(-4, 3, 0)$

8. Reta que passa pelos pontos $(6, 1, -3)$ e $(2, 4, 5)$

9. Reta que passa pelos pontos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $(2, 1, -3)$

10. Reta que passa por $(2, 1, 0)$ e é perpendicular à reta $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. Reta que passa por $(1, -1, 1)$ e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$

12. Reta que é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$

13. A reta que passa pelos pontos $(-4, -6, 1)$ e $(-2, 0\ -3)$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(10, 18, 4)$ e $(5, 3, 14)$?

14. A reta que passa pelos pontos $(4, 1, -1)$ e $(2, 5, 3)$ é perpendicular à reta que passa pelos pontos $(-3, 2, 0)$ e $(5, 1, 4)$?

15. (a) Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $(1, -5, 6)$ e é paralela ao vetor $\langle -1, 2, -3 \rangle$.
(b) Determine os pontos nos quais a reta da parte (a) intercepta os planos coordenados.

16. (a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(2, 4, 6)$ e que é perpendicular ao plano $x - y + 3z = 7$.
(b) Em que pontos essa reta intercepta os planos coordenados?

17. Ache a equação vetorial para o segmento de reta de $(2, -1, 4)$ a $(4, 6, 1)$.

18. Ache as equações paramétricas para o segmento de reta de $(10, 3, 1)$ a $(5, 6, -3)$.

19-22 Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de intersecção.

19. L_1: $x = -6t, \quad y = 1 + 9t, \quad z = -3t$
L_2: $x = 1 + 2s, \quad y = 4 - 3s, \quad z = s$

20. L_1: $x = 1 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 2 - t$
L_2: $x = -1 + s, \quad y = 4 + s, \quad z = 1 + 3s$

21. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 2}{3}$

L_2: $\dfrac{x - 3}{-4} = \dfrac{y - 2}{-3} = \dfrac{z - 1}{2}$

22. L_1: $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 3}{2} = \dfrac{z - 2}{-1}$

L_2: $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y - 6}{-1} = \dfrac{z + 2}{3}$

23-38 Determine a equação do plano.

23. O plano que passa pelo ponto $(6, 3, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\langle -2, 1, 5 \rangle$

24. O plano que passa pelo ponto $(4, 0, -3)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. O plano que passa pelo ponto $(-2, 8, 10)$ e é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - 3t$

27. O plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $2x - y + 3z = 1$

28. O plano que passa pelo ponto $(-1, 6, -5)$ e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$

29. O plano que passa pelo ponto $(4, -2, 3)$ e é paralelo ao plano $3x - 7z = 12$

30. O plano que contém a reta $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$

31. O plano que passa pelos pontos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$

32. O plano que passa pela origem e pelos pontos $(2, -4, 6)$ e $(5, 1, 3)$

33. O plano que passa pelos pontos $(3, -1, 2)$, $(8, 2, 4)$ e $(-1, -2, -3)$

34. O plano que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

35. O plano que passa pelo ponto $(6, 0, -2)$ e contém a reta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 5t$, $z = 7 + 4t$

36. O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e contém a reta com equações simétricas $x = 2y = 3z$

37. O plano que passa pelo ponto $(-1, 2, 1)$ e contém a reta intersecção dos planos $x + y - z = 2$ e $2x - y + 3z = 1$

38. O plano que passa pela reta intersecção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$

39-42 Use as intersecções com os eixos coordenados como uma ajuda para esboçar o plano.

39. $2x + 5y + z = 10$

40. $3x + y + 2z = 6$

41. $6x - 3y + 4z = 6$

42. $6x + 5y - 3z = 15$

43-45 Determine o ponto no qual a reta intercepta o plano dado.

43. $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 3t$; $x + y + z = 1$

44. $x = 5$, $y = 4 - t$, $z = 2t$; $2x - y + z = 5$

45. $x = y - 1 = 2z$; $4x - y + 3z = 8$

46. Onde a reta que passa pelos pontos $(1, 0, 1)$ e $(4, -2, 2)$ intercepta o plano $x + y + z = 6$?

47. Determine as coordenadas do vetor diretor da reta intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

48. Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$.

49-54 Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

49. $x + 4y - 3z = 1$, $-3x + 6y + 7z = 0$

50. $2z = 4y - x$, $3x - 12y + 6z = 1$

51. $x + y + z = 1$, $x - y + z = 1$

52. $2x - 3y + 4z = 5$, $x + 6y + 4z = 3$

53. $x = 4y - 2z$, $8y = 1 + 2x + 4z$

54. $x + 2y + 2z = 1$, $2x - y + 2z = 1$

55-56 (a) Determine as equações simétricas da reta intersecção dos planos e (b) determine o ângulo entre os planos.

55. $x + y + z = 1$, $x + 2y + 2z = 1$

56. $3x - 2y + z = 1$, $2x + y - 3z = 3$

57-58 Determine as equações paramétricas da reta intersecção dos planos.

57. $5x - 2y - 2z = 1$, $4x + y + z = 6$

58. $z = 2x - y - 5$, $z = 4x + 3y - 5$

59. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(1, 0, -2)$ e $(3, 4, 0)$.

60. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(2, 5, 5)$ e $(-6, 3, 1)$.

61. Determine a equação do plano que intercepta o eixo x em a, o eixo y em b e o eixo z em c.

62. (a) Determine o ponto dado pela intersecção das retas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0\rangle + t\langle 1, -1, 2\rangle$$
$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2\rangle + s\langle 1, 1, 0\rangle$$

(b) Determine a equação do plano que contém essas retas.

63. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é paralela ao plano $x + y + z = 2$ e perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

64. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$, e intercepta essa reta.

65. Quais dos quatro planos seguintes são paralelos? Existem dois coincidentes?

P_1: $4x - 2y + 6z = 3$ $\qquad$ P_2: $4x - 2y - 2z = 6$

P_3: $-6x + 3y - 9z = 5$ $\qquad$ P_4: $z = 2x - y - 3$

66. Quais das quatro retas seguintes são paralelas? Existem duas coincidentes?

L_1: $x = 1 + t$, $\quad y = t$, $\quad z = 2 - 5t$

L_2: $x + 1 = y - 2 = 1 - z$

L_3: $x = 1 + t$, $\quad y = 4 + t$, $\quad z = 1 - t$

L_4: $\mathbf{r} = \langle 2, 1, -3\rangle + t\langle 2, 2, -10\rangle$

67-68 Utilize a fórmula que aparece no Exercício 43 da Seção 12.4 para determinar a distância do ponto à reta dada.

67. $(4, 1, -2)$; $\quad x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = 4 - 3t$

68. $(0, 1, 3)$; $\quad x = 2t$, $y = 6 - 2t$, $z = 3 + t$

69-70 Determine a distância do ponto ao plano dado.

69. $(1, -2, 4)$, $\quad 3x + 2y + 6z = 5$

70. $(-6, 3, 5)$, $\quad x - 2y - 4z = 8$

71-72 Determine a distância entre os planos paralelos dados.

71. $2x - 3y + z = 4$, $\quad 4x - 6y + 2z = 3$

72. $6z = 4y - 2x, \qquad 9z = 1 - 3x + 6y$

73. Mostre que a distância entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

74. Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano $x + 2y - 2z = 1$ e que distam duas unidades dele.

75. Mostre que as retas com equações simétricas $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ são reversas e determine a distância entre elas.

76. Determine a distância entre as retas reversas com equações paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$ e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

77. Se a, b e c não são todos nulos, mostre que a equação $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano e $\langle a, b, c\rangle$ é o vetor normal ao plano.

Sugestão: Suponha $a \neq 0$ e reescreva a equação na forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

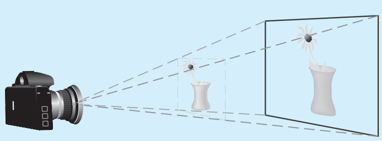
78. Dê a interpretação geométrica de cada família de planos.

(a) $x + y + z = c$ (b) $x + y + cz = 1$

(c) $y \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta = 1$

PROJETO DE LABORATÓRIO

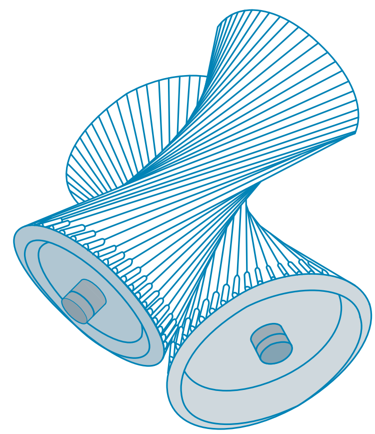
PONDO 3D EM PERSPECTIVA



Os programadores de computação gráfica encaram o mesmo desafio que os grandes pintores do passado: como representar uma cena tridimensional como uma imagem em um plano (um monitor ou uma tela). Para criar a ilusão de perspectiva, na qual os objetos próximos parecem maiores que aqueles mais distantes, os objetos tridimensionais na memória do computador são projetados em uma tela retangular a partir do ponto de visão onde o olho ou a câmera estão localizados. O volume de visão – a porção do espaço que estará visível – é a região contida nos quatro planos que passam pelo ponto de visão e por uma aresta da tela retangular. Se os objetos na cena se estendem além dos quatro planos, eles são truncados antes que os dados sejam enviados para a tela. Esses planos são, portanto, chamados *planos cortantes*.

1. Suponha que a tela seja representada por um retângulo no plano yz com vértices $(0, \pm 400, 0)$ e $(0, \pm 400, 600)$, e a câmera esteja localizada em $(1000, 0, 0)$. Uma reta L na cena passa pelos pontos $(230, -285, 102)$ e $(860, 105, 264)$. Em quais pontos L será contada pelos planos cortantes?
2. Se o segmento de reta cortado for projetado na tela, identifique o segmento de reta resultante.
3. Use equações paramétricas para traçar as arestas da tela, o segmento de reta cortado e sua projeção na tela. A seguir, adicione retas que conectem o ponto de visão a cada extremidade dos segmentos cortados para verificar que a projeção está correta.
4. Um retângulo com vértices $(621, -147, 206)$, $(563, 31, 242)$, $(657, -111, 86)$ e $(599, 67, 122)$ é adicionado à cena. A reta L intercepta esse retângulo. Para fazer o retângulo parecer opaco, um programador pode usar *linhas escondidas* as quais removem partes do objeto que estão atrás de outros objetos. Identifique a parte de L que deve ser removida.

são usados para transmitir movimento de rotação entre eixos transversais. (Os dentes das engrenagens são as retas geradoras do hiperboloide. Veja o Exercício 49.)



Hiperboloides produzem transmissão por engrenagens.

12.6 EXERCÍCIOS

1. (a) O que a equação $y = x^2$ representa como uma curva em $\mathbb{R}^2$?
(b) O que ela representa como uma superfície em $\mathbb{R}^3$?
(c) O que a equação $z = y^2$ representa?

2. (a) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma curva em $\mathbb{R}^2$.
(b) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
(c) Descreva e esboce a superfície $z = e^y$.

3-8 Descreva e esboce a superfície.

3. $y^2 + 4z^2 = 4$

4. $z = 4 - x^2$

5. $x - y^2 = 0$

6. $yz = 4$

7. $z = \cos x$

8. $x^2 - y^2 = 1$

9. (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperboloide de uma folha da Tabela 1.
(b) Se trocarmos a equação em (a) para $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, como isso afeta o gráfico?
(c) E se trocarmos a equação em (a) para $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

10. (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperboloide de duas folhas da Tabela 1.
(b) Se a equação na parte (a) for trocada para $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, o que acontece com o gráfico? Esboce o novo gráfico.

11-20 Use cortes para esboçar e identificar as superfícies.

11. $x = y^2 + 4z^2$

12. $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$

13. $x^2 = y^2 + 4z^2$

14. $25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$

15. $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

16. $4x^2 + 9y^2 + z = 0$

17. $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$

18. $4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16$

19. $y = z^2 - x^2$

20. $x = y^2 - z^2$

21-28 Faça uma correspondente entre a equação e seu gráfico (identificado por I-VIII). Justifique sua escolha.

21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

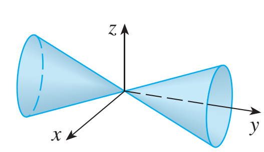
25. $y = 2x^2 + z^2$

26. $y^2 = x + 2z^2$

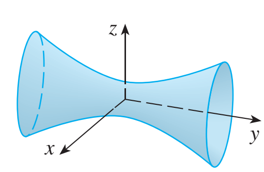
27. $x^2 + 2z^2 = 1$

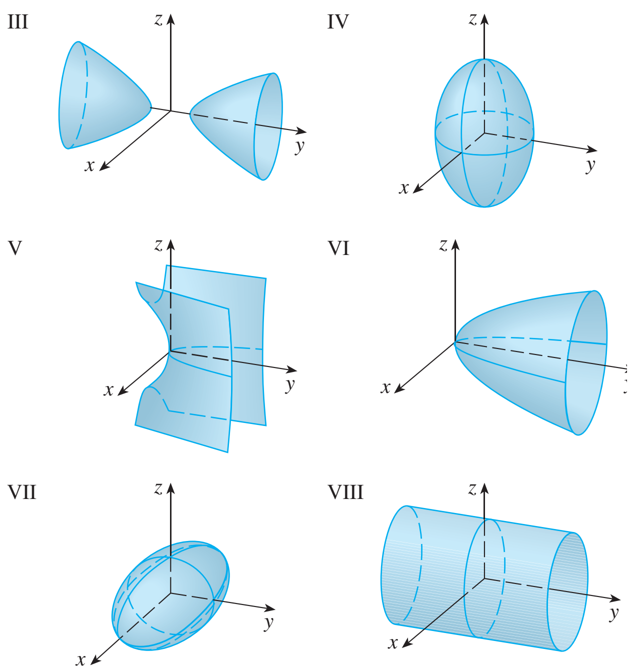
28. $y = x^2 - z^2$

I



II





29-36 Coloque a equação na forma-padrão, classifique a superfície e esboce-a.

29. $z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$

30. $x^2 = 2y^2 + 3z^2$

31. $x = 2y^2 + 3z^2$

32. $4x - y^2 + 4z^2 = 0$

33. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

34. $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

35. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$

36. $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

37-40 Use um computador com um programa que trace superfícies tridimensionais. Experimente diversos pontos de vista e diversos tamanhos de janela retangular até conseguir uma boa visão da superfície.

37. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$

38. $x^2 - y^2 - z = 0$

39. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$

40. $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$

41. Esboce a região delimitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leqslant z \leqslant 2$.

42. Esboce a região delimitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

43. Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da parábola $y = x^2$ em torno do eixo y.

44. Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da reta $x = 3y$ em torno do eixo x.

45. Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos que são equidistantes do ponto $(-1, 0, 0)$ e do plano $x = 1$. Identifique essa superfície.

46. Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos P para os quais a distância de P ao eixo x é o dobro da distância de P ao plano yz. Identifique a superfície.

47. Tradicionalmente, a superfície da Terra tem sido modelada por uma esfera, mas o World Geodesic System de 1984 (WGS-84) usa um elipsoide como um modelo mais preciso. Ele coloca o centro da Terra na origem e o polo norte no eixo z positivo. A distância do centro ao polo é 6 356,523 km e a distância a um ponto do equador é 6 378,137 km.

(a) Encontre uma equação para superfície da Terra como a usada pelo WGS-84.

(b) Curvas de latitude constante são cortes nos planos $z = k$. Qual a forma destas curvas?

(c) Meridianos (curvas com longitude constante) são cortes nos planos da forma $y = mx$. Qual é a forma destes meridianos?

48. Uma torre de resfriamento de um reator nuclear deve ser construída na forma de um hiperboloide de uma folha. O diâmetro na base é 280 m e o diâmetro mínimo, 500 m acima do solo, é 200 m. Encontre uma equação para a torre.

49. Mostre que se o ponto (a, b, c) está em um paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, então as retas com equações paramétricas $x = a + t, y = b + t, z = c + 2(b - a)t$ e $x = a + t, y = b - t, z = c - 2(b + a)t$, estão ambas inteiramente neste paraboloide. (Isto mostra que o paraboloide hiperbólico é o que é chamado uma **superfície regrada**; ou seja, ela pode ser gerada pelo movimento de uma reta. De fato, este exercício mostra que por cada ponto do paraboloide hiperbólico existem duas retas geradoras. As únicas outras superfícies quádricas que são superfícies regradas são os cilindros, cones e hiperboloides de uma folha.)

50. Mostre que a curva obtida pela intersecção das superfícies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ e $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ está em um plano.

51. Desenhe as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - y^2$ em uma mesma tela usando uma janela de tamanho $|x| \leqslant 1{,}2$, $|y| \leqslant 1{,}2$, e observe a curva de intersecção. Mostre que a projeção dessa curva no plano xy é uma elipse.

13.1 EXERCÍCIOS

1-2 Determine o domínio das funções vetoriais.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t}\,\rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t-2}{t+2}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln(9-t^2)\,\mathbf{k}$

3-6 Calcule os limites.

3. $\lim_{t\to 0^+} \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t\ln t\rangle$

4. $\lim_{t\to 0} \left\langle \dfrac{e^t-1}{t}, \dfrac{\sqrt{1+t}-1}{t}, \dfrac{3}{t+1}\right\rangle$

5. $\lim_{t\to 0} \left(e^{-3t}\,\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}\right)$

6. $\lim_{t\to \infty} \left\langle \operatorname{arctg} t, e^{-2t}, \dfrac{\ln t}{t}\right\rangle$

7-14 Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro cresce.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t\rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2\rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 1+t, 3t, -t\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, 3, \cos t\rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + t^6\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

15-18 Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q.

15. $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$

16. $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 1)$

17. $P(1, -1, 2)$, $Q(4, 1, 7)$

18. $P(-2, 4, 0)$, $Q(6, -1, 2)$

19-24 Faça uma correspondência entre as equações paramétricas e os gráficos (identificados com números de I-VI). Justifique sua escolha.

19. $x = \cos 4t, \quad y = t, \quad z = \operatorname{sen} 4t$

20. $x = t, \quad y = t^2, \quad z = e^{-t}$

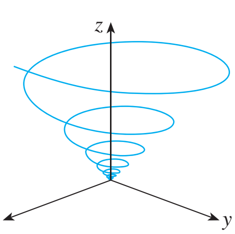
21. $x = t, \quad y = 1/(1+t^2), \quad z = t^2$

22. $x = e^{-t}\cos 10t, \quad y = e^{-t}\operatorname{sen} 10t, \quad z = e^{-t}$

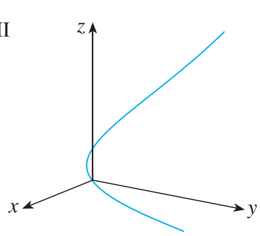
23. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \operatorname{sen} 5t$

24. $x = \cos t, \quad y = \operatorname{sen} t, \quad z = \ln t$

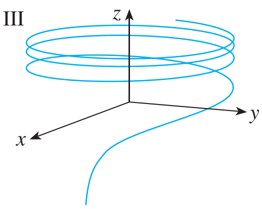
I



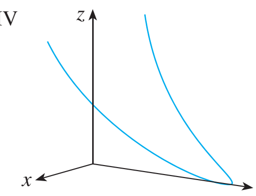
II



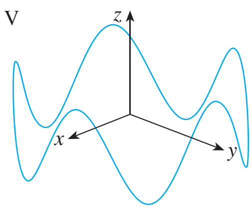
III



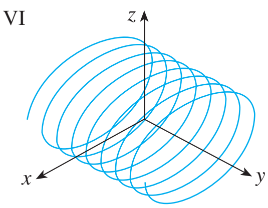
IV



V



VI



25. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos t$, $y = t\operatorname{sen} t$, $z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

26. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ é a curva de intersecção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Use esse fato para esboçar a curva.

27. Em quais pontos a curva $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{k}$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$?

28. Em quais pontos a hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t\rangle$ intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

29-32 Utilize um computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a revelar a verdadeira natureza da curva.

29. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\rangle$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t\rangle$

31. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t\operatorname{sen} t, t\cos t\rangle$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos t\rangle$

33. Trace a curva com equações paramétricas
$x = (1 + \cos 16t)\cos t$, $y = (1 + \cos 16t)\operatorname{sen} t$,
$z = 1 + \cos 16t$.
Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em um cone.

34. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\ \cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\ \operatorname{sen} t$$
$$z = 0{,}5\cos 10t$$

Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em uma esfera.

35. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos $(1, 4, 0)$ e $(9, -8, 28)$, mas não passa pelo ponto $(4, 7, -6)$.

36-38 Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção das duas superfícies.

36. O cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e a superfície $z = xy$

37. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 1 + y$

38. O paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ e o cilindro parabólico $y = x^2$

39. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ com o cilindro parabólico $z = x^2$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

40. Tente esboçar à mão a intersecção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a metade superior do elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Escreva então as equações paramétricas para a curva e utilize um computador para traçá-la.

41. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão colidir. (Um míssil vai atingir seu alvo móvel? Duas aeronaves vão colidir?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias de duas partículas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para $t \geqslant 0$. As partículas colidem?

42. Duas partículas se movem ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

43. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam funções vetoriais que possuem limites quando $t \to a$ e seja c uma constante. Demonstre as seguintes propriedades de limites.

(a) $\lim\limits_{t \to a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim\limits_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim\limits_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(b) $\lim\limits_{t \to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim\limits_{t \to a} \mathbf{u}(t)$

(c) $\lim\limits_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim\limits_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim\limits_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(d) $\lim\limits_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim\limits_{t \to a} \mathbf{u}(t) \times \lim\limits_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

44. A visão do nó de trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1{,}5t) \cos t$$
$$y = (2 + \cos 1{,}5t) \operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

para esboçar à mão a curva vista de cima, deixando pequenas falhas para indicar os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que sua projeção sobre o plano xy tem coordenadas polares $r = 2 + \cos 1{,}5t$ e $\theta = t$, de forma que r varia entre 1 e 3. Mostre então que z tem um valor máximo e um mínimo quando a projeção está entre $r = 1$ e $r = 3$.

Quando você terminar o esboço à mão livre, utilize um computador para traçar a curva com o observador vendo de cima e compare-a ao seu desenho. Trace a curva sob outros pontos de vista. Você alcançará melhor resultado se traçar um tubo de raio 0,2 em torno da curva. (Utilize o comando tubeplot no Maple.)

45. Mostre que $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |t - a| < \delta \qquad \text{então} \qquad |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

13.2 DERIVADAS E INTEGRAIS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Mais adiante neste capítulo, utilizaremos as funções vetoriais para descrever o movimento dos planetas e outros objetos no espaço. Vamos nos preparar aqui para desenvolver o cálculo com funções vetoriais.

DERIVADAS

A **derivada** $\mathbf{r}'$ de uma função vetorial $\mathbf{r}$ é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:

$$\boxed{1} \qquad \boxed{\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}}$$

se este limite existir. O significado geométrico dessa definição está representado na Figura 1. Se os pontos P e Q têm vetores posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + h)$, então $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$, que pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo por escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t))$ tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$. Quando então,

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}}$$

Isso mostra que podemos calcular a integral da função vetorial integrando cada componente dela.

Podemos estender o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde $\mathbf{R}$ é uma primitiva de $\mathbf{r}$, ou seja, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Usaremos a notação $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para as integrais indefinidas (primitivas).

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, então

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)\,dt &= \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}\\ &= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k} + \mathbf{C}\end{aligned}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração, e

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\,\mathbf{k}\right]_0^{\pi/2} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\,\mathbf{k}$$ □

13.2 EXERCÍCIOS

1. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.

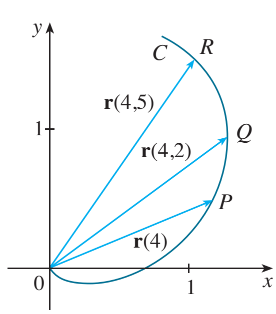
(a) Desenhe os vetores $\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)$ e $\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)$.

(b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)}{0{,}5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)}{0{,}2}$$

(c) Escreva a expressão para $\mathbf{r}'(4)$ e para seu vetor tangente unitário $\mathbf{T}(4)$.

(d) Desenhe o vetor $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t\rangle$, $0 \leqslant t \leqslant 2$, e desenhe os vetores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1{,}1)$ e $\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)$.

(b) Desenhe o vetor $\mathbf{r}'(1)$ começando em $(1, 1)$ e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)}{0{,}1}$$

Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção e sentido.

3-8

(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.

(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$.

(c) Esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1\rangle$, $\quad t = -1$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, \sqrt{t}\rangle$, $\quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$, $\quad t = \pi/4$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}$, $\quad t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{3t}\,\mathbf{j}$, $\quad t = 0$

8. $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + (2 + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j}$, $\quad t = \pi/6$

9-16 Determine a derivada da função vetorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t\operatorname{sen} t, t^2, t\cos 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{tg} t, \sec t, 1/t^2\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^{-1} t\,\mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = at \cos 3t\, \mathbf{i} + b\, \text{sen}^3 t\, \mathbf{j} + c \cos^3 t\, \mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$

16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17-20 Determine o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ no ponto com valor de parâmetro t dado.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 6t^5, 4t^3, 2t \rangle, \quad t = 1$

18. $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t = 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

20. $\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \text{tg}\,t\,\mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

21. Se $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, encontre $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

22. Se $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t} \rangle$, determine $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ e $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23-26 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

23. $x = t^5, \quad y = t^4, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

24. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = t + 1; \quad (-1, 1, 1)$

25. $x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t}\,\text{sen}\,t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$

26. $x = \ln t, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad z = t^2; \quad (0, 2, 1)$

27-29 Encontre as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.

27. $x = t, \quad y = e^{-t}, \quad z = 2t - t^2; \quad (0, 1, 0)$

28. $x = 2\cos t, \quad y = 2\,\text{sen}\,t, \quad z = 4\cos 2t; \quad (\sqrt{3}, 1, 2)$

29. $x = t\cos t, \quad y = t, \quad z = t\,\text{sen}\,t; \quad (-\pi, \pi, 0)$

30. (a) Determine o ponto de intersecção das retas tangentes à curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\,\pi t, 2\,\text{sen}\,\pi t, \cos \pi t \rangle$ nos pontos $t = 0$ e $t = 0{,}5$.

(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.

31. As curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ e $\mathbf{r}_2(t) = \langle \text{sen}\,t, \text{sen}\,2t, t \rangle$ se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

32. Em que ponto as curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2 \rangle$ e $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2 \rangle$ se interceptam? Encontre o ângulo entre elas no ponto de intersecção, com precisão de um grau.

33-38 Calcule a integral.

33. $\int_0^1 (16t^3\,\mathbf{i} - 9t^2\,\mathbf{j} + 25t^4\,\mathbf{k})\,dt$

34. $\int_0^1 \left(\dfrac{4}{1 + t^2}\mathbf{j} + \dfrac{2t}{1 + t^2}\,\mathbf{k} \right) dt$

35. $\int_0^{\pi/2} (3\,\text{sen}^2 t \cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t \cos^2 t\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,t \cos t\,\mathbf{k})\,dt$

36. $\int_1^2 (t^2\,\mathbf{i} + t\sqrt{t - 1}\,\mathbf{j} + t\,\text{sen}\,\pi t\,\mathbf{k})\,dt$

37. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

38. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

39. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

40. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + te^t\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

41. Demonstre a Fórmula 1 do Teorema 3.

42. Demonstre a Fórmula 3 do Teorema 3.

43. Demonstre a Fórmula 5 do Teorema 3.

44. Demonstre a Fórmula 6 do Teorema 3.

45. Se $\mathbf{u}(t) = \langle \text{sen}\,t, \cos t, t \rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \text{sen}\,t \rangle$, use a Fórmula 4 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

46. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções vetoriais no Exercício 45, use a Fórmula 5 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

47. Mostre que se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial tal que exista $\mathbf{r}''$, então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

48. Determine uma expressão para $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

49. Se $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, mostre que $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = \dfrac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.

[*Sugestão*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

50. Se uma curva tem a propriedade de o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ estar sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$, mostre que essa curva está em uma esfera com o centro na origem.

51. Se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

13.3 EXERCÍCIOS

1-6 Determine o comprimento da curva dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \operatorname{sen} t, 5t, 2 \cos t \rangle, \quad -10 \leqslant t \leqslant 10$

2. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t \cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t \rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln \cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

6. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

7-9 Encontre o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. (Use sua calculadora para aproximar a integral.)

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t, t^2 \rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \ln t, t \ln t \rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t \rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

10. Trace a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = \operatorname{sen} 3t$. Encontre o comprimento total desta curva com precisão de quatro casas decimais.

11. Seja C a curva de intersecção do cilindro parabólico $x^2 = 2y$ e da superfície $3z = xy$. Encontre o comprimento exato de C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$.

12. Encontre, com precisão de quatro casas decimais, o comprimento da curva de intersecção do cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ e do plano $x + y + z = 2$.

13-14 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t.

13. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 - 3t)\,\mathbf{j} + (5 + 4t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = e^{2t} \cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + e^{2t} \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$

15. Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3 \operatorname{sen} t$, $y = 4t$, $z = 3 \cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?

16. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\,\mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido a partir do ponto $(1, 0)$ na direção crescente de t. Expresse a reparametrização em sua forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

17-20
(a) Determine os vetores tangente e normal unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.
(b) Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \operatorname{sen} t, 5t, 2 \cos t \rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t \cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t \rangle \quad t > 0$

19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{3}t^3, t^2, 2t \right\rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t, \ln t \rangle$

21-23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 4 \cos t\,\mathbf{k}$

24. Determine a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, t \rangle$ no ponto $(1, 0, 0)$.

25. Encontre a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ no ponto $(1, 1, 1)$.

26. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas

$$x = t \qquad y = 4t^{3/2} \qquad z = -t^2$$

e calcule a curvatura no ponto $(1, 4, -1)$.

27-29 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

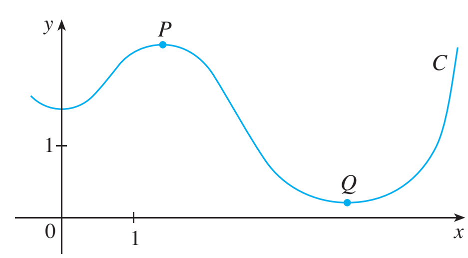
27. $y = 2x - x^2$ **28.** $y = \cos x$ **29.** $y = 4x^{5/2}$

30-31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \to \infty$?

30. $y = \ln x$ **31.** $y = e^x$

32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

33. (a) A curvatura da curva C mostrada na figura é maior em P ou em Q? Explique.
(b) Estime a curvatura em P e Q desenhando o círculo osculador nesses pontos.

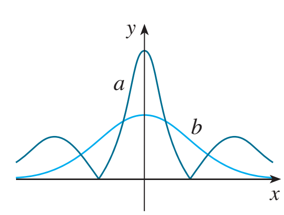


34-35 Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar na mesma tela a curva e sua função curvatura $\kappa(x)$. Esse é o gráfico que você esperava?

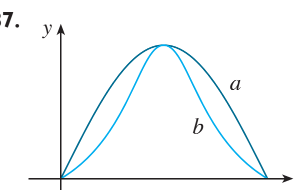
34. $y = x^4 - 2x^2$ **35.** $y = x^{-2}$

36-37 Dois gráficos, a e b, são mostrados. Um é a curva $y = f(x)$ e o outro é o gráfico da sua função curvatura $y = \kappa(x)$. Identifique cada uma e justifique suas escolhas.

36.



37.



SCA **38.** (a) Faça o gráfico da curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen } 3t, \text{sen } 2t, \text{sen } 3t \rangle$. Em quantos pontos da curva tem-se a impressão de que a curvatura possui um máximo local ou absoluto?
(b) Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Esse gráfico confirma sua conclusão na parte (a)?

SCA **39.** O gráfico de $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{3}{2}\text{sen } t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t \right\rangle$ é ilustrado na Figura 12(b), na Seção 13.1. Onde você acha que a curvatura é maior? Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Para quais valores de t a curvatura é maior?

40. Use o Teorema 10 para mostrar que a curvatura da curva plana parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$, é

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t.

41-42 Use a fórmula do Exercício 40 para calcular a curvatura.

41. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \text{ sen } t$

42. $x = 1 + t^3, \quad y = t + t^2$

43-44 Encontre os vetores **T**, **N** e **B** no ponto indicado.

43. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \right\rangle, \quad \left(1, \frac{2}{3}, 1\right)$

44. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \text{sen } t, \ln \cos t \rangle, (1, 0, 0)$

45-46 Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

45. $x = 2 \text{ sen } 3t, \quad y = t, \quad z = 2 \cos 3t; \quad (0, \pi, -2)$

46. $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

47. Determine as equações para o círculo osculador da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ nos pontos $(2, 0)$ e $(0, 3)$. Utilize uma calculadora gráfica ou computador para traçar a elipse e ambos os círculos osculadores na mesma tela.

48. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ nos pontos $(0, 0)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Trace os dois círculos osculadores e a parábola na mesma tela.

49. Em que ponto da curva $x = t^3$, $y = 3t$, $z = t^4$ o plano normal é paralelo ao plano $6x + 6y - 8z = 1$?

SCA **50.** Existe um ponto da curva do Exercício 49 onde o plano osculador é paralelo ao plano $x + y + z = 1$? (*Observação*: Você precisará de um SCA para derivar, simplificar e calcular um produto vetorial.)

51. Mostre que a curvatura κ está relacionada com os vetores tangente e normal pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N}$$

52. Mostre que a curvatura de uma curva plana é $\kappa = |d\phi/ds|$, onde ϕ é o ângulo entre **T** e **i**, isto é, ϕ é o ângulo de inclinação da reta tangente. (Isso mostra que a definição de curvatura é consistente com a definição dada para curvas planas no Exercício 69 da Seção 10.2.)

53. (a) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a **B**.
(b) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a **T**.
(c) Deduza das partes (a) e (b) que $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$ para algum número $\tau(s)$ chamado **torção** da curva. (A torção mede quanto a curva é retorcida.)
(d) Mostre que para uma curva plana a torção é $\tau(s) = 0$.

54. As fórmulas seguintes, chamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, são de fundamental importância em geometria diferencial:
1. $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$
2. $d\mathbf{N}/ds = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}$
3. $d\mathbf{B}/ds = -\tau\mathbf{N}$
(A Fórmula 1 vem do Exercício 51, e a Fórmula 3, do Exercício 53.) Use o fato de que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ para deduzir a Fórmula 2 a partir das Fórmulas 1 e 3.

55. Utilize as fórmulas de Frenet-Serret para demonstrar cada um dos seguintes itens. (Aqui as linhas indicam derivadas com relação a t. Comece como na demonstração do Teorema 10.)
(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$ (b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$
(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$
(d) $\tau = \dfrac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

56. Mostre que a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \langle a \cos t, a \text{ sen } t, bt \rangle$, onde a e b são as constantes positivas, tem curvatura e torção constantes. [Use o resultado do Exercício 55(d).]

57. Utilize a fórmula do Exercício 55(d) para calcular a torção da curva $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3 \right\rangle$.

58. Determine a curvatura e a torção da curva $x = \text{senh } t$, $y = \cosh t$, $z = t$ no ponto $(0, 1, 0)$.

59. A molécula de DNA tem a forma de duas hélices circulares (veja a Figura 3 na Seção 13.1). O raio de cada uma das hélices é de cerca de 10 ångströms ($1 \text{ Å} = 10^{-8}$ cm). Cada hélice, em uma volta completa, sobe 34 Å, e existem cerca de $2{,}9 \times 10^8$ voltas completas em uma molécula. Estime o comprimento de cada hélice circular.

60. Consideremos o problema de projetar uma linha férrea de modo a fazer transições lisas entre as seções de trilhos retos. Um trilho existente ao longo da parte negativa do eixo x precisa ser ligado a um trilho que corre ao longo da reta $y = 1$ para $x \geqslant 1$.
(a) Determine um polinômio $P = P(x)$ de grau 5 tal que a função F definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ P(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

seja contínua e tenha derivada e curvatura contínuas.
(b) Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico de F.

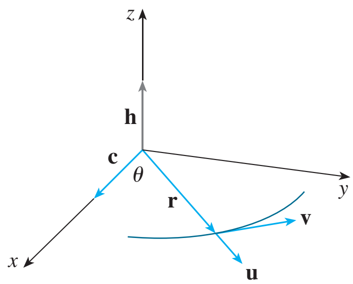


FIGURA 8

Mas $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$ e, como $|\mathbf{u}(t)| = 1$, segue do Exemplo 4 da Seção 13.2 que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. Portanto,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

e, então, $$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\boxed{11} \qquad \mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}$$

onde **c** é um vetor constante.

Neste ponto é conveniente escolher os eixos coordenados de forma que o vetor da base canônica **k** aponte na direção do vetor **h**. O planeta se move assim no plano xy. Como $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$ e **u** são perpendiculares a **h**, a Equação 11 mostra que **c** pertence ao plano xy. Isso significa que podemos escolher os eixos x e y de forma que o vetor **i** esteja na direção de **c**, como mostrado na Figura 8.

Se θ é o ângulo entre **c** e **r**, então (r, θ) são as coordenadas polares do planeta. Da Equação 11, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) &= \mathbf{r} \cdot (GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c} \\ &= GMr\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}| \cos\theta = GMr + rc\cos\theta \end{aligned}$$

onde $c = |\mathbf{c}|$. Então,

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c\cos\theta} = \frac{1}{GM}\,\frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e\cos\theta}$$

onde $e = c/(GM)$. Mas

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

onde $h = |\mathbf{h}|$. Desse modo,

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}$$

Escrevendo $d = h^2/c$, obtemos a equação

$$\boxed{12} \qquad r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Comparando com o Teorema 10.6.6, vemos que a Equação 12 é aquela da forma polar da seção cônica com foco na origem e excentricidade e. Sabemos que a órbita de um planeta é uma curva fechada e, portanto, precisa ser uma elipse.

Isso completa a dedução da Primeira Lei de Kepler. Guiaremos você na dedução da Segunda e da Terceira Lei no Projeto Aplicado na página 807. As demonstrações dessas três leis mostram que o método deste capítulo fornece uma ferramenta poderosa na descrição de leis da natureza.

13.4 EXERCÍCIOS

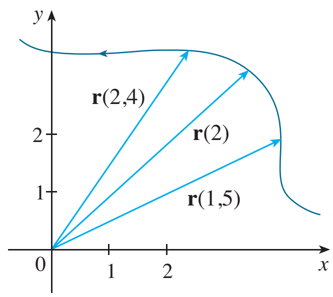
1. A tabela fornece coordenadas de uma partícula movendo-se no espaço ao longo de uma curva lisa.

(a) Determine a velocidade média nos intervalos de tempo [0; 1], [0,5; 1], [1; 2] e [1; 1,5].

(b) Estime a velocidade e a velocidade escalar da partícula no instante $t = 1$.

t	x	y	z
0	2,7	9,8	3,7
0,5	3,5	7,2	3,3
1,0	4,5	6,0	3,0
1,5	5,9	6,4	2,8
2,0	7,3	7,8	2,7

2. A figura mostra a trajetória de uma partícula que se move com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ no instante t.
(a) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $2 \leqslant t \leqslant 2{,}4$.
(b) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $1{,}5 \leqslant t \leqslant 2$.
(c) Escreva uma expressão para o vetor velocidade $\mathbf{v}(2)$.
(d) Desenhe uma aproximação do vetor $\mathbf{v}(2)$ e estime a velocidade escalar da partícula em $t = 2$.



3-8 Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada. Esboce a trajetória da partícula e desenhe os vetores velocidade e aceleração para os valores de t especificados.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 1, t \rangle, \quad t = 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, 1 - t \rangle, \quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\, \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}, \quad t = \pi/3$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\, \mathbf{i} + e^{2t}\, \mathbf{j}, \quad t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + t^2\, \mathbf{j} + 2\, \mathbf{k}, \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{k}, \quad t = 0$

9-14 Determine os vetores velocidade e aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 3t, 2 \operatorname{sen} t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\, t\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\, \mathbf{i} + \ln t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k})$

14. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + t \cos t\, \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k}$

15-16 Determine os vetores velocidade e posição de uma partícula, dadas a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

15. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + 2\, \mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

16. $\mathbf{a}(t) = 2\, \mathbf{i} + 6t\, \mathbf{j} + 12t^2\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

17-18
(a) Determine o vetor posição de uma partícula, dada a sua aceleração, e suas velocidade e posição iniciais.
(b) Utilize o computador para traçar a trajetória percorrida pela partícula.

17. $\mathbf{a}(t) = 2t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \cos 2t\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18. $\mathbf{a}(t) = t\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. A função posição de uma partícula é dada por $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$. Quando sua velocidade escalar é mínima?

20. Qual a força necessária para que uma partícula de massa m tenha a função posição $\mathbf{r}(t) = t^3\, \mathbf{i} + t^2\, \mathbf{j} + t^3\, \mathbf{k}$?

21. Uma força com módulo 20 N age diretamente no sentido ascendente a partir do plano xy em um objeto com massa 4 kg. O objeto começa na origem com velocidade inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Determine sua função posição e sua velocidade escalar no instante t.

22. Mostre que, se uma partícula se move com velocidade escalar constante, então os vetores velocidade e aceleração são ortogonais.

23. Um projétil é disparado com uma velocidade escalar inicial de 500 m/s e ângulo de elevação de 30°. Determine (a) o alcance do projétil, (b) a altura máxima atingida e (c) a velocidade escalar no impacto.

24. Repita o Exercício 23, considerando agora o projétil disparado de uma posição 200 m acima do solo.

25. Uma bola é atirada em um ângulo de elevação de 45° em relação ao solo. Se a bola cai no solo a uma distância de 90 m, qual a velocidade escalar inicial da bola?

26. Uma arma é disparada com ângulo de elevação de 30°. Qual a velocidade de disparo se o máximo de altura que a bala atinge são 500 m?

27. A velocidade de disparo de uma arma é 150 m/s. Determine dois ângulos de elevação que podem ser utilizados para atingir um alvo que está a 800 m de distância.

28. No beisebol, um batedor rebate uma bola, que está 3 pés acima do chão, em direção à parte central da cerca do campo, que tem 10 pés de altura e dista 400 pés da base do lançamento. A bola deixa o bastão com uma velocidade escalar de 115 pés e com ângulo de 50° acima da horizontal. Foi *home run*? (Em outras palavras, a bola passou por cima da cerca?)

29. Uma cidade medieval tem a forma de um quadrado e é protegida por muralhas com comprimento de 500 m e altura de 15 m. Você é o comandante de um exército atacante e o mais próximo que pode chegar da muralha é 100 m. Seu plano é incendiar a cidade arremessando com catapultas rochas aquecidas sobre a muralha (com velocidade escalar inicial de 80 m/s). Em que intervalo de ângulos você deve dizer a seus homens para armar a catapulta? (Suponha que a trajetória das rochas seja perpendicular à muralha.)

30. Uma bola com massa 0,8 kg é arremessada ao ar em direção ao sul com velocidade escalar de 30 m/s e ângulo de 30° com o solo. Um vento do oeste aplica uma força constante de 4 N à bola na direção leste. Onde a bola cai e com que velocidade escalar?

31. A água, descendo por um trecho reto de um rio, em geral escoa mais rapidamente no meio e a velocidade escalar diminui para quase zero nas margens. Considere um trecho longo de rio escoando para o norte com as margens paralelas distando 40 m uma da outra. Se a velocidade escalar máxima da água é de

3 m/s, podemos usar uma função quadrática como modelo básico para encontrar a taxa com que escoa a água x unidades de distância da margem oeste: $f(x) = \frac{3}{400}x(40 - x)$.

(a) Um barco se move com uma velocidade escalar constante de 5 m/s a partir de um ponto de A na margem oeste enquanto se mantém direcionado perpendicularmente à margem. A que distância rio abaixo, na margem oposta, o barco vai atingir a terra firme? Faça um gráfico da trajetória do barco.

(b) Suponha que quiséssemos pilotar o barco a fim de atracar em um ponto B, diretamente oposto ao A, na margem leste. Se mantivermos a velocidade escalar constante de 5 m/s e uma direção constante, determine o ângulo no qual o barco deve ser conduzido. Depois, faça o gráfico do caminho real que o barco segue. Essa trajetória parece realista?

32. Outro modelo razoável para a velocidade escalar da água do rio no Exercício 31 é a função senoidal: $f(x) = 3\,\text{sen}(\pi x/40)$. Se o piloto do barco quiser atravessar o rio de A até B com direção constante e velocidade escalar constante de 5 m/s, determine o ângulo no qual o barco deve seguir.

33-38 Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração.

33. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3)\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\,\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{j}$

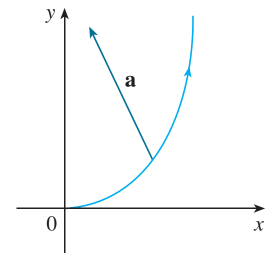
35. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$

37. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos^2 t\,\mathbf{j} + \text{sen}^2 t\,\mathbf{k}$

39. O módulo do vetor aceleração a é 10 cm/s². Use a figura para estimar as componentes tangencial e normal de a.



40. Se uma partícula com massa m se move com vetor posição $\mathbf{r}(t)$, então seu **momento angular** é definido como $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ e seu **torque** é definido como $\boldsymbol{\tau}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$. Mostre que $\mathbf{L}'(t) = \boldsymbol{\tau}(t)$. Deduza que, se $\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{0}$ para todo t, então $\mathbf{L}(t)$ é constante. (Esta é a *lei de conservação do momento angular*.)

41. A função posição de uma nave espacial é

$$\mathbf{r}(t) = (3 + t)\,\mathbf{i} + (2 + \ln t)\,\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathbf{k}$$

e as coordenadas de uma estação espacial são (6, 4, 9). O capitão quer que a nave ataque na estação espacial. Quando os motores da nave devem ser desligados?

42. Um foguete que queima o combustível carregado dentro de si enquanto se move no espaço tem, no instante t, velocidade $\mathbf{v}(t)$ e massa $m(t)$. Se os gases provenientes da combustão escapam a uma velocidade de $\mathbf{v}_e$ relativamente ao foguete, deduz-se da Segunda Lei de Newton do movimento que

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e$$

(a) Mostre que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) - \ln \dfrac{m(0)}{m(t)}\mathbf{v}_e$.

(b) Para que, em linha reta, o foguete acelere do repouso para o dobro da velocidade escalar de escape de seus gases de combustão, que fração de sua massa inicial o foguete deverá queimar como combustível?

PROJETO APLICADO

LEIS DE KEPLER

Johannes Kepler enunciou três leis sobre o movimento planetário, baseando-se em uma grande quantidade de dados relativos à posição dos planetas em diferentes instantes de tempo.

LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

14.1 EXERCÍCIOS

1. No Exemplo 2 consideramos a função $W = f(T, v)$, onde W era o índice de sensação térmica ocasionado pelo vento, T, a temperatura real e v, a velocidade do vento. A representação numérica foi fornecida pela Tabela 1.
(a) Qual o valor de $f(-15, 40)$? Qual seu significado?
(b) Descreva em palavras o significado da questão "Para quais valores de v é verdade que $f(-20, v) = -30$?". Em seguida, responda à questão.
(c) Descreva o significado da questão "Para quais valores de T vale $f(T, 20) = -49$?". Em seguida, responda à questão.
(d) Qual o significado da função $W = f(-5, v)$? Descreva o comportamento dessa função.
(e) Qual o significado da função $W = f(T, 50)$? Descreva o comportamento dessa função.

2. *O índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente *humidex*) é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que podemos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com valores de I foi extraída de uma tabela do Environment Canada.

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°C): T \ h	20	30	40	50	60	70
20	20	20	20	21	22	23
25	25	25	26	28	30	32
30	30	31	34	36	38	41
35	36	39	42	45	48	51
40	43	47	51	55	59	63

(a) Qual é o valor de $f(35, 60)$? Qual é o seu significado?
(b) Para que valor de h temos $f(30, h) = 36$?
(c) Para que valor de T temos $f(T, 40) = 42$?
(d) Qual o significado de $I = f(20, h)$ e $I = f(40, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

3. Verifique que, para a função de produção de Cobb-Douglas
$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$
discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se as quantidades de trabalho e a de capital investido forem dobradas. Determine se isto também é verdade para uma função de produção genérica
$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

4. O índice de sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte função:
$$W(T, v) = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$
Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v.

5. A altura das ondas h em mar aberto depende da velocidade do vento v e do intervalo de tempo t no qual está ventando com a mesma velocidade. Os valores da função $h = f(v, t)$, dados em pés, são apresentados na tabela a seguir.
(a) Qual é o valor de $f(80, 15)$? Qual é o seu significado?
(b) Qual o significado da função $h = f(60, t)$? Descreva seu comportamento.
(c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h): v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

6. Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.
(a) Calcule $f(1, 1)$.
(b) Calcule $f(e, 1)$.
(c) Determine e esboce o domínio de f.
(d) Determine a imagem de f.

7. Seja $f(x, y) = x^2e^{3xy}$.
(a) Calcule $f(2, 0)$.
(b) Determine o domínio de f.
(c) Determine a imagem de f.

8. Determine e esboce o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$. Qual é a imagem de f?

9. Seja $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.
(a) Calcule $f(2, -1, 6)$.
(b) Determine o domínio de f.
(c) Determine a imagem f.

10. Seja $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.
(a) Calcule $g(2, -2, 4)$.
(b) Determine o domínio de g.
(c) Determine a imagem de g.

11-20 Determine e faça o esboço do domínio da função.

11. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

12. $f(x, y) = \sqrt{xy}$

13. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

14. $f(x, y) = \sqrt{y - x}\ln(y + x)$

15. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}$

16. $f(x, y) = \sqrt{y} + \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

17. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

18. $f(x, y) = \operatorname{arcsen}(x^2 + y^2 - 2)$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

20. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

21-29 Esboce o gráfico da função.

21. $f(x, y) = 3$

22. $f(x, y) = y$

23. $f(x, y) = 10 - 4x - 5y$

24. $f(x, y) = \cos x$

25. $f(x, y) = y^2 + 1$

26. $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

27. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

28. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

30. Faça uma correspondência entre a função e seu gráfico (indicado por I-VI). Dê razões para sua escolha.

(a) $f(x, y) = |x| + |y|$

(b) $f(x, y) = |xy|$

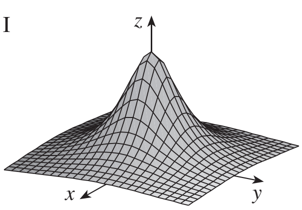
(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$

(d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

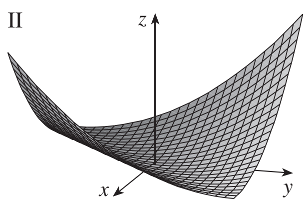
(e) $f(x, y) = (x - y)^2$

(f) $f(x, y) = \operatorname{sen}(|x| + |y|)$

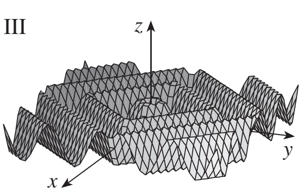
I



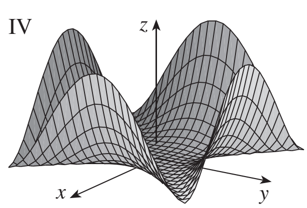
II



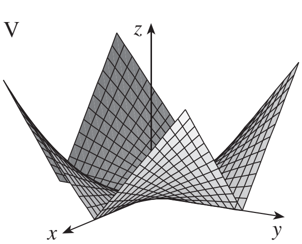
III



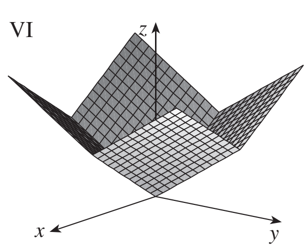
IV



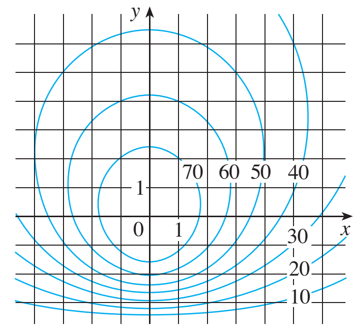
V



VI

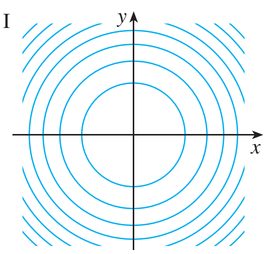


31. É mostrado um mapa de contorno da função f. Use-o para estimar o valor de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?

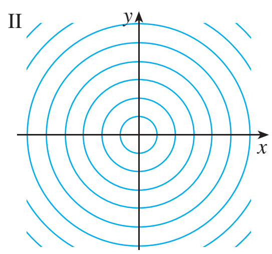


32. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é de uma função f cujo gráfico é um cone. O outro é de uma função g cujo gráfico é um paraboloide. Qual é qual? Por quê?

I

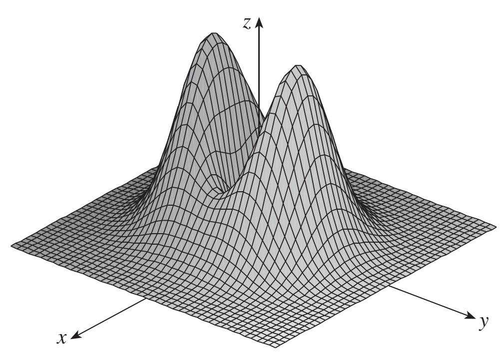


II



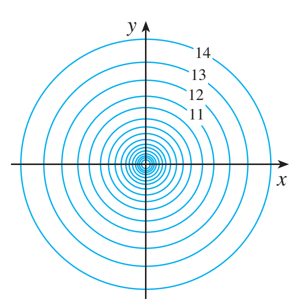
33. Localize os pontos A e B no mapa da Montanha Solitária (Figura 12). Como você descreveria o terreno perto de A? E perto de B?

34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.

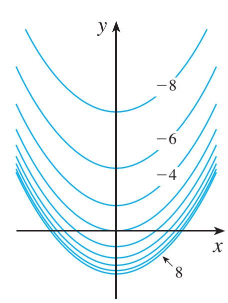


35-38 Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.

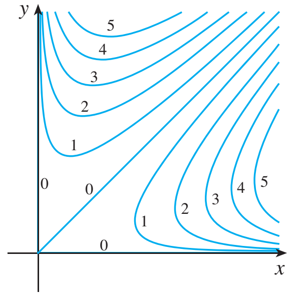
35.



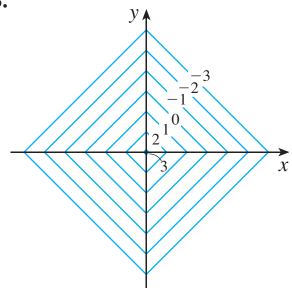
36.



37.



38.



39-46 Faça o mapa de contorno da função mostrando várias curvas de nível.

39. $f(x, y) = (y - 2x)^2$

40. $f(x, y) = x^3 - y$

41. $f(x, y) = y - \ln x$

42. $f(x, y) = e^{y/x}$

43. $f(x, y) = ye^x$

44. $f(x, y) = y \sec x$

45. $f(x, y) = \sqrt{y^2 - x^2}$

46. $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

47-48 Faça o esboço do mapa de contorno e do gráfico da função e compare-os.

47. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

48. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

49. Uma placa fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$$

50. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy, as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

51-54 Use um computador para traçar o gráfico da função utilizando vários pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, oferece a melhor visão. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o mapa de contorno da mesma função e compare.

51. $f(x, y) = e^{-x^2} + e^{-2y^2}$

52. $f(x, y) = (1 - 3x^2 + y^2)e^{1-x^2-y^2}$

53. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

54. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

55-60 Faça uma correspondência entre a função (a) e seu gráfico (indicado por A-F na página 828), (b) e seus mapas de contorno (indicado por I-VI). Justifique sua escolha.

55. $z = \text{sen}\,(xy)$

56. $z = e^x \cos y$

57. $z = \text{sen}\,(x - y)$

58. $z = \text{sen}\,x - \text{sen}\,y$

59. $z = (1 - x^2)(1 - y^2)$

60. $z = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

61-64 Descreva as superfícies de nível da função.

61. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

62. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

63. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

64. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

65-66 Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

65. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

66. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

67-68 Utilize um computador para traçar o gráfico da função, utilizando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E aos "mínimos locais"?

67. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

68. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

69-70 Utilize um computador para traçar o gráfico da função, usando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

69. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

70. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

71. Utilize um computador para estudar o comportamento da família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. Como a forma da função é afetada por uma mudança do valor de c?

72. Use um computador para investigar a família de superfícies

$$z = (ax^2 + by^2)e^{-x^2-y^2}$$

Como a forma do gráfico depende dos números a e b?

73. Use um computador para investigar a família de superfícies $z = x^2 + y^2 + cxy$. Em particular, você deve determinar os valores de transição para os quais a superfície muda de um tipo de superfície quádrica para outro.

74. Esboce o gráfico das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \text{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

e
$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se g é uma função de uma variável, como obter o gráfico de

$$f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

a partir do gráfico de g?

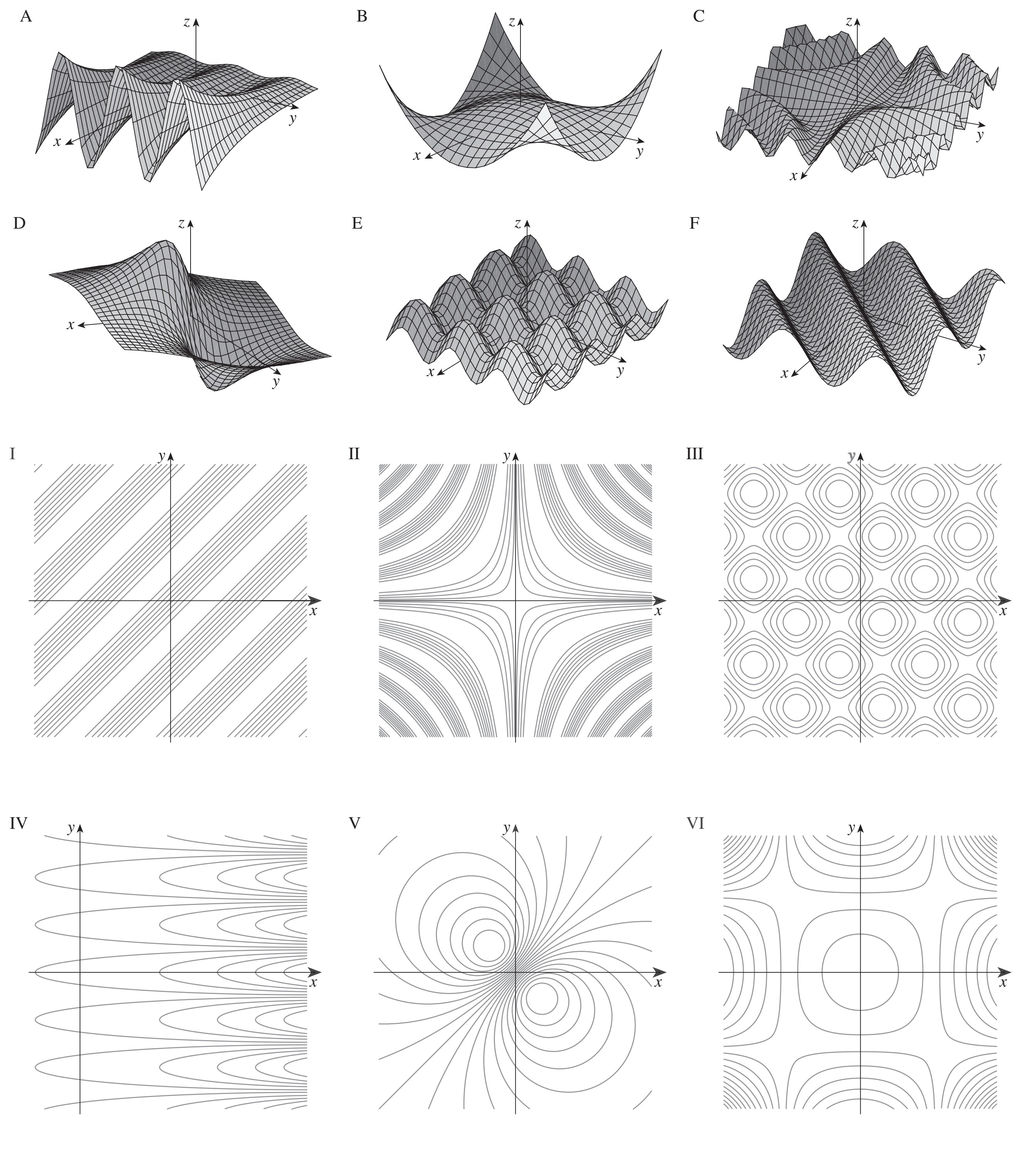
75. (a) Mostre que, tomando logaritmos, a função geral de Cobb--Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln \frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln \frac{L}{K}$$

(b) Se tomarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação da parte (a) se tornará uma equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Utilize a Tabela 2 (do Exemplo 3) para fazer uma tabela de valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos de 1899-1922. Use então um computador ou calculadora gráfica para achar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta de regressão pelos pontos $(\ln(L/K), \ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

Gráficos e Mapas de Contorno para os Exercícios 55–60



5 Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta \text{ então } |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$$

Observe que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$, e (5) é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b\rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de modo que (5) se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c\rangle$, e (5) é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso, a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 EXERCÍCIOS

1. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x, y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
(a) A temperatura externa como função da latitude, da longitude e do tempo.
(b) A altura acima do nível do mar como função da longitude, da latitude e do tempo.
(c) O custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e do tempo gasto.

3-4 Utilize uma tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Em seguida, explique por que sua conjectura está correta.

3. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$ **4.** $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5-22 Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\lim_{(x,y)\to(5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$ **6.** $\lim_{(x,y)\to(6,3)} xy\cos(x - 2y)$

7. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{4 - xy}{x^2 + 3y^2}$ **8.** $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\dfrac{1 + y^2}{x^2 + xy}\right)$

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^4 + 3y^4}$ **10.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\cos y}{3x^2 + y^2}$ **12.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$

13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **14.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2ye^y}{x^4 + 4y^2}$ **16.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$

17. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ **18.** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2 + y^8}$

19. $\lim_{(x,y,z)\to(3,0,1)} e^{-xy}\operatorname{sen}(\pi z/2)$ **20.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$

21. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$ **22.** $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{yz}{x^2 + 4y^2 + 9z^2}$

23-24 Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

23. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$

24. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

25-26 Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

25. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $f(x, y) = 2x + 3y - 6$

26. $g(t) = t + \ln t$, $f(x, y) = \dfrac{1 - xy}{1 + x^2y^2}$

27-28 Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida, utilize a fórmula para explicar o que você observou.

27. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$ **28.** $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

29-38 Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

29. $F(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y}$ **30.** $F(x, y) = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

31. $F(x, y) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{y})$ **32.** $F(x, y) = e^{x^2y} + \sqrt{x + y^2}$

33. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$ **34.** $G(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}((x + y)^{-2})$

35. $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2}$ **36.** $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

37. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

38. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

39-41 Utilize coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares do ponto (x, y), com $r \geqslant 0$, observe que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.]

39. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

40. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

41. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2} - 1}{x^2 + y^2}$

42. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e conjecturamos que $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

43. Trace o gráfico e analise a continuidade da função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{xy} & \text{se } xy \neq 0 \\ 1 & \text{se } xy = 0 \end{cases}$$

44. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad y \geqslant x^4 \\ 1 & \text{se } 0 < y < x^4 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(x, y) \to 0$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ por qualquer caminho da forma $y = mx^a$ passando por $(0, 0)$ com $a < 4$.

(b) Apesar da parte (a), mostre que f é descontínua em $(0, 0)$.

(c) Mostre que f é descontínua em duas curvas inteiras.

45. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [*Sugestão*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

46. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

14.3 DERIVADAS PARCIAIS

Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a indicada no termômetro. O Serviço Meteorológico do Canadá introduziu o *humidex* (ou índice de temperatura-umidade) para descrever os efeitos combinados da temperatura e umidade. O humidex I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real for T e a umidade relativa for H. Deste modo, I é uma função de T e H e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é a parte de uma tabela compilada pelo Serviço Meteorológico.

TABELA 1
Índice humidex I como função da temperatura e umidade

Umidade relativa (%) — Temperatura real (°C)

T \ H	40	45	50	55	60	65	70	75	80
26	28	28	29	31	31	32	33	34	35
28	31	32	33	34	35	36	37	38	39
30	34	35	36	37	38	40	41	42	43
32	37	38	39	41	42	43	45	46	47
34	41	42	43	45	47	48	49	51	52
36	43	45	47	48	50	51	53	54	56

Se nos concentrarmos na coluna assinalada da tabela que corresponde à umidade relativa de $H = 60\%$, estaremos considerando o humidex como uma função de uma única variável T para um valor fixado de H. Vamos escrever $g(T) = f(T, 60)$. Então, $g(T)$ descreve como o humidex I aumenta à medida que a temperatura real T aumenta quando a umidade relativa é 60%. A derivada de g quando $T = 30$ °C é a taxa de variação de I com relação a T quando $T = 30$ °C:

$$g'(30) = \lim_{h\to 0} \frac{g(30 + h) - g(30)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(30 + h, 60) - f(30, 60)}{h}$$

Observe que, pela Equação 8, se o trabalho e o capital são ambos aumentados por um fator m, temos

$$P(mL, mK) = b(mL)^{\alpha}(mK)^{\beta} = m^{\alpha+\beta}bL^{\alpha}K^{\beta} = m^{\alpha+\beta}P(L, K)$$

Se $\alpha + \beta = 1$, então $P(mL, mK) = mP(L, K)$, o que significa que a produção também é aumentada pelo fator m. Essa é a razão pela qual Cobb e Douglas supuseram que $\alpha + \beta = 1$ e, portanto,

$$P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

Essa é a função de produção de Cobb-Douglas, discutida na Seção 14.1.

14.3 EXERCÍCIOS

1. A temperatura T de uma localidade do Hemisfério Norte depende da longitude x, da latitude y e do tempo t, de modo que podemos escrever $T = f(x, y, t)$. Vamos medir o tempo em horas a partir do início de janeiro.

(a) Qual é o significado das derivadas parciais $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ e $\partial T/\partial t$?

(b) Honolulu tem longitude de 158° W e latitude de 21° N. Suponha que às 9 horas em 1º de janeiro esteja ventando para noroeste uma brisa quente, de forma que a oeste e a sul o ar esteja quente e a norte e leste o ar esteja mais frio. Você esperaria que $f_x(158, 21, 9)$, $f_y(158, 21, 9)$ e $f_t(158, 21, 9)$ fossem positivas ou negativas? Explique.

2. No começo desta seção discutimos a função $I = f(T, H)$, onde I era o humidex; T, a temperatura; e H, a umidade relativa. Utilize a Tabela 1 para estimar $f_T(34, 75)$ e $f_H(34, 75)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

3. O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

(a) Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{v \to \infty} \frac{\partial W}{\partial v}$$

4. A altura h das ondas em mar aberto depende da velocidade v do vento e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela velocidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados em pés na tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
30	1,2	1,3	1,5	1,5	1,5	1,6	1,6
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

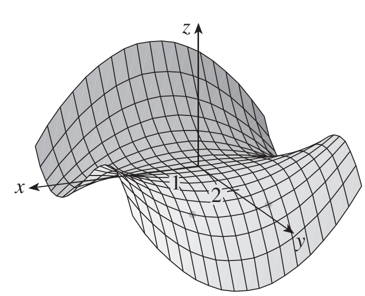
(a) Qual o significado das derivadas parciais $\partial h/\partial v$ e $\partial h/\partial t$?

(b) Estime os valores de $f_v(80, 15)$ e $f_t(80, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

(c) Qual parece ser o valor do seguinte limite?

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\partial h}{\partial t}$$

5-8 Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.



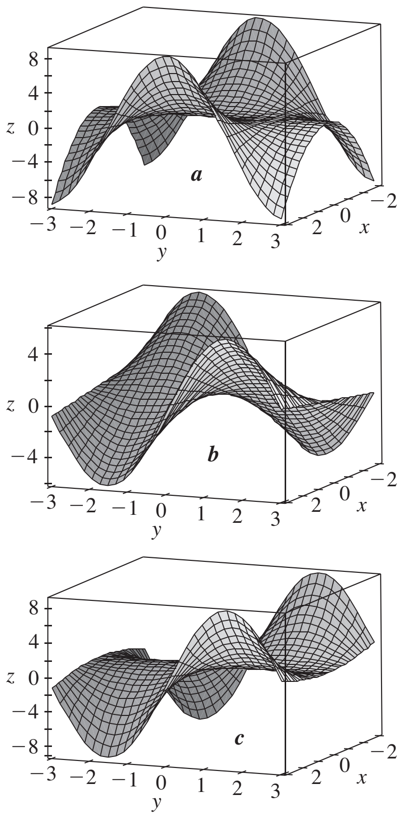
5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$

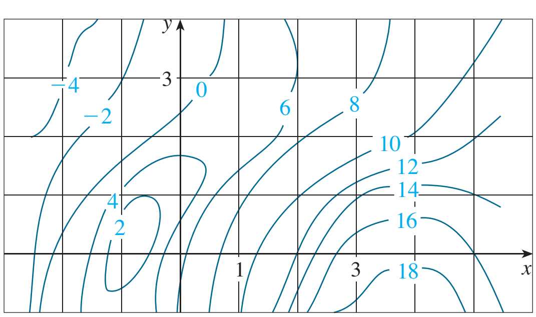
7. (a) $f_{xx}(-1, 2)$ (b) $f_{yy}(-1, 2)$

8. (a) $f_{xy}(1, 2)$ (b) $f_{xy}(-1, 2)$

9. As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.



10. É dado o mapa de contorno de uma função f. Use-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



11. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

12. Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

13-14 Determine f_x e f_y e faça os gráficos de f, f_x e f_y com domínios e pontos de vista que lhe permitam ver a relação entre eles.

13. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y$ **14.** $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

15-38 Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

15. $f(x, y) = 3x - 2y^4$

16. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

17. $z = xe^{3y}$ **18.** $f(x, y) = \sqrt{x}\ln t$

19. $z = (2x + 3y)^{10}$ **20.** $z = \operatorname{tg} xy$

21. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ **22.** $f(x, y) = x^y$

23. $w = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$ **24.** $w = e^v/(u + v^2)$

25. $f(r, s) = r\ln(r^2 + s^2)$ **26.** $f(x, t) = \operatorname{arctg}\left(x\sqrt{t}\right)$

27. $u = te^{w/t}$ **28.** $f(x, y) = \int_y^x \cos\,(t)^2\,dt$

29. $f(x, y, z) = xz - 5x^2y^3z^4$ **30.** $f(x, y, z) = x\operatorname{sen}(y - z)$

31. $w = \ln(x + 2y + 3z)$ **32.** $w = ze^{xyz}$

33. $u = xy\operatorname{sen}^{-1}(yz)$ **34.** $u = x^{y/z}$

35. $f(x, y, z, t) = xyz^2\operatorname{tg}(yt)$ **36.** $f(x, y, z, t) = \dfrac{xy^2}{t + 2z}$

37. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

38. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

39-42 Determine as derivadas parciais indicadas.

39. $f(x, y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; $f_x(3, 4)$

40. $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$; $f_x(2, 3)$

41. $f(x, y, z) = \dfrac{y}{x + y + z}$; $f_y(2, 1, -1)$

42. $f(x, y, z) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y + \operatorname{sen}^2 z}$; $f_z(0, 0, \pi/4)$

43-44 Use a definição de derivadas parciais como limites (4) para encontrar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

43. $f(x, y) = x^2y - x^3y$ **44.** $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y^2}$

45-48 Use a derivação implícita para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

45. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ **46.** $yz = \ln(x + z)$

47. $x - z = \operatorname{arctg}(yz)$ **48.** $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$

49-50 Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

49. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

50. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

51-56 Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem.

51. $f(x, y) = x^3y^5 + 2x^4y$ **52.** $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(mx + ny)$

53. $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ **54.** $v = \dfrac{xy}{x - y}$

55. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x + y}{1 - xy}$ **56.** $v = e^{xe^y}$

57-60 Verifique que a conclusão do Teorema de Clairaut é válida, isto é, $u_{xy} = u_{yx}$.

57. $u = x\,\mathrm{sen}(x + 2y)$

58. $u = x^4y^2 - 2xy^5$

59. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

60. $u = xye^y$

61-68 Determine as derivadas parciais indicadas.

61. $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$; $\quad f_{xxy},\ f_{yyy}$

62. $f(x, t) = x^2e^{-ct}$; $\quad f_{ttt},\ f_{txx}$

63. $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$; $\quad f_{xyz},\ f_{yzz}$

64. $f(r, s, t) = r\ln(rs^2t^3)$; $\quad f_{rss},\ f_{rst}$

65. $u = e^{r\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$; $\quad \dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2\,\partial\theta}$

66. $z = u\sqrt{v - w}$; $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v\,\partial w}$

67. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\quad \dfrac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial y\,\partial x},\ \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2\,\partial y}$

68. $u = x^a y^b z^c$; $\quad \dfrac{\partial^6 u}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z^3}$

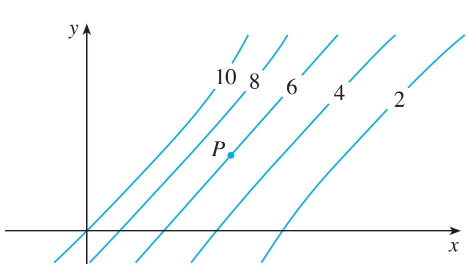
69. Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2{,}2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

$x \backslash y$	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

70. São mostradas as curvas de nível de uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}

(d) f_{xy} (e) f_{yy}



71. Verifique que a função $u = e^{-\alpha^2k^2t}\,\mathrm{sen}\,kx$ é solução da *equação de condução do calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

72. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

(a) $u = x^2 + y^2$ (b) $u = x^2 - y^2$

(c) $u = x^3 + 3xy^2$ (d) $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

(e) $u = \mathrm{sen}\,x\cosh y + \cos x\,\mathrm{senh}\,y$

(f) $u = e^{-x}\cos y - e^{-y}\cos x$

73. Verifique que a função $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é uma solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

74. Mostre que cada uma das seguintes funções é uma solução da equação da onda $u_{tt} = a^2u_{xx}$.

(a) $u = \mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{sen}(akt)$

(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$

(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$

(d) $u = \mathrm{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

75. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 74.

76. Se $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

77. Verifique que a função $z = \ln(e^x + e^y)$ é uma solução das equações diferenciais

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

e

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

78. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

79. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 5.)

80. A temperatura em um ponto (x, y) de uma chapa de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde T é medido em ºC e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $(1, 2)$ (a) com relação a x e (b) com relação a y.

81. A resistência total R produzida por três condutores com resistência R_1, R_2 e R_3 conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

82. A lei dos gases para uma massa fixa m de um gás ideal à temperatura absoluta T, pressão P e volume V é $PV = mRT$, onde R é a constante do gás. Mostre que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1$$

83. Para o gás ideal do Exercício 82, mostre que

$$T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = mR$$

84. O índice sensação térmica é modelado pela função

$$W = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

onde T é a temperatura (ºC) e v, a velocidade do vento (km/h). Quando $T = -15$ ºC e $v = 30$ km/h, quanto você espera que a temperatura aparente caia se a temperatura real decrescer em 1 ºC? E se a velocidade do vento aumentar em 1 km/h?

85. A energia cinética de um corpo com massa m e velocidade v é $K = \frac{1}{2}mv^2$. Mostre que

$$\frac{\partial K}{\partial m}\frac{\partial^2 K}{\partial v^2} = K$$

86. Se a, b e c são os lados de um triângulo e A, B e C são os ângulos opostos, determine $\partial A/\partial a$, $\partial A/\partial b$ e $\partial A/\partial c$ pela derivação implícita da Lei dos Cossenos.

87. Disseram-lhe que existe uma função f cujas derivadas parciais são $f_x(x, y) = x + 4y$ e $f_y(x, y) = 3x - y$ e cujas derivadas parciais de segunda ordem são contínuas. Você deve acreditar nisso?

88. O paraboloide $z = 6 - x - x^2 - 2y^2$ intercepta o plano $x = 1$ em uma parábola. Determine as equações paramétricas para a reta tangente a essa parábola no ponto $(1, 2, -4)$. Use um computador para fazer o gráfico do paraboloide, da parábola e da reta tangente em uma mesma tela.

89. O elipsoide $4x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ intercepta o plano $y = 2$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente à elipse no ponto $(1, 2, 2)$.

90. No estudo de penetração do congelamento descobriu-se que a temperatura T no instante t (medido em dias) a uma profundidade x (medida em pés) pode ser modelada pela função

$$T(x, t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x}\,\text{sen}(\omega t - \lambda x)$$

onde $\omega = 2\pi/365$ e λ é uma constante positiva.

(a) Determine $\partial T/\partial x$. Qual seu significado físico?

(b) Determine $\partial T/\partial t$. Qual seu significado físico?

(c) Mostre que T satisfaz a equação do calor $T_t = kT_{xx}$ para uma certa constante k.

(d) Se $\lambda = 0{,}2$, $T_0 = 0$ e $T_1 = 10$, use um computador para traçar o gráfico de $T(x, t)$.

(e) Qual é o significado físico do termo $-\lambda x$ na expressão $\text{sen}(\omega t - \lambda x)$?

91. Utilize o Teorema de Clairaut para mostrar que, se as derivadas parciais de terceira ordem de f forem contínuas, então

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

92. (a) Quantas derivadas de n-ésima ordem tem uma função de duas variáveis?

(b) Se essas derivadas parciais forem contínuas, quantas delas podem ser distintas?

(c) Responda a parte (a) da questão para uma função de três variáveis.

93. Se $f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}e^{\text{sen}(x^2y)}$, determine $f_x(1, 0)$. [*Sugestão*: Em vez de achar $f_x(x, y)$ primeiro, observe que é mais fácil utilizar a Equação 1 ou a Equação 2.]

94. Se $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$, determine $f_x(0, 0)$.

95. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Use um computador para traçar o gráfico de f.

(b) Determine $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ quando $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Determine $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ usando as Equações 2 e 3.

(d) Mostre que $f_{xy}(0, 0) = -1$ e $f_{yx}(0, 0) = 1$.

SCA (e) O resultado da parte (d) contradiz o Teorema de Clairaut? Use os gráficos de f_{xy} e f_{yx} para ilustrar sua resposta.

14.4 PLANOS TANGENTES E APROXIMAÇÕES LINEARES

Uma das ideias mais importantes em cálculo de funções com uma única variável é que, à medida que damos *zoom* em torno de um ponto no gráfico de uma função diferenciável, esse gráfico vai se tornando indistinguível de sua reta tangente, e podemos aproximar a função por uma função linear (veja a Seção 3.10, no Volume I). Desenvolveremos ideias semelhantes em três dimensões. À medida que damos *zoom* em torno de um ponto na superfície que é o gráfico de uma função diferenciável de duas variáveis, essa superfície parece mais e mais com um plano (seu plano tangente) e podemos aproximar a função, nas proximidades do ponto, por uma função linear de duas variáveis. Estenderemos também a ideia de diferencial para as funções de duas ou mais variáveis.

Foi-nos dado que $|\Delta x| \leq 0{,}2$, $|\Delta y| \leq 0.2$ e $|\Delta z| \leq 0{,}2$. Para determinar o maior erro no volume, usamos $dx = 0{,}2$, $dy = 0{,}2$ e $dz = 0{,}2$ em conjunto com $x = 75$, $y = 60$ e $z = 40$:

$$\Delta V \approx dV = (60)(40)(0{,}2) + (75)(60)(0{,}2) = 1\,980$$

Portanto, um erro de apenas 0,2 cm nas medidas de cada dimensão pode nos levar a um erro da ordem de 1 980 cm^3 no cálculo do volume! Isso pode parecer um erro muito grande, mas, na verdade, é um erro de apenas cerca de 1% do volume da caixa. □

14.4 EXERCÍCIOS

1-6 Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. $z = 4x^2 - y^2 + 2y, \quad (-1, 2, 4)$

2. $z = 3(x - 1)^2 + 2(y + 3)^2 + 7, \quad (2, -2, 12)$

3. $z = \sqrt{xy}, \quad (1, 1, 1)$

4. $z = y \ln x, \quad (1, 4, 0)$

5. $z = y \cos(x - y), \quad (2, 2, 2)$

6. $z = e^{x^2 - y^2}, \quad (1, -1, 1)$

7-8 Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o domínio e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente perto do ponto se tornem indistinguíveis.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2, \quad (1, 1, 5)$

8. $z = \operatorname{arctg}(xy^2), \quad (1, 1, \pi/4)$

9-10 Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema de computação algébrica tanto para calcular as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida, dê *zoom* até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

SCA

9. $f(x, y) = \dfrac{xy \operatorname{sen}(x - y)}{1 + x^2 + y^2}, \quad (1, 1, 0)$

10. $f(x, y) = e^{-xy/10}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}\right), \quad (1, 1, 3e^{-0,1})$

11-16 Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. A seguir, encontre a linearização $L(x, y)$ da função naquele ponto.

11. $f(x, y) = x\sqrt{y}, \quad (1, 4)$

12. $f(x, y) = x^3y^4, \quad (1, 1)$

13. $f(x, y) = \dfrac{x}{x + y}, \quad (2, 1)$

14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}, \quad (3, 0)$

15. $f(x, y) = e^{-xy}\cos y, \quad (\pi, 0)$

16. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y), \quad (-3, 2)$

17-18 Verifique a aproximação linear em $(0, 0)$

17. $\dfrac{2x + 3}{4y + 1} \approx 3 + 2x - 12y$ **18.** $\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$

19. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2, 1)$ e use-a para aproximar $f(1{,}95, 1{,}08)$.

20. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ em $(7, 2)$ e use-a para aproximar $f(6{,}9, 2{,}06)$. Ilustre, traçando o gráfico da função e do plano tangente.

21. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em $(3, 2, 6)$ e use-a para aproximar o número $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2}$.

22. A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (km/h)

v \ t	5	10	15	20	30	40	50
40	1,5	2,2	2,4	2,5	2,7	2,8	2,8
60	2,8	4,0	4,9	5,2	5,5	5,8	5,9
80	4,3	6,4	7,7	8,6	9,5	10,1	10,2
100	5,8	8,9	11,0	12,2	13,8	14,7	15,3
120	7,4	11,3	14,4	16,6	19,0	20,5	21,1

Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 80 km/h e t está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 84 km/h.

23. Utilize a tabela do Exemplo 3 para encontrar a aproximação linear da função humidex quando a temperatura está próxima de 32 ºC e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 65%. Estime também o humidex quando a temperatura é de 33 ºC e a umidade relativa, 63%.

24. O índice de sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a velocidade do vento, v; portanto, podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função de sensação térmica quando T estiver a -15 °C e v estiver próximo de 50 km/h. Estime, a seguir, a sensação térmica quando a temperatura estiver a -17 °C e a velocidade do vento for de 55 km/h.

25-30 Determine a diferencial da função.

25. $z = x^3 \ln(y^2)$

26. $v = y \cos xy$

27. $m = p^5 q^3$

28. $T = \dfrac{v}{1 + uvw}$

29. $R = \alpha\beta^2 \cos \lambda$

30. $w = xye^{xz}$

31. Se $z = 5x^2 + y^2$ e (x, y) varia de $(1, 2)$ a $(1{,}05, 2{,}1)$, compare os valores de Δz e dz.

32. Se $z = x^2 - xy + 3y^2$ e (x, y) varia de $(3, -1)$ a $(2{,}96, -0{,}95)$, compare os valores de Δz e dz.

33. O comprimento e a largura de um retângulo foram medidos como 30 cm e 24 cm, respectivamente, com um erro de medida de, no máximo, 0,1 cm. Utilize as diferenciais para estimar o erro máximo cometido no cálculo da área do retângulo.

34. As dimensões de uma caixa retangular fechada foram medidas como 80 cm, 60 cm e 50 cm, respectivamente, com erro máximo de 0,2 cm em cada dimensão. Utilize os diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo da área da superfície da caixa.

35. Utilize diferenciais para estimar a quantidade de estanho em uma lata cilíndrica fechada com 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura se a espessura da folha de estanho for de 0,04 cm.

36. Use diferenciais para estimar a quantidade de metal em uma lata cilíndrica fechada de 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro se o metal das tampas de cima e de baixo possui 0,1 cm de espessura e o das laterais tem espessura de 0,05 cm.

37. Uma faixa interna de 8 cm de largura é pintada na borda de um retângulo de dimensões 30 m por 60 m. Utilize os diferenciais para aproximar a área, em metros quadrados, da faixa pintada.

38. A pressão, o volume e a temperatura de um mol de um gás ideal estão relacionados pela equação $PV = 8{,}31T$, onde P é medida em quilopascals, V em litros e T em kelvins. Utilize diferenciais para determinar a variação aproximada da pressão se o volume aumenta de 12 L para 12,3 L e a temperatura diminui de 310 K para 305 K.

39. Se R é a resistência equivalente de três resistores conectadas em paralelo, com resistências R_1, R_2 e R_3, então

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Se as resistências medem em ohms $R_1 = 25\ \Omega$, $R_2 = 40\Omega$ e $R_3 = 50\ \Omega$, com margem de erro de 0,5% em cada uma, estime o erro máximo no valor calculado de R.

40. Quatro números positivos, cada um menor que 50, são arredondados até a primeira casa decimal e depois multiplicados. Utilize os diferenciais para estimar o máximo erro possível no cálculo do produto que pode resultar do arredondamento.

41. Um modelo para a área da superfície do corpo humano é dado por $S = 72{,}09w^{0{,}425}\,h^{0{,}725}$, onde w é o peso (em quilogramas), h é a altura (em centímetros) e S é medida em centímetros quadrados. Se os erros nas medidas de w e h forem no máximo de 2%, use diferenciais para estimar a porcentagem de erro máxima na área da superfície calculada.

42. Suponha que você precise saber uma equação do plano tangente à superfície S no ponto $P(2, 1, 3)$. Você não tem uma equação para S, mas sabe que as curvas

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle 2 + 3t, 1 - t^2, 3 - 4t + t^2 \rangle$$

$$\mathbf{r}_2(u) = \langle 1 + u^2, 2u^3 - 1, 2u + 1 \rangle$$

estão ambas em S. Encontre uma equação para o plano tangente em P.

43-44 Mostre que a função é diferenciável achando valores ε_1 e ε_2 que satisfaçam à Definição 7.

43. $f(x, y) = x^2 + y^2$

44. $f(x, y) = xy - 5y^2$

45. Demonstre que, se f é uma função de duas variáveis diferenciável em (a, b), então f é contínua em (a, b). *Sugestão*: Mostre que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)} f(a + \Delta x, b + \Delta y) = f(a, b)$$

46. (a) A função

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

corresponde ao gráfico da Figura 4. Mostre que $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$ existem, mas f não é diferenciável em $(0, 0)$. [*Sugestão*: Utilize o resultado do Exercício 45.]

(b) Explique por que f_x e f_y não são contínuas em $(0, 0)$.

14.5 EXERCÍCIOS

1-6 Use a Regra da Cadeia para determinar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2y + xy^2$, $x = 2 + t^4$, $y = 1 - t^3$

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = e^{2t}$, $y = e^{-2t}$

3. $z = \text{sen}\, x \cos y$, $x = \pi t$, $y = \sqrt{t}$

4. $z = \text{tg}^{-1}(x/y)$, $x = e^t$, $y = 1 - e^{-t}$

5. $w = xe^{y/z}$, $x = t^2$, $y = 1 - t$, $z = 1 + 2t$

6. $w = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \text{sen}\, t$, $y = \cos t$, $z = \text{tg}\, t$

7-12 Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2y^3$, $x = s\cos t$, $y = s\,\text{sen}\, t$

8. $z = \text{arcsen}(x - y)$, $x = s^2 + t^2$, $y = 1 - 2st$

9. $z = \text{sen}\,\theta \cos\phi$, $\theta = st^2$, $\phi = s^2t$

10. $z = e^{x+2y}$, $x = s/t$, $y = t/s$

11. $z = e^r \cos\theta$, $r = st$, $\theta = \sqrt{s^2 + t^2}$

12. $z = \text{tg}(u/v)$, $u = 2s + 3t$, $v = 3s - 2t$

13. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável, e

$x = g(t)$	$y = h(t)$
$g(3) = 2$	$h(3) = 7$
$g'(3) = 5$	$h'(3) = -4,$
$f_x(2, 7) = 6$	$f_y(2, 7) = -8$

determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F, u, e v são diferenciáveis, e

$u(1, 0) = 2$	$v(1, 0) = 3$
$u_s(1, 0) = -2,$	$v_s(1, 0) = 5$
$u_t(1, 0) = 6$	$v_t(1, 0) = 4,$
$F_u(2, 3) = -1$	$F_v(2, 3) = 10$

Determine $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + \text{sen}\, v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
$(0, 0)$	3	6	4	8
$(1, 2)$	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17-20 Utilize um diagrama em árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Suponha que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$

18. $R = f(x, y, z, t)$, onde $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$, $t = t(u, v, w)$

19. $w = f(r, s, t)$, onde $r = r(x, y)$, $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$

20. $t = f(u, v, w)$, onde $u = u(p, q, r, s)$, $v = v(p, q, r, s)$, $w = w(p, q, r, s)$

21-26 Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3$, $x = uv^2 + w^3$, $y = u + ve^w$;

$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$

22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}$, $r = y + x\cos t$, $s = x + y\,\text{sen}\, t$;

$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1$, $y = 2$, $t = 0$

23. $R = \ln(u^2 + v^2 + w^2)$, $u = x + 2y$, $v = 2x - y$, $w = 2xy$;

$\dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$ quando $x = y = 1$

24. $M = xe^{y-z^2}$, $x = 2uv$, $y = u - v$, $z = u + v$;

$\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}$, quando $u = 3$, $v = -1$

25. $u = x^2 + yz$, $x = pr\cos\theta$, $y = pr\,\text{sen}\,\theta$, $z = p + r$;

$\dfrac{\partial u}{\partial p}, \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ quando $p = 2$, $r = 3$, $\theta = 0$

26. $Y = w\,\text{tg}^{-1}(uv)$, $u = r + s$, $v = s + t$, $w = t + r$;

$\dfrac{\partial Y}{\partial r}, \dfrac{\partial Y}{\partial s}, \dfrac{\partial Y}{\partial t}$ quando $r = 1$, $s = 0$, $t = 1$

27-30 Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

27. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

28. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$

29. $\cos(x - y) = xe^y$

30. $\text{sen}\, x + \cos y = \text{sen}\, x \cos y$

31-34 Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$

32. $xyz = \cos(x + y + z)$

33. $x - z = \text{arctg}(yz)$

34. $yz = \ln(x + z)$

35. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

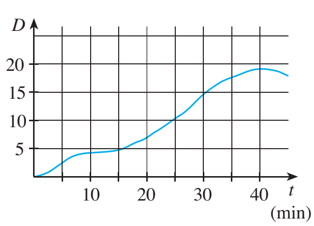
36. A produção W de trigo em um determinado ano depende da temperatura média T e da quantidade anual de chuva R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano e a quantidade anual de chuva está decrescendo

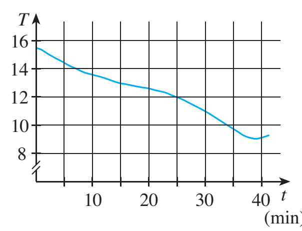
à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que, no atual nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?
(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.

37. A velocidade da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + 0{,}016D$$

onde C é a velocidade do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo do nível do mar (em metros). Um mergulhador começa um mergulho tranquilo nas águas oceânicas e a profundidade do mergulho e a temperatura da água ao redor são registradas nos gráficos a seguir. Estime a taxa de variação (em relação ao tempo) da velocidade do som através do oceano experimentada pelo mergulhador 20 minutos depois do início do mergulho. Quais são as unidades?





38. O raio de um cone circular reto aumenta a uma taxa de 4,6 cm/s enquanto sua altura decresce à taxa de 6,5 cm/s. Qual a taxa de variação do volume do cone quando seu raio é de 300 cm e a altura é 350 cm?

39. O comprimento ℓ, a largura w e a altura h de uma caixa variam com o tempo. Em certo instante, as dimensões da caixa são $\ell = 1$ m e $w = h = 2$ m, ℓ e w aumentam a uma taxa de 2 m/s, ao passo que h diminui à taxa de 3 m/s. Nesse instante, determine as taxas nas quais as seguintes quantidades estão variando.
(a) O volume
(b) A área da superfície
(c) O comprimento da diagonal

40. A voltagem V em um circuito elétrico simples decresce lentamente à medida que a pilha se descarrega. A resistência R aumenta lentamente com o aumento de calor do resistor. Use a Lei de Ohm, $V = IR$, para achar como a corrente I está variando no momento em que $R = 400\ \Omega$, $I = 0{,}08$ A, $dV/dt = -0{,}01$ V/s e $dR/dt = 0{,}03\ \Omega$/s.

41. A pressão de um mol de um gás ideal é aumentada à taxa de 0,05 kPa/s e a temperatura é elevada à taxa de 0,15 K/s. Utilize a equação do Exemplo 2 para achar a taxa de variação do volume quando a pressão é 20 kPa e a temperatura é 320 K.

42. Um carro A está viajando para norte na rodovia 16 e um carro B está viajando para oeste na rodovia 83. Os dois carros se aproximam da intersecção dessas rodovias. Em um certo momento, o carro A está a 0,3 km da intersecção viajando a 90 km/h, ao passo que o carro B está a 0,4 km da intersecção viajando a 80 km/h. Qual a taxa de variação da distância entre os carros nesse instante?

43. Um lado de um triângulo está aumentando a uma taxa de 3 cm/s e um segundo lado está decrescendo a uma taxa de 2 cm/s. Se a área do triângulo permanece constante, a que taxa varia o ângulo entre os lados quando o primeiro lado tem 20 cm de comprimento, o segundo lado tem 30 cm de comprimento e o ângulo é $\pi/6$?

44. Se um som com frequência f_s for produzido por uma fonte se movendo ao longo de uma reta com velocidade v_s e um observador estiver se movendo com velocidade v_o ao longo da mesma reta a partir da direção oposta, em direção à fonte, então a frequência do som ouvido pelo observador é

$$f_o = \left(\frac{c + v_o}{c - v_s}\right) f_s$$

onde c é a velocidade do som, cerca de 332 m/s. (Este é o **efeito Doppler**.) Suponha que, em um momento particular, você está em um trem se movendo a 34 m/s e acelerando a 1,2 m/s^2. Um trem se aproxima de você da direção oposta no outro trilho a 40 m/s, acelerando a 1,4 m/s^2, e toca seu apito, que tem frequência de 460 Hz. Neste instante, qual é a frequência aparente que você ouve e quão rapidamente ela está variando?

45-48 Suponha que todas as funções dadas são diferenciáveis.

45. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, (a) determine $\partial z/\partial r$ e $\partial z/\partial\theta$ e (b) mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

46. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\mathrm{sen}\,t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

47. Se $z = f(x - y)$, mostre que $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

48. Se $z = f(x, y)$, onde $x = s + t$ e $y = s - t$, mostre que

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$$

49-54 Suponha que todas as funções dadas tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas.

49. Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

[*Sugestão*: Tome $u = x + at$, $v = x - at$.]

50. Se $u = f(x, y)$, onde $x = e^s\cos t$ e $y = e^s\,\mathrm{sen}\,t$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-2s}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]$$

51. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r^2 + s^2$, $y = 2rs$, determine $\partial^2 z/\partial r\,\partial s$. (Compare com o Exemplo 7.)

52. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\operatorname{sen}\theta$, determine (a) $\partial z/\partial r$, (b) $\partial z/\partial\theta$ e (c) $\partial^2 z/\partial r\,\partial\theta$.

53. Se $z = f(x, y)$, onde $x = r\cos\theta$, e $y = r\operatorname{sen}\theta$, mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$

54. Suponha $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$.
(a) Mostre que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(b) Determine uma fórmula semelhante para $\partial^2 z/\partial s\,\partial t$.

55. Uma função f é dita **homogênea de grau n** se satisfaz a equação $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ para todo valor de t, onde n é um inteiro positivo e f tem as segundas derivadas parciais contínuas.
(a) Verifique que $f(x, y) = x^2y + 2xy^2 + 5y^3$ é homogênea de grau 3.
(b) Mostre que, se f é homogênea de grau n, então

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$$

[*Sugestão*: Utilize a Regra da Cadeia para derivar $f(tx, ty)$ com relação a t.]

56. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1)f(x, y)$$

57. Se f é homogênea de grau n, mostre que

$$f_x(tx, ty) = t^{n-1}f_x(x, y)$$

58. Suponha que a equação $F(x, y, z) = 0$ defina implicitamente cada uma das três variáveis x, y e z como função das outras duas: $z = f(x, y)$, $y = g(x, z)$, $x = h(y, z)$. Se F for diferenciável e F_x, F_y e F_z forem todas não nulas, mostre que

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = -1$$

14.6 DERIVADAS DIRECIONAIS E O VETOR GRADIENTE

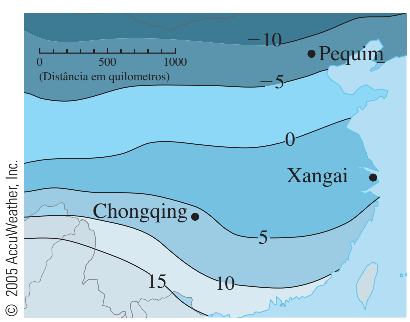


FIGURA 1

A Figura 1 mostra um mapa de contorno da função temperatura $T(x, y)$ para a China às 15 horas em 28 de dezembro de 2004. As curvas de nível, ou isotérmicas, ligam localizações com a mesma temperatura. A derivada parcial T_x em um local como Chongqing é a taxa de variação da temperatura com relação à distância se nos movermos para o leste a partir de Chongqing; T_y é a taxa de variação da temperatura se nos movermos para o norte. Mas, e se quisermos saber a taxa de variação da temperatura quando viajamos para sudoeste ou em alguma outra direção? Nesta seção, introduziremos um tipo de derivada, chamada derivada direcional, que nos permite encontrar a taxa de variação de uma função de duas ou mais variáveis em qualquer direção.

DERIVADAS DIRECIONAIS

Lembremo-nos de que, se $z = f(x, y)$, as derivadas parciais f_x e f_y são definidas como

1

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

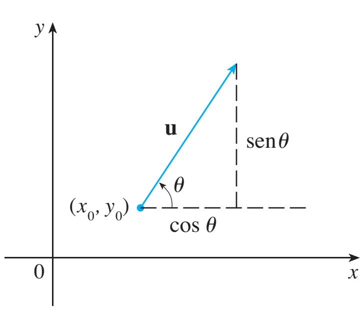


FIGURA 2
Um vetor unitário
$\mathbf{u} = \langle a, b\rangle = \langle\cos\theta, \operatorname{sen}\theta\rangle$

e representam as taxas de variação de z na direção positiva dos eixos x e y, ou seja, nas direções e sentidos dos versores $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

Suponha que queiramos determinar a taxa de variação de z no ponto (x_0, y_0) na direção de um vetor unitário arbitrário $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ (veja a Figura 2). Para fazê-lo, devemos considerar a superfície S com equação $z = f(x, y)$ (gráfico de f) e tomar $z_0 = f(x_0, y_0)$. O ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ pertence a S. O plano vertical que passa por P na direção de $\mathbf{u}$ intercepta S em uma curva C (veja a Figura 3). A inclinação da reta tangente T a C em P é a taxa de variação de z na direção de $\mathbf{u}$.

Se considerarmos um mapa topográfico de um morro e se $f(x, y)$ representar a altura acima do nível do mar do ponto de coordenadas (x, y), então a curva de aclive máximo pode ser desenhada como na Figura 12, fazendo-a perpendicular a todas as curvas de contorno. Esse fenômeno pode ser observado na Figura 12 na Seção 14.1, onde o Riacho Lonesome segue a curva de declive máximo.

Os sistemas de computação algébrica têm comandos que traçam alguns vetores gradientes. Cada vetor gradiente $\nabla f(a, b)$ é traçado partindo-se do ponto (a, b). A Figura 13 mostra como fica um desses desenhos (chamados *campos de vetores gradientes*) para a função $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobreposto a um mapa de contornos de f. Como esperado, os vetores gradientes apontam na direção de "subida de morro" e são perpendiculares às curvas de nível.

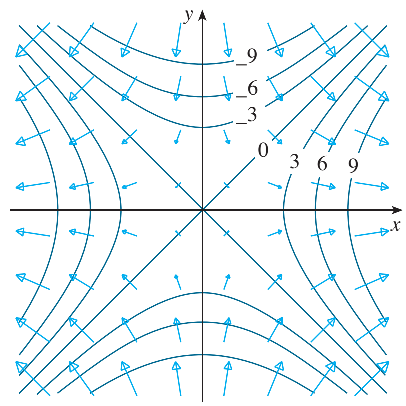
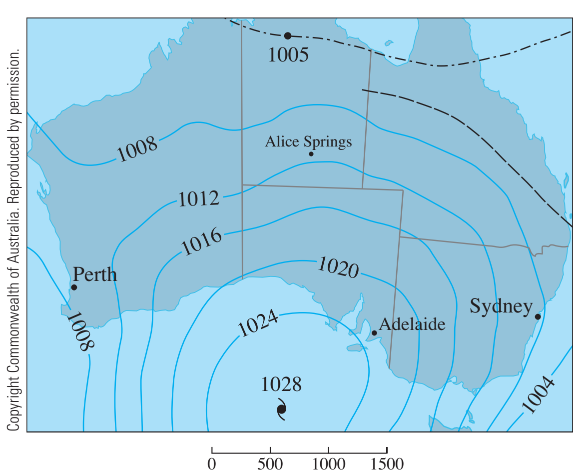


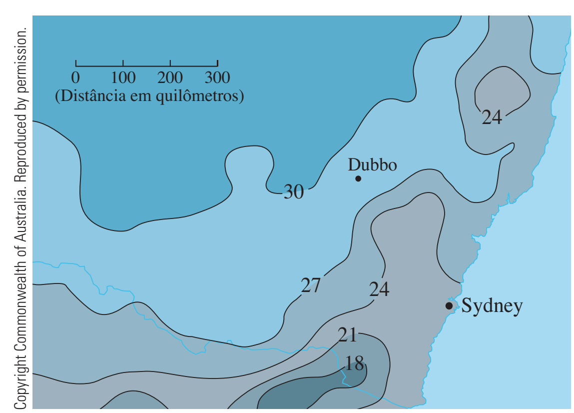
FIGURA 13

14.6 EXERCÍCIOS

1. É dado o mapa de contornos mostrando a pressão barométrica em hectopascais (hPa) na Austrália em 28 de dezembro de 2004. Estime o valor da derivada direcional da função pressão em Alice Springs na direção de Adelaide. Quis são as unidades da derivada direcional?



2. O mapa de contorno mostra a temperatura máxima média em novembro de 2004 (em ºC). Estime o valor da derivada direcional da função da temperatura em Dubbo, New South Wales, na direção de Sydney. Quais são as unidades?



3. Uma tabela de valores do índice de sensação térmica $W = f(T, v)$ é dada no Exercício 3 da Seção 14.3. Use-a para estimar o valor de $D_{\mathbf{u}} f(-20, 30)$, onde $\mathbf{u} = (\mathbf{i} + \mathbf{j})/\sqrt{2}$.

4-6 Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ.

4. $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$, $\quad (2, 1), \quad \theta = \pi/4$

5. $f(x, y) = ye^{-x}$, $(0, 4)$, $\theta = 2\pi/3$

6. $f(x, y) = x\,\text{sen}(xy)$, $(2, 0)$, $\theta = \pi/3$

7-10
(a) Determine o gradiente de f.
(b) Calcule o gradiente no ponto P.
(c) Determine a taxa de variação de f em P na direção do vetor $\mathbf{u}$.

7. $f(x, y) = 5xy^2 - 4x^3y$, $P(1, 2)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \rangle$

8. $f(x, y) = y \ln x$, $P(1, -3)$, $\mathbf{u} = \langle -\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \rangle$

9. $f(x, y, z) = xe^{2yz}$, $P(3, 0, 2)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle$

10. $f(x, y, z) = \sqrt{x + yz}$, $P(1, 3, 1)$, $\mathbf{u} = \langle \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \rangle$

11-17 Determine a derivada direcional da função no ponto dado na direção do vetor $\mathbf{v}$.

11. $f(x, y) = 1 + 2x\sqrt{y}$, $(3, 4)$, $\mathbf{v} = \langle 4, -3 \rangle$

12. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$

13. $g(p, q) = p^4 - p^2q^3$, $(2, 1)$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

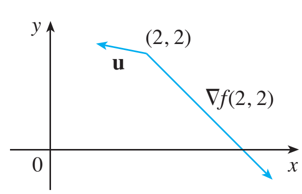
14. $g(r, s) = \text{tg}^{-1}(rs)$, $(1, 2)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

15. $f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

16. $f(x, y, z) = \sqrt{xyz}$, $(3, 2, 6)$, $\mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

17. $g(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^{3/2}$, $(1, 1, 2)$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

18. Use a figura para estimar $D_{\mathbf{u}} f(2, 2)$.



19. Determine a derivada direcional de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ em $P(2, 8)$ na direção de $Q(5, 4)$.

20. Determine a derivada direcional de $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ em $P(1, -1, 3)$ na direção de $Q(2, 4, 5)$.

21-26 Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

21. $f(x, y) = y^2/x$, $(2, 4)$

22. $f(p, q) = qe^{-p} + pe^{-q}$, $(0, 0)$

23. $f(x, y) = \text{sen}(xy)$, $(1, 0)$

24. $f(x, y, z) = (x + y)/z$, $(1, 1, -1)$

25. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $(3, 6, -2)$

26. $f(x, y, z) = \text{tg}(x + 2y + 3z)$, $(-5, 1, 1)$

27. (a) Mostre que uma função diferenciável f decresce mais rapidamente em $\mathbf{x}$ na direção oposta à do vetor gradiente, ou seja, na direção de $-\nabla f(\mathbf{x})$.
(b) Utilize a parte (a) para determinar a direção onde $f(x, y) = x^4y - x^2y^3$ decresce mais rápido no ponto $(2, -3)$.

28. Determine as direções em que a derivada direcional de $f(x, y) = ye^{-xy}$ no ponto $(0, 2)$ tem valor 1.

29. Determine todos os pontos nos quais a direção de maior variação da função $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ é $\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

30. Nas proximidades de uma boia, a profundidade de um lago em um ponto com coordenadas (x, y) é $z = 200 + 0{,}02x^2 - 0{,}001y^3$, onde x, y e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto $(80, 60)$ em direção à boia, que está localizada no ponto $(0, 0)$. A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

31. A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como a origem. A temperatura no ponto $(1, 2, 2)$ é de 120º.
(a) Determine a taxa de variação de T em $(1, 2, 2)$ em direção ao ponto $(2, 1, 3)$.
(b) Mostre que em qualquer ponto da bola a direção de maior crescimento na temperatura é dada por um vetor que aponta para a origem.

32. A temperatura em um ponto (x, y, z) é dada por

$$T(x, y, z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$$

onde T é medido em ºC e x, y, z em metros.
(a) Determine a taxa de variação da temperatura no ponto $P(2, -1, 2)$ em direção ao ponto $(3, -3, 3)$.
(b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura em P?
(c) Encontre a taxa máxima de crescimento em P.

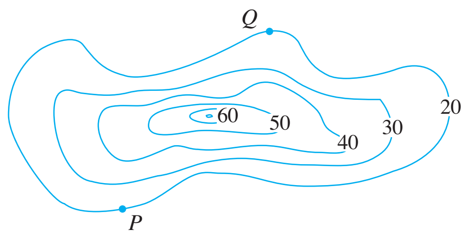
33. Suponha que em uma certa região do espaço o potencial elétrico V seja dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.
(a) Determine a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.
(b) Em que direção V varia mais rapidamente em P?
(c) Qual a taxa máxima de variação em P?

34. Suponha que você esteja subindo uma montanha cuja forma é dada pela equação $z = 1000 - 0{,}005x^2 - 0{,}01y^2$, onde x, y e z são medidos em metros e você está em um ponto com coordenadas $(60, 40, 966)$. O eixo x positivo aponta para leste e o eixo y positivo aponta para o norte.
(a) Se você andar exatamente para o Sul, começará a subir ou a descer? Com que taxa?
(b) Se você caminhar em direção ao Noroeste, começará a subir ou a descer? A que taxa?
(c) Em que direção a inclinação é maior? Qual é a taxa de elevação nessa direção? Qual é o ângulo que o início desse caminho faz em relação à horizontal?

35. Seja f uma função de duas variáveis que tenha derivadas parciais contínuas e considere os pontos $A(1, 3)$, $B(3, 3)$, $C(1, 7)$ e $D(6, 15)$. A derivada direcional em A na direção do vetor

$\overrightarrow{AB}$ é 3, e a derivada direcional em A na direção $\overrightarrow{AC}$ é 26. Determine a derivada direcional de f em A na direção do vetor $\overrightarrow{AD}$.

36. Para o mapa de contorno dado, desenhe as curvas de maior crescimento em P e em Q.

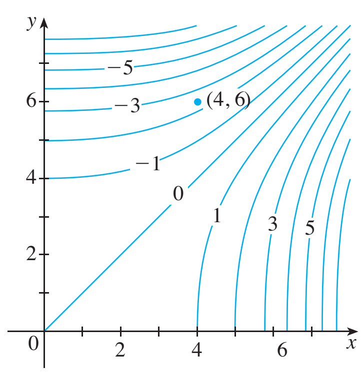


37. Mostre que a operação de calcular o gradiente de uma função tem a propriedade fornecida. Suponha que u e v sejam funções de x e y, diferenciáveis, e a e b sejam constantes.

(a) $\nabla(au + bv) = a\,\nabla u + b\,\nabla v$ (b) $\nabla(uv) = u\,\nabla v + v\,\nabla u$

(c) $\nabla\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\nabla u - u\,\nabla v}{v^2}$ (d) $\nabla u^n = nu^{n-1}\,\nabla u$

38. Esboce o vetor gradiente $\nabla f(4, 6)$ para a função f cujas curvas de nível são mostradas. Explique como você escolheu a direção e sentido e o comprimento desse vetor.



39-44 Determine equações (a) do plano tangente e (b) da reta normal a uma superfície dada no ponto especificado.

39. $2(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 10$, $(3, 3, 5)$

40. $y = x^2 - z^2$, $(4, 7, 3)$

41. $x^2 - 2y^2 + z^2 + yz = 2$, $(2, 1, -1)$

42. $x - z = 4\,\mathrm{arctg}(yz)$, $(1 + \pi, 1, 1)$

43. $z + 1 = xe^y \cos z$, $(1, 0, 0)$

44. $yz = \ln(x + z)$, $(0, 0, 1)$

45-46 Utilize um computador para traçar o gráfico da superfície, do plano tangente e da reta normal na mesma tela. Escolha o domínio com cuidado para evitar planos verticais estranhos. Escolha o ponto de vista de modo que você possa ver bem os três objetos.

45. $xy + yz + zx = 3$, $(1, 1, 1)$

46. $xyz = 6$, $(1, 2, 3)$

47. Se $f(x, y) = xy$, encontre o vetor gradiente $\nabla f(3, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $f(x, y) = 6$ no ponto $(3, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

48. Se $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4x$, encontre o vetor gradiente $\nabla g(1, 2)$ e use-o para encontrar a reta tangente à curva de nível $g(x, y) = 1$ no ponto $(1, 2)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

49. Mostre que a equação do plano tangente ao elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

50. Determine a equação do plano tangente ao hiperboloide $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 1$ em (x_0, y_0, z_0) e expresse-a de forma semelhante à do Exercício 49.

51. Mostre que a equação do plano tangente ao paraboloide elíptico $z/c = x^2/a^2 + y^2/b^2$ no ponto (x_0, y_0, z_0) pode ser escrita como

$$\frac{2xx_0}{a^2} + \frac{2yy_0}{b^2} = \frac{z + z_0}{c}$$

52. Em qual ponto do paraboloide $y = x^2 + z^2$ o plano tangente é paralelo ao plano $x + 2y + 3z = 1$?

53. Existem pontos no hiperboloide $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ nos quais o plano tangente é paralelo ao plano $z = x + y$?

54. Mostre que o elipsoide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$. (Isso significa que eles têm um plano tangente comum nesse ponto.)

55. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ passa pela origem.

56. Mostre que toda reta normal à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ passa pelo centro da esfera.

57. Mostre que a soma das intersecções com os eixos x, y e z de qualquer plano tangente à superfície $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ é uma constante.

58. Mostre que as pirâmides cortadas do primeiro octante por qualquer plano tangente à superfície $xyz = 1$ em pontos do primeiro octante têm todas o mesmo volume.

59. Determine as equações paramétricas da reta tangente à curva formada pela intersecção do paraboloide $z = x^2 + y^2$ com o elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

60. (a) O plano $y + z = 3$ intercepta o cilindro $x^2 + y^2 = 5$ em uma elipse. Determine as equações paramétricas da reta tangente a essa elipse no ponto $(1, 2, 1)$.

(b) Desenhe o cilindro, o plano e a reta tangente na mesma tela.

61. (a) Duas superfícies são ditas **ortogonais** em um ponto de intersecção se suas normais são perpendiculares nesse ponto. Mostre que superfícies com equação $F(x, y, z) = 0$ e $G(x, y, z) = 0$ são ortogonais em um ponto P onde $\nabla F \neq \mathbf{0}$ e $\nabla G \neq \mathbf{0}$ se e somente se, em P,

$$F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0.$$

(b) Use a parte (a) para mostrar que as superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ são ortogonais em todo ponto de intersecção. Você pode ver isso sem fazer os cálculos?

62. (a) Mostre que a função $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ é contínua e suas derivadas parciais f_x e f_y existem na origem, mas as derivadas direcionais em todas as outras direções não existem.

(b) Trace o gráfico de f perto da origem e comente como ele confirma a parte (a).

63. Suponha que as derivadas direcionais de $f(x, y)$ sejam conhecidas em um determinado ponto em duas direções não paralelas dadas por vetores unitários $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. É possível determinar ∇f nesse ponto? Em caso afirmativo, como fazê-lo?

64. Mostre que, se $z = f(x, y)$ for diferenciável em $\mathbf{x}_0 = \langle x_0, y_0 \rangle$, então

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} = 0$$

[*Sugestão*: Use a Definição 14.4.7 diretamente.]

14.7 VALORES MÁXIMO E MÍNIMO

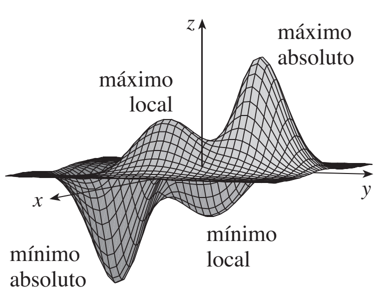


FIGURA 1

Como vimos no Capítulo 4, no Volume I, um dos principais usos da derivada ordinária é na determinação dos valores máximo e mínimo. Nesta seção veremos como usar as derivadas parciais para localizar os pontos de máximo e mínimo de uma função de duas variáveis. Em particular, no Exemplo 6 veremos como maximizar o volume de uma caixa sem tampa se tivermos uma quantidade limitada de cartolina para trabalhar.

Olhe os picos e vales no gráfico de f mostrado na Figura 1. Existem dois pontos (a, b) nos quais f tem um *máximo local*, ou seja, onde $f(a, b)$ é maior que os valores próximos de $f(x, y)$. O maior destes dois valores é o *máximo absoluto*. Do mesmo modo, f tem dois *mínimos locais* onde $f(a, b)$ é menor que os valores próximos. O menor destes dois valores é o *mínimo absoluto*.

1 DEFINIÇÃO Uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b). [Isso significa que $f(x, y) \leqslant f(a, b)$ para todo ponto (x, y) em alguma bola aberta com centro em (a, b).] O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**. Se $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b), então f tem um **mínimo local** em (a, b) e $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**.

Se as inequações da Definição 1 valerem para todos os pontos (x, y) do domínio de f, então f tem um **máximo absoluto** (ou **mínimo absoluto**) em (a, b).

■ Observe que a conclusão do Teorema 2 pode ser colocada em termos dos vetores gradientes como $\nabla f(a, b) = \mathbf{0}$.

2 TEOREMA Se uma função f tem um máximo ou mínimo local em (a, b) e as derivadas parciais de primeira ordem de f existem nesses pontos, então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO Seja $g(x) = f(x, b)$. Se f tem um máximo (ou mínimo) local em (a, b), então g tem um máximo (ou mínimo) local em a, de modo que $g'(a) = 0$ pelo Teorema de Fermat (veja o Teorema 4.1.4, no Volume I). Mas $g'(a) = f_x(a, b)$ (veja a Equação 14.3.1), e assim $f_x(a, b) = 0$. Da mesma forma, pela aplicação do Teorema de Fermat à função $G(y) = f(a, y)$, obtemos $f_y(a, b) = 0$. □

$$D_{\mathbf{u}}^2 f = D_{\mathbf{u}}(D_{\mathbf{u}} f) = \frac{\partial}{\partial x}(D_{\mathbf{u}} f)h + \frac{\partial}{\partial y}(D_{\mathbf{u}} f)k$$

$$= (f_{xx}h + f_{yx}k)h + (f_{xy}h + f_{yy}k)k$$

$$= f_{xx}h^2 + 2f_{xy}hk + f_{yy}k^2 \qquad \text{(pelo Teorema de Clairaut)}$$

Se completarmos os quadrados na expressão, obteremos

$$\boxed{10} \qquad D_{\mathbf{u}}^2 f = f_{xx}\left(h + \frac{f_{xy}}{f_{xx}}k\right)^2 + \frac{k^2}{f_{xx}}(f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)$$

Temos que $f_{xx}(a, b) > 0$ e $D(a, b) > 0$. Mas f_{xx} e $D = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ são funções contínuas, logo, existe uma bola aberta B com centro (a, b) e raio $\delta > 0$ tal que $f_{xx}(x, y) > 0$ e $D(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Portanto, olhando a Equação 10, vemos que $D_{\mathbf{u}}^2 f(x, y) > 0$ sempre que (x, y) pertencer a B. Isso implica que, se C é uma curva obtida pela intersecção do gráfico de f com o plano vertical que passa por $P(a, b, f(a, b))$ na direção de $\mathbf{u}$, então C tem concavidade para cima no intervalo de comprimento 2δ. Isso é verdadeiro na direção de todo vetor $\mathbf{u}$; portanto, se restringirmos (x, y) a B, o gráfico de f permanecerá acima do plano horizontal tangente a f em P. Logo, $f(x, y) \geqslant f(a, b)$ sempre que (x, y) estiver em B. Isso mostra que $f(a, b)$ é um mínimo local. □

14.7 EXERCÍCIOS

1. Suponha que (1, 1) seja um ponto crítico de uma função f com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre f?

(a) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $\quad f_{xy}(1, 1) = 1$, $\quad f_{yy}(1, 1) = 2$

(b) $f_{xx}(1, 1) = 4$, $\quad f_{xy}(1, 1) = 3$, $\quad f_{yy}(1, 1) = 2$

2. Suponha que (0, 2) seja um ponto crítico de uma função g com derivadas de segunda ordem contínuas. Em cada caso, o que se pode dizer sobre g?

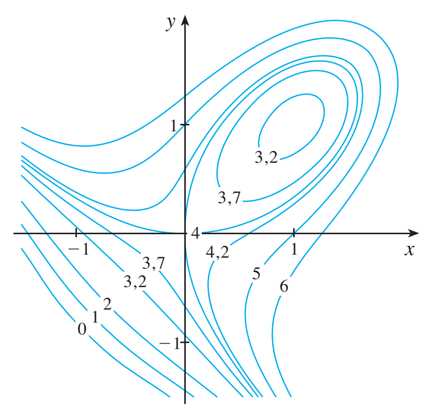
(a) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $\quad g_{xy}(0, 2) = 6$, $\quad g_{yy}(0, 2) = 1$

(b) $g_{xx}(0, 2) = -1$, $\quad g_{xy}(0, 2) = 2$, $\quad g_{yy}(0, 2) = -8$

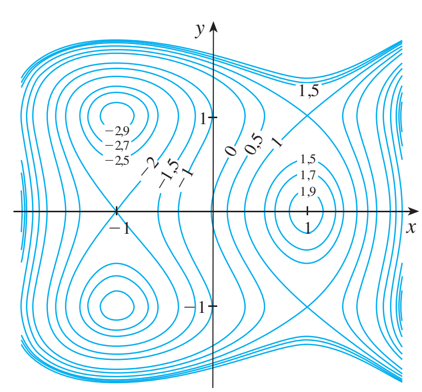
(c) $g_{xx}(0, 2) = 4$, $\quad g_{xy}(0, 2) = 6$, $\quad g_{yy}(0, 2) = 9$

3-4 Utilize as curvas de nível da figura para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada um desses pontos. Explique seu raciocínio. Em seguida, empregue o Teste da Segunda Derivada para confirmar suas predições.

3. $f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$



4. $f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



5-18 Determine os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Se você tiver um programa para traçar gráficos tridimensionais no computador, trace a função com um domínio e um ponto de vista que mostrem os seus aspectos importantes.

5. $f(x, y) = 9 - 2x + 4y - x^2 - 4y^2$

6. $f(x, y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

7. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$

8. $f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2}$

9. $f(x, y) = xy - 2x - y$

10. $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

11. $f(x, y) = x^3 - 12xy + 8y^3$

12. $f(x, y) = xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$

13. $f(x, y) = e^x \cos y$

14. $f(x, y) = y \cos x$

15. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{y^2-x^2}$

16. $f(x, y) = e^y(y^2 - x^2)$

17. $f(x, y) = y^2 - 2y \cos x, \quad -1 \leqslant x \leqslant 7$

18. $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi$

19. Mostre que $f(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4xy + 2$ tem um número infinito de pontos críticos e que $D = 0$ em cada um. A seguir, mostre que f tem um mínimo local (e absoluto) em cada ponto crítico.

20. Mostre que $f(x, y) = x^2ye^{-x^2-y^2}$ tem valores máximos em $(\pm 1, 1/\sqrt{2})$ e valores mínimos em $(\pm 1, -1/\sqrt{2})$. Mostre também que f tem infinitos outros pontos críticos e que $D = 0$ em cada um deles. Quais deles dão origem a valores máximos? E a valores mínimos? E a pontos de sela?

21-24 Utilize um gráfico e/ou curvas de nível para estimar os valores máximos e mínimos locais e pontos de sela da função. Em seguida, use o cálculo para achar esses valores precisamente.

21. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$

22. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

23. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi$

24. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x + y)$,
$0 \leqslant x \leqslant \pi/4, 0 \leqslant y \leqslant \pi/4$

25-28 Utilize uma ferramenta gráfica como no Exemplo 4 (ou o Método de Newton ou um determinador de raízes) para encontrar os pontos críticos de f com precisão de três casas decimais. Em seguida, classifique o ponto crítico e determine o valor mais alto e o mais baixo do gráfico.

25. $f(x, y) = x^4 - 5x^2 + y^2 + 3x + 2$

26. $f(x, y) = 5 - 10xy - 4x^2 + 3y - y^4$

27. $f(x, y) = 2x + 4x^2 - y^2 + 2xy^2 - x^4 - y^4$

28. $f(x, y) = e^x + y^4 - x^3 + 4 \cos y$

29-36 Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

29. $f(x, y) = 1 + 4x - 5y$, D é a região triangular fechada com vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, e $(0, 3)$

30. $f(x, y) = 3 + xy - x - 2y$, D é a região triangular fechada com vértices $(1, 0)$, $(5, 0)$, e $(1, 4)$

31. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$,
$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

32. $f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$

33. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$,
$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$

34. $f(x, y) = xy^2, \quad D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 3\}$

35. $f(x, y) = 2x^3 + y^4, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

36. $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 12y$, D é o quadrilátero cujos vértices são $(-2, 3)$, $(2, 3)$, $(2, 2)$, e $(-2, -2)$.

37. Para as funções de uma variável, é impossível uma função contínua ter dois pontos de máximo local e nenhum de mínimo local. Para as funções de duas variáveis, esse caso existe. Mostre que a função

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$$

só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local. Em seguida, utilize um computador para desenhar o gráfico com uma escolha cuidadosa de domínio e de ponto de vista para ver como isso é possível.

38. Se uma função de uma variável é contínua em um intervalo e tem um único ponto crítico, então um máximo local tem de ser um máximo absoluto. Mas isso não é verdadeiro para as funções de duas variáveis. Mostre que a função

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$$

tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo local, porém este não é um máximo absoluto. Em seguida, utilize um computador com uma escolha conveniente de domínio e ponto de vista para ver como isso é possível.

39. Determine a menor distância entre o ponto $(2, 1, -1)$ e o plano $x + y - z = 1$.

40. Determine o ponto do plano $x - y + z = 4$ que está mais próximo do ponto $(1, 2, 3)$.

41. Determine os pontos do cone $z^2 = x^2 + y^2$ que estão mais próximos do ponto $(4, 2, 0)$.

42. Determine os pontos da superfície $y^2 = 9 + xz$ que estão mais próximos da origem.

43. Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é máximo.

44. Encontre três números positivos cuja soma é 12 e cuja soma dos quadrados é a menor possível.

45. Encontre o volume máximo de uma caixa retangular que está inscrita em uma esfera de raio r.

46. Encontre as dimensões de uma caixa com volume de 1 000 cm^3 que tenha a área de sua superfície mínima.

47. Determine o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $x + 2y + 3z = 6$.

48. Determine as dimensões da caixa retangular de maior volume se a área total de sua superfície é dada por 64 cm^2.

49. Determine as dimensões de uma caixa retangular de volume máximo tal que a soma dos comprimentos de suas 12 arestas seja uma constante c.

50. A base de um aquário com volume V é feita de ardósia e os lados são de vidro. Se o preço da ardósia (por unidade de área) equivale a cinco vezes o preço do vidro, determine as dimensões do aquário para minimizar o custo do material.

51. Uma caixa de papelão sem tampa deve ter um volume de 32 000 cm^3. Determine as dimensões que minimizem a quantidade de papelão utilizado.

52. Um prédio retangular está sendo projetado para minimizar a perda de calor. As paredes leste e oeste perdem calor a uma taxa de 10 unidades/m^2 por dia, as paredes norte e sul, a uma taxa de 8 unidades/m^2 por dia, o piso, a uma taxa de 1 unidade/m^2 por dia e o teto, a uma taxa de 5 unidades/m^2 por dia. Cada parede deve ter pelo menos 30 m de comprimento, a altura deve ser no mínimo 4 m, e o volume, exatamente 4 000 m^3.

(a) Determine e esboce o domínio da perda de calor como uma função dos comprimentos dos lados.

(b) Encontre as dimensões que minimizam a perda de calor. (Analise tanto os pontos críticos como os pontos sobre a fronteira do domínio.)

(c) Você poderia projetar um prédio com precisamente menos perda de calor ainda se as restrições sobre os comprimentos das paredes fossem removidas?

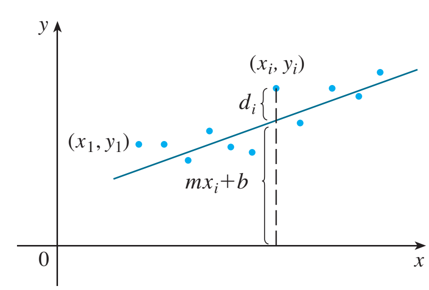
53. Se o comprimento da diagonal de uma caixa retangular deve ser L, qual é o maior volume possível?

54. Três alelos (versões alternativas de um gene) A, B e O determinam os quatro tipos de sangue: A (AA ou AO), B (BB ou BO), O (OO) e AB. A Lei de Hardy-Weinberg afirma que a proporção de indivíduos em uma população que carregam dois alelos diferentes é

$$P = 2pq + 2pr + 2rq$$

onde p, q e r são as proporções de A, B e O na população. Use o fato de que $p + q + r = 1$ para mostrar que P é no máximo $\frac{2}{3}$.

55. Suponha que um cientista tenha razões para acreditar que duas quantidades x e y estejam relacionadas linearmente, ou seja, $y = mx + b$, pelo menos aproximadamente, para algum valor de m e de b. O cientista realiza uma experiência e coleta os dados na forma de pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, e então coloca-os em um gráfico. Os pontos não estão todos alinhados, de modo que o cientista quer determinar as constantes m e b para que a reta $y = mx + b$ "ajuste" os pontos tanto quanto possível (veja a figura).



Seja $d_i = y_i - (mx_i + b)$ o desvio vertical do ponto (x_i, y_i) da reta. O **método dos mínimos quadrados** determina m e b de modo a minimizar $\sum_{i=1}^{n} d_i^2$, a soma dos quadrados dos desvios. Mostre que, de acordo com esse método, a reta de melhor ajuste é obtida quando

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Assim, a reta é determinada resolvendo esse sistema linear de duas equações nas incógnitas m e b. (Veja a Seção 1.2 do Volume I para mais aplicações do método dos mínimos quadrados.)

56. Determine uma equação do plano que passa pelo ponto (1, 2, 3) e que corta o menor volume do primeiro octante.

■ O cilindro $x^2 + y^2 = 1$ intercepta o plano $x - y + z = 1$ em uma elipse (Figura 6). O Exemplo 5 pergunta o valor máximo de f quando (x, y, z) pertence a essa elipse.

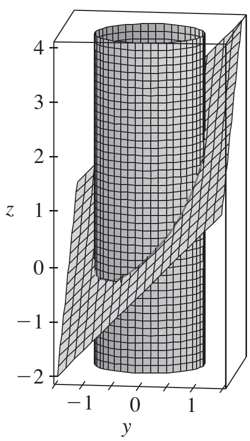


FIGURA 6

SOLUÇÃO Maximizamos a função $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ sujeita às restrições $g(x, y, z) = x - y + z = 1$ e $h(x, y, z) = x^2 + y^2 = 1$. A condição de Lagrange é $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$, de modo que devemos resolver as equações

$$1 = \lambda + 2x\mu \tag{17}$$

$$2 = -\lambda + 2y\mu \tag{18}$$

$$3 = \lambda \tag{19}$$

$$x - y + z = 1 \tag{20}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{21}$$

Substituindo $\lambda = 3$ [de (19)] em (17), obtemos $2x\mu = -2$, e então $x = -1/\mu$. Analogamente, (18) dá $y = 5/(2\mu)$. Substituindo em (21), temos

$$\frac{1}{\mu^2} + \frac{25}{4\mu^2} = 1$$

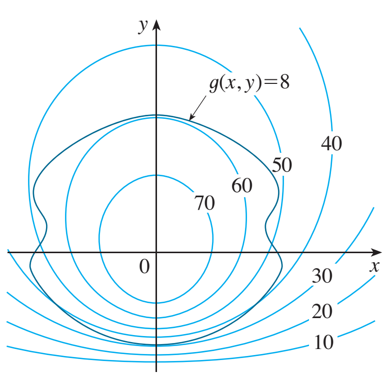
e assim $\mu^2 = \frac{29}{4}$, $\mu = \pm\sqrt{29}/2$. Então $x = \mp 2/\sqrt{29}$, $y = \pm 5/\sqrt{29}$ e, de (20), $z = 1 - x + y = 1 \pm 7/\sqrt{29}$. Os valores correspondentes de f são

$$\pm\frac{2}{\sqrt{29}} + 2\left(\pm\frac{5}{\sqrt{29}}\right) + 3\left(1 \pm \frac{7}{\sqrt{29}}\right) = 3 \pm \sqrt{29}$$

Portanto, o valor máximo de f na curva dada é $3 + \sqrt{29}$. □

14.8 EXERCÍCIOS

1. Na figura estão um mapa de contorno de f e a curva de equação $g(x, y) = 8$. Estime os valores máximo e mínimo de f sujeita à restrição $g(x, y) = 8$. Explique suas razões.



2. (a) Use uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o círculo $x^2 + y^2 = 1$. Na mesma tela, trace diversas curvas da forma $x^2 + y = c$ até que você encontre duas que apenas toquem o círculo. Qual o significado dos valores de c dessas duas curvas?

(b) Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores extremos de $f(x, y) = x^2 + y$ sujeita à restrição $x^2 + y^2 = 1$. Compare sua resposta com a da parte (a).

3-17 Utilize os multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função sujeita à(s) restrição(ões) dada(s).

3. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $xy = 1$

4. $f(x, y) = 4x + 6y$; $x^2 + y^2 = 13$

5. $f(x, y) = x^2y$; $x^2 + 2y^2 = 6$

6. $f(x, y) = e^{xy}$; $x^3 + y^3 = 16$

7. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$; $x^2 + y^2 + z^2 = 35$

8. $f(x, y, z) = 8x - 4z$; $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$

9. $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$

10. $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

11. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; $x^4 + y^4 + z^4 = 1$

12. $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

13. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$; $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

14. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$; $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$

15. $f(x, y, z) = x + 2y$; $x + y + z = 1$, $y^2 + z^2 = 4$

16. $f(x, y, z) = 3x - y - 3z$; $x + y - z = 0$, $x^2 + 2z^2 = 1$

17. $f(x, y, z) = yz + xy$; $xy = 1$, $y^2 + z^2 = 1$

18-19 Determine os valores extremos de f na região descrita pela desigualdade.

18. $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 4x - 5, \quad x^2 + y^2 \leqslant 16$

19. $f(x, y) = e^{-xy}, \quad x^2 + 4y^2 \leqslant 1$

20. Considere o problema de maximizar a função $f(x, y) = 2x + 3y$ sujeita à restrição $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$.
(a) Tente utilizar multiplicadores de Lagrange para resolver o problema.
(b) $f(25, 0)$ dá um valor maior que o obtido na parte (a)?
(c) Resolva o problema traçando a equação da restrição e diversas curvas de nível de f.
(d) Explique por que o método dos multiplicadores de Lagrange falha em resolver o problema.
(e) Qual é o significado de $f(9, 4)$?

21. Considere o problema de minimizar a função $f(x, y) = x$ na curva $y^2 + x^4 - x^3 = 0$ (uma piriforme).
(a) Tente usar multiplicadores de Lagrange para resolver este problema.
(b) Mostre que o valor mínimo é $f(0, 0) = 0$, mas que a condição $\nabla f(0, 0) = \lambda \nabla g(0, 0)$ não é satisfeita para nenhum valor de λ.
(c) Explique por que os multiplicadores de Lagrange falham em encontrar o mínimo neste caso.

SCA **22.** (a) Se seu sistema de computação algébrica traça o gráfico de curvas definidas implicitamente, use-o para estimar os valores mínimo e máximo de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ sujeita a $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ por métodos gráficos.
(b) Resolva o problema da parte (a) com o auxílio dos multiplicadores de Lagrange. Use um SCA para resolver as equações numericamente. Compare sua resposta com a da parte (a).

23. A produção total P de certo produto depende da quantidade L de trabalho empregado e da quantidade K de capital investido. Nas Seções 14.1 e 14.3 discutimos como o modelo Cobb-Douglas $P = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$ seguida de certas hipóteses econômicas, onde b e α são constantes positivas e $\alpha < 1$. Se o custo por unidade de trabalho for m e o custo por unidade de capital for n, e uma companhia puder gastar somente uma quantidade p de dinheiro como despesa total, então a maximização da produção P estará sujeita à restrição $mL + nK = p$. Mostre que a produção máxima ocorre quando

$$L = \frac{\alpha p}{m} \qquad \text{e} \qquad K = \frac{(1 - \alpha)p}{n}$$

24. Em relação ao Problema 23, suponha agora que a produção seja fixada em $bL^{\alpha}K^{1-\alpha} = Q$, onde Q é uma constante. Quais valores de L e K minimizam a função custo $C(L, K) = mL + nK$?

25. Utilize os multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o retângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é um quadrado.

26. Use multiplicadores de Lagrange para demonstrar que o triângulo com área máxima, e que tem um perímetro constante p, é equilátero. [*Sugestão*: Utilize a fórmula de Heron para a área:

$$A = \sqrt{s(s - x)(s - y)(s - z)}$$

onde $s = p/2$ e x, y, z são os comprimentos dos lados.]

27-39 Utilize os multiplicadores de Lagrange para dar uma solução alternativa aos exercícios da Seção 14.7 indicados.

27. Exercício 39
28. Exercício 40
29. Exercício 41
30. Exercício 42
31. Exercício 43
32. Exercício 44
33. Exercício 45
34. Exercício 46
35. Exercício 47
36. Exercício 48
37. Exercício 49
38. Exercício 50
39. Exercício 53

40. Determine os volumes máximo e mínimo da caixa retangular cuja superfície tem 1 500 cm^2 e cuja soma dos comprimentos das arestas é 200 cm.

41. O plano $x + y + 2z = 2$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$ em uma elipse. Determine os pontos dessa elipse que estão mais próximo e mais longe da origem.

42. O plano $4x - 3y + 8z = 5$ intercepta o cone $z^2 = x^2 + y^2$ em uma elipse.
(a) Faça os gráficos do cone, do plano e da elipse.
(b) Use os multiplicadores de Lagrange para achar os pontos mais alto e mais baixo da elipse.

SCA **43-44** Ache os valores de máximo e mínimo da função f sujeita às restrições dadas. Utilize um sistema de computação algébrica para resolver o sistema de equações proveniente do uso dos multiplicadores de Lagrange. (Se seu SCA achar somente uma solução, você pode precisar do uso de comandos adicionais.)

43. $f(x, y, z) = ye^{x-z}; \quad 9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36, \quad xy + yz = 1$

44. $f(x, y, z) = x + y + z; \quad x^2 - y^2 = z, \quad x^2 + z^2 = 4$

45. (a) Determine o valor máximo de

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

dado que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos e $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = c$, onde c é uma constante.
(b) Deduza da parte (a) que, se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos, então

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Essa desigualdade diz que a média geométrica de n números não pode ser maior que a média aritmética deles. Sob que circunstâncias as duas médias são iguais?

46. (a) Maximize $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ sujeita às restrições $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ e $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$.

(b) Tome

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt{\sum a_j^2}} \qquad \text{e} \qquad y_i = \frac{b_i}{\sqrt{\sum b_j^2}}$$

e mostre que

$$\sum a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum a_j^2}\sqrt{\sum b_j^2}$$

para quaisquer números $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Essa desigualdade é conhecida como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

PROJETO APLICADO

CIÊNCIA DOS FOGUETES

Muitos foguetes, tais como o *Pegasus XL*, usado atualmente para o lançamento de satélites, e o *Saturno V*, que colocou o primeiro homem na Lua, são projetados para usar três estágios em sua subida para o espaço. O primeiro e maior estágio impulsiona o foguete até que seu combustível seja consumido, quando esse estágio é ejetado para diminuir a massa do foguete. O segundo e terceiro estágios, que são menores, funcionam da mesma forma, colocando a carga do foguete em órbita em torno da Terra. (Com esse projeto são necessários pelo menos dois estágios para que o foguete atinja a velocidade necessária, e o uso de três estágios provou oferecer boa relação entre custo e desempenho.) Nosso objetivo aqui é determinar as massas individuais dos três estágios, que foram projetados de forma a minimizar a massa total do foguete e ao mesmo tempo permitir que ele atinja a velocidade desejada.

Para um foguete com um único estágio consumindo combustível a uma taxa constante, a variação na velocidade resultante da aceleração do foguete foi modelada por

$$\Delta V = -c \ln\left(1 - \frac{(1-S)M_r}{P + M_r}\right)$$

onde M_r é a massa do propulsor do foguete, incluindo o combustível inicial, P é a massa da carga, S é o *fator estrutural* determinado pelo projeto do foguete (especificamente, é a razão entre a massa do foguete sem combustível e sem carga e a massa do foguete com carga e combustível) e c é a velocidade (constante) de exaustão relativa do foguete.

Considere agora um foguete de três estágios e carga de massa A. Vamos supor que as forças externas sejam desprezíveis e que c e S permaneçam constantes em cada estágio. Se M_i é a massa do i-ésimo estágio, podemos inicialmente considerar que o propulsor do foguete tenha massa M_1 e sua carga tenha massa $M_2 + M_3 + A$; o segundo e terceiro estágios podem ser tratados da mesma forma.

1. Mostre que a velocidade atingida depois que os três estágios são ejetados é dada por

$$v_f = c\left[\ln\left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{SM_1 + M_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_2 + M_3 + A}{SM_2 + M_3 + A}\right) + \ln\left(\frac{M_3 + A}{SM_3 + A}\right)\right]$$

2. Desejamos minimizar a massa total $M = M_1 + M_2 + M_3$ do propulsor do foguete sujeita à restrição que a velocidade desejada v_f do Problema 1 seja atingida. O método dos multiplicadores de Lagrange é apropriado, mas é difícil implementá-lo usando as expressões de que dispomos até aqui. Para simplificar, definimos variáveis N_i de modo que a restrição possa ser expressa como $v_f = c(\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3)$. Como é difícil exprimir M em termos dos N_i, é desejável usar uma função mais simples, que ao ser minimizada leve também à minimização de M. Mostre que

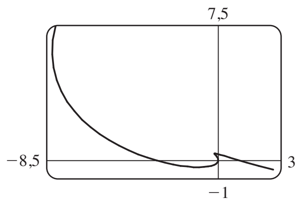
$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + A}{M_2 + M_3 + A} = \frac{(1-S)N_1}{1 - SN_1}$$

$$\frac{M_2 + M_3 + A}{M_3 + A} = \frac{(1-S)N_2}{1 - SN_2}$$

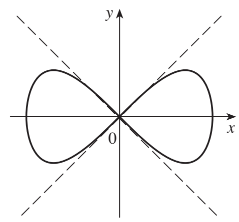
19. Horizontal em $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$ (quatro pontos), vertical em $(\pm 2, 0)$

21. $(0{,}6, 2)$; $(5 \cdot 6^{-6/5}, e^{6^{-1/5}})$

23.



25. $y = x$, $y = -x$



27. (a) $d \operatorname{sen} \theta/(r - d \cos \theta)$ **29.** $\left(\frac{16}{27}, \frac{29}{9}\right)$, $(-2, -4)$

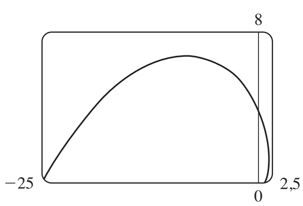
31. πab **33.** $3 - e$ **35.** $2\pi r^2 + \pi d^2$

37. $\int_1^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \approx 3{,}1678$

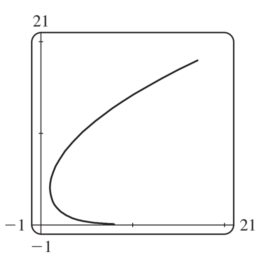
39. $\int_1^{2\pi} \sqrt{3 - 2 \operatorname{sen} t - 2 \cos t}\, dt \approx 10{,}0367$ **41.** $4\sqrt{2} - 2$

43. $-\sqrt{10}/3 + \ln(3 + \sqrt{10}) + \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$

45. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$

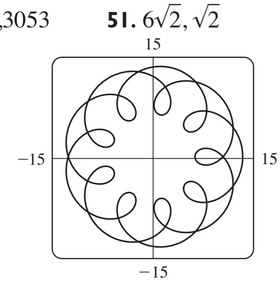


47. $e^3 + 11 - e^{-8}$



49. 612,3053 **51.** $6\sqrt{2}, \sqrt{2}$

55. (a)



$t \in [0, 4\pi]$

(b) ≈ 294

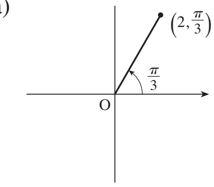
57. $\int_0^1 2\pi(t^2 + 1)e^t \sqrt{e^{2t}(t + 1)^2(t^2 + 2t + 2)}\, dt \approx 103{,}5999$

59. $\frac{2}{1215}\pi(247\sqrt{13} + 64)$ **61.** $\frac{6}{5}\pi a^2$ **63.** 59,101

65. $\frac{24}{5}\pi(949\sqrt{26} + 1)$ **71.** $\frac{1}{4}$

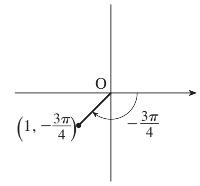
EXERCÍCIOS 10.3 ■ PÁGINA 614

1. (a)



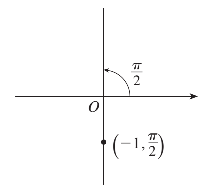
$(2, 7\pi/3)$, $(-2, 4\pi/3)$

(b)



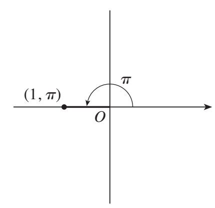
$(1, 5\pi/4)$, $(-1, \pi/4)$

(c)



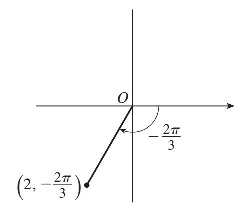
$(1, 3\pi/2)$, $(-1, 5\pi/2)$

3. (a)



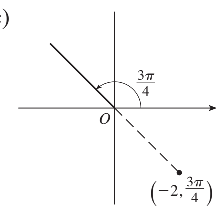
$(-1, 0)$

(b)



$(-1, \sqrt{3})$

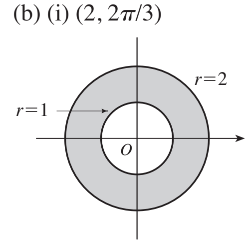
(c)



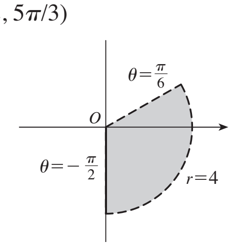
$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

5. (a) (i) $(2\sqrt{2}, 7\pi/4)$ (ii) $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$
(b) (i) $(2, 2\pi/3)$ (ii) $(-2, 5\pi/3)$

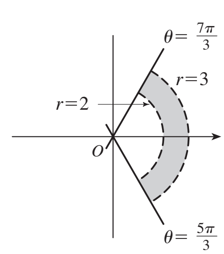
7.



9.



11.



13. $2\sqrt{3}$ **15.** Círculo, centro O, raio 2

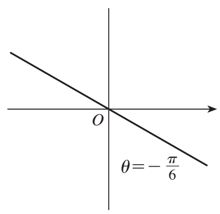
17. Círculo, centro $(0, \frac{3}{2})$, raio $\frac{3}{2}$

19. Reta horizontal, 1 unidade acima do eixo x

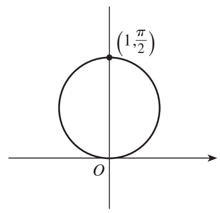
21. $r \operatorname{sen} \theta = 5$ **23.** $r = -\operatorname{cotg} \theta \operatorname{cossec} \theta$ **25.** $r = 2c \cos \theta$

27. (a) $\theta = \pi/6$ (b) $x = 3$

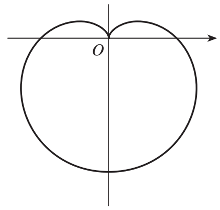
29.



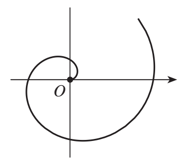
31.



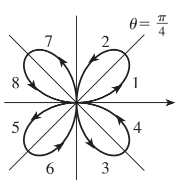
33.



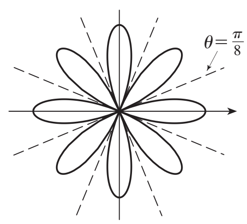
35.



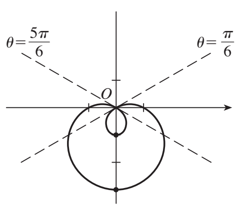
37.



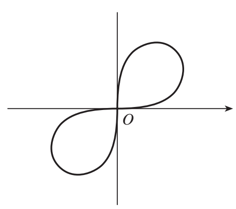
39.



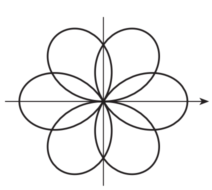
41.



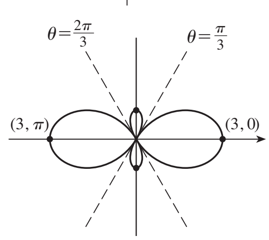
43.



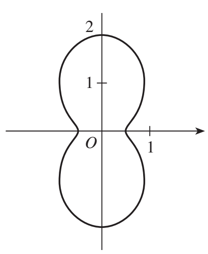
45.



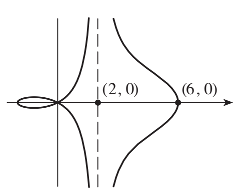
47.



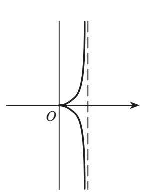
49.



51.



53.



55. (a) Para $c < -1$, o laço interno começa em $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ e termina em $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$; para $c > 1$, ele começa em $\theta = \pi + \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ e termina em $\theta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$

57. $\sqrt{3}$ **59.** $-\pi$ **61.** 1

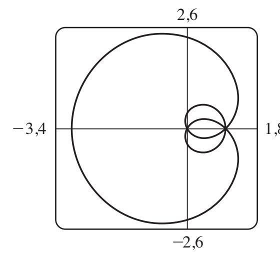
63. Horizontal em $(3/\sqrt{2}, \pi/4), (-3/\sqrt{2}, 3\pi/4)$; vertical em $(3, 0)$, $(0, \pi/2)$

65. Horizontal em $\left(\frac{3}{2}, \pi/3\right)$, $(0, \pi)$ [o polo], e $\left(\frac{3}{2}, 5\pi/3\right)$; vertical em $(2, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 4\pi/3\right)$

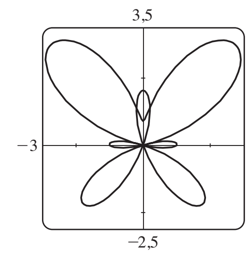
67. Horizontal em $(3, \pi/2)$, $(1, 3\pi/2)$; vertical em $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \alpha\right)$, $\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi - \alpha\right)$ onde $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

69. Centro $(b/2, a/2)$, raio $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

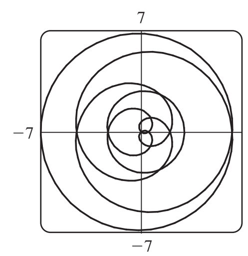
71.



73.



75.



77. Por rotação anti-horária de um ângulo $\pi/6$, $\pi/3$, ou α em torno da origem.

79. (a) Uma rosácea com n laços se n for ímpar e $2n$ laços se n for par

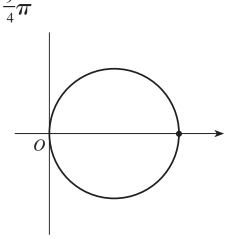
(b) O número de laços é sempre $2n$

81. Para $0 < a < 1$, a curva é oval e ela desenvolve uma covinha quando $a \to 1^-$. Quando $a > 1$, a curva se divide em duas partes, uma das quais tem um laço.

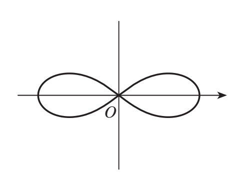
EXERCÍCIOS 10.4 ■ PÁGINA 620

1. $\pi^5/10\,240$ **3.** $\pi/12 + \frac{1}{8}\sqrt{3}$ **5.** $\pi^3/6$ **7.** $\frac{41}{4}$

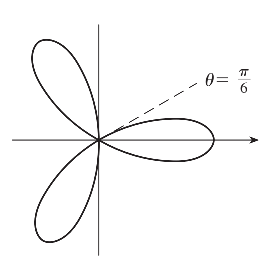
9. $\frac{9}{4}\pi$



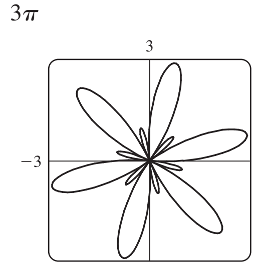
11. 4



13. π



15. 3π



17. $\frac{1}{8}\pi$ **19.** $\frac{9}{20}\pi$ **21.** $\pi - \frac{3}{2}\sqrt{3}$ **23.** $\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

25. $(4\pi/3) + 2\sqrt{3}$ **27.** π **29.** $\frac{5}{24}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

31. $\frac{1}{2}\pi - 1$ **33.** $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$ **35.** $\frac{1}{4}(\pi + 3\sqrt{3})$

37. $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right), \left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right)$, e o polo

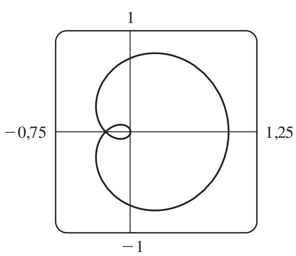
39. $(1, \theta)$ onde $\theta = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12, 17\pi/12$ e $(-1, \theta)$ onde $\theta = 7\pi/12, 11\pi/12, 19\pi/12, 23\pi/12$

41. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi/3\right)$, e o polo

43. Intersecção em $\theta \approx 0{,}89, 2{,}25$; área $\approx 3{,}46$ **45.** π

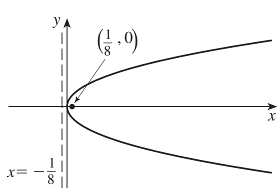
47. $\frac{8}{3}[(\pi^2 + 1)^{3/2} - 1]$ **49.** 29,0653 **51.** 9,6884

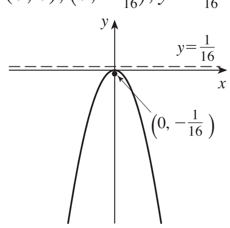
53. $\frac{16}{3}$ **55.** (b) $2\pi(2 - \sqrt{2})$



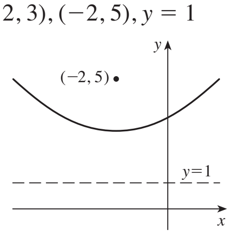
EXERCÍCIOS 10.5 ■ PÁGINA 626

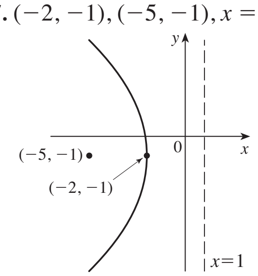
1. $(0, 0), \left(\frac{1}{8}, 0\right), x = -\frac{1}{8}$ **3.** $(0, 0), \left(0, -\frac{1}{16}\right), y = \frac{1}{16}$





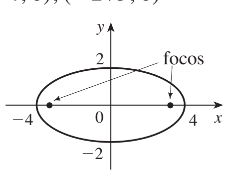
5. $(-2, 3), (-2, 5), y = 1$ **7.** $(-2, -1), (-5, -1), x = 1$

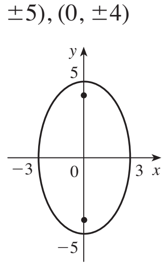




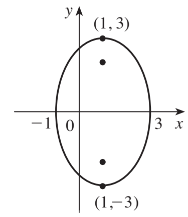
9. $x = -y^2$, foco $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$, diretriz $x = \frac{1}{4}$

11. $(\pm 4, 0), (\pm 2\sqrt{3}, 0)$ **13.** $(0, \pm 5), (0, \pm 4)$

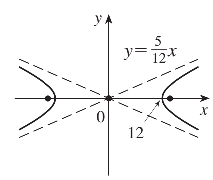


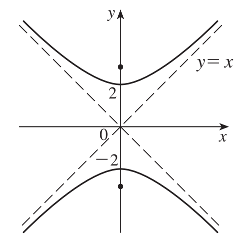


15. $(1, \pm 3), (1, \pm\sqrt{5})$ **17.** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ 1, focos $(0, \pm\sqrt{5})$

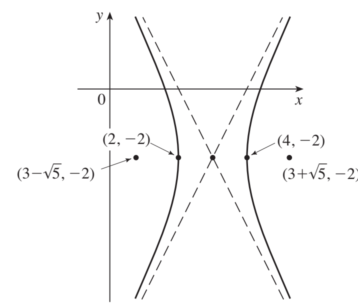


19. $(\pm 12, 0), (\pm 13, 0)$, $y = \pm\frac{5}{12}x$ **21.** $(0, \pm 2), (0, \pm 2\sqrt{2})$, $y = \pm x$





23. $(4, -2), (2, -2)$; $(3 \pm \sqrt{5}, -2)$; $y + 2 = \pm 2(x - 3)$



25. Parábola, $(0, -1)$, $(0, -4^3)$

27. Elipse, $(\pm\sqrt{2}, 1), (\pm 1, 1)$

29. Hipérbole, $(0, 1), (0, -3)$; $(0, -1 \pm \sqrt{5})$ **31.** $x^2 = -8y$

33 $y^2 = -12(x + 1)$ **35.** $y^2 = 16x$

37. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$ **39.** $\frac{x^2}{12} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$

41. $\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ **43.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

45. $\frac{(y-1)^2}{25} - \frac{(x+3)^2}{39} = 1$ **47.** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$

49. $\frac{x^2}{3\,763\,600} + \frac{y^2}{3\,753\,196} = 1$

51. (a) $\frac{x^2}{32\,400} - \frac{y^2}{57\,600} = 1$ (b) ≈ 320 km

55. (a) Elipse (b) Hipérbole (c) Nenhuma curva

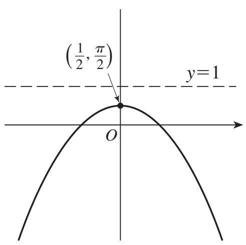
59. 9,69 **61.** $\dfrac{b^2c}{a} + ab\ln\left(\dfrac{a}{b+c}\right)$ onde $c^2 = a^2 + b^2$

EXERCÍCIOS 10.6 ■ PÁGINA 634

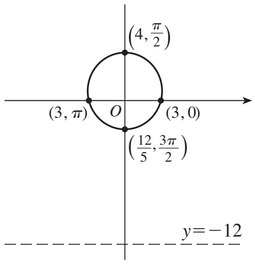
1. $r = \dfrac{42}{4 + 7\text{sen}\,\theta}$ **3.** $r = \dfrac{15}{4 - 3\cos\theta}$

5. $r = \dfrac{8}{1 - \text{sen}\,\theta}$ **7.** $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

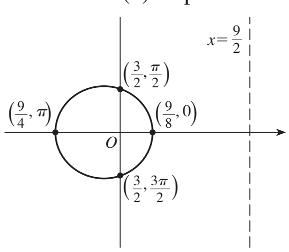
9. (a) 1 (b) Parábola (c) $y = 1$
(d) (g) $\frac{3}{2}$



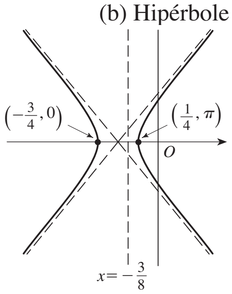
11. (a) $\frac{1}{4}$ (b) Elipse (c) $y = -12$
(d)



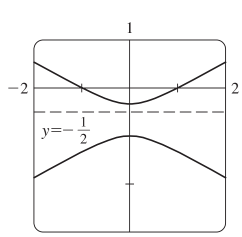
13. (a) $\frac{1}{3}$ (b) Elipse (c) $x = \frac{9}{2}$
(d)



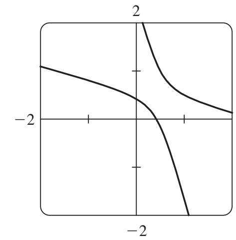
15. (a) 2 (b) Hipérbole (c) $x = -\frac{3}{8}$
(d)



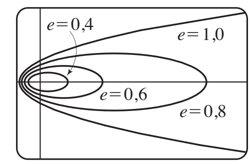
17. (a) $2,\ y = -\frac{1}{2}$



(b) $r = \dfrac{1}{1 - 2\,\text{sen}(\theta - 3\pi/4)}$



19. A elipse é quase circular quando e está próximo de 0 e se torna mais alongada quando $e \to 1^-$. Em $e = 1$, a curva se torna uma parábola.



25. $r = \dfrac{2{,}26 \times 10^8}{1 + 0{,}093\cos\theta}$

27. 35,64 AU **29.** $7{,}0 \times 10^7$ km **31.** $3{,}6 \times 10^8$ km

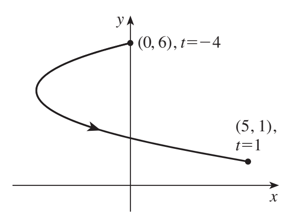
CAPÍTULO 10 REVISÃO ■ PÁGINA 635

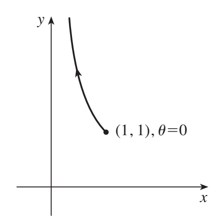
Testes Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Falso **5.** Verdadeiro **7.** Falso **9.** Verdadeiro

Exercícios

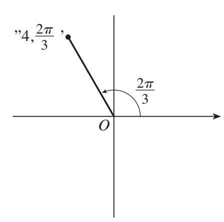
1. $x = y^2 - 8y + 12$ **3.** $y = 1/x$





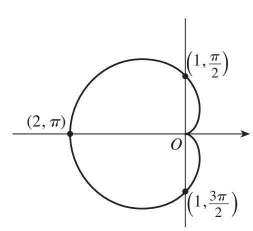
5. $x = t,\ y = \sqrt{t};\ x = t^4,\ y = t^2;$
$x = \text{tg}^2\,t,\ y = \text{tg}\,t,\ 0 \leqslant t < \pi/2$

7. (a) (b) $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$, $(-3\sqrt{2}, 7\pi/4)$

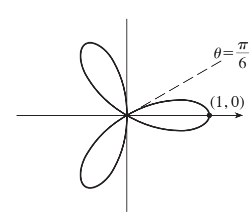


$(-2, 2\sqrt{3})$

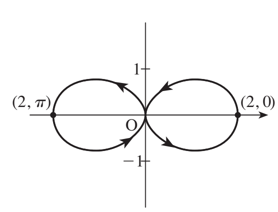
9.



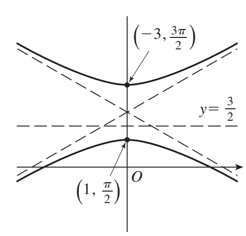
11.



13.

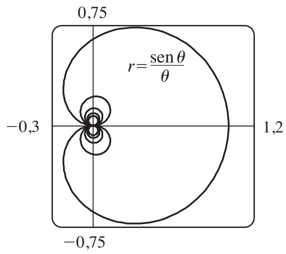


15.



17. $r = \dfrac{2}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

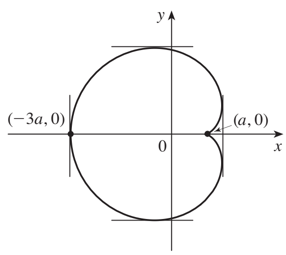
19.



21. 2 **23.** -1

25. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} t}{1 + \cos t}, \dfrac{1 + \cos t + \operatorname{sen} t}{(1 + \cos t)^3}$ **27.** $\left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}\right)$

29. Tangente vertical em $\left(\frac{3}{2}a, \pm\frac{1}{2}\sqrt{3}\,a\right), (-3a, 0)$; tangente horizontal em $(a, 0), \left(-\frac{1}{2}a, \frac{3}{2}\sqrt{3}\,a\right)$



31. 18 **33.** $(2, \pm\pi/3)$ **35.** $\frac{1}{2}(\pi - 1)$

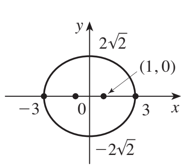
37. $2(5\sqrt{5} - 1)$

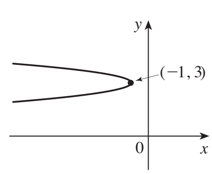
39. $\dfrac{2\sqrt{\pi^2 + 1} - \sqrt{4\pi^2 + 1}}{2\pi} + \ln\left(\dfrac{2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}}{\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}}\right)$

41. $471\,295\pi/1\,024$

43. Todas as curvas têm a assíntota vertical $x = 1$. Para $c < -1$, a curva se curva para a direita. Em $c = -1$, a curva é a reta $x = 1$. Para $-1 < c < 0$, ela se curva para a esquerda. Em $c = 0$ há uma cúspide em $(0, 0)$. Para $c > 0$, existe um laço.

45. $(\pm 1, 0), (\pm 3, 0)$ **47.** $\left(-\frac{25}{24}, 3\right), (-1, 3)$





49. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **51.** $\dfrac{y^2}{72/5} - \dfrac{x^2}{8/5} = 1$

53. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{(8y - 399)^2}{160\,801} = 1$ **55.** $r = \dfrac{4}{3 + \cos\theta}$

57. $x = a(\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta), y = a(1 + \operatorname{sen}^2\theta)$

PROBLEMAS QUENTES ▪ PÁGINA 638

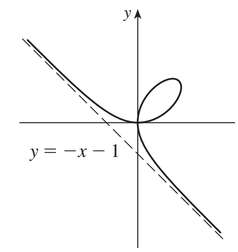
1. $\ln(\pi/2)$

3. $\left[-\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right] \times [-1, 2]$

5. (a) Em $(0, 0)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$

(b) Tangentes horizontais em $(0, 0)$ e $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$; tangentes verticais em $(0, 0)$ e $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$

(d)



(g) $\frac{3}{2}$

CAPÍTULO 11

EXERCÍCIOS 11.1 ▪ PÁGINA 649

Abreviações: C, convergente; D, divergente

1. (a) Uma sequência é uma lista ordenada de números. Ela também pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.

(b) Os termos a_n tendem a 8 quando n se torna grande.

(c) Os termos a_n se tornam grandes quando n se torna grande.

3. 0,8, 0,96, 0,992, 0,9984, 0,99968 **5.** $-3, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{40}$

7. 3, 5, 9, 17, 33 **9.** $a_n = 1/2^n$ **11.** $a_n = 5n - 3$

13. $a_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ **15.** $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{4}{9}, \frac{5}{11}, \frac{6}{13}$; yes; $\frac{1}{2}$

17. 1 **19.** 5 **21.** 1 **23.** 1 **25.** 0 **27.** D

29. 0 **31.** 0 **33.** 0 **35.** 0 **37.** 1 **39.** e^2

41. ln 2 **43.** D **45.** D **47.** 1 **49.** $\frac{1}{2}$

51. D **53.** 0

55. (a) 1 060, 1 123,60, 1 191,02, 126 248, 1 338,23 (b) D

57. $-1 < r < 1$

59. Convergente pelo Teorema da Sequência Monótona; $5 \leqslant L < 8$

61. Decrescente; sim **63.** Não monótona; não

65. Decrescente; sim **67.** 2 **69.** $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$

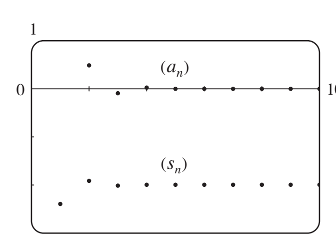
71. (b) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ **73.** (a) 0 (b) 9, 11

EXERCÍCIOS 11.2 ▪ PÁGINA 658

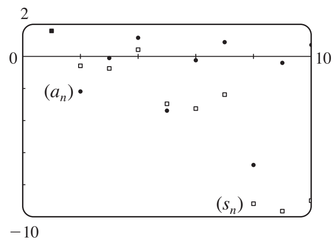
1. (a) Uma sequência é uma lista ordenada de números enquanto uma série é a *soma* de uma lista de números.

(b) Uma série é convergente se a sequência das somas parciais for uma sequência convergente. A série é divergente se ela não for convergente.

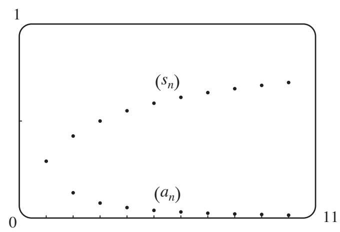
3. $-2{,}40000, -1{,}92000, -2{,}01600, -1{,}99680, -2{,}00064, -1{,}99987, -2{,}00003, -1{,}99999, -2{,}00000, -2{,}00000$; convergente, soma $= 2$



5. 1,55741, −0,62763, −0,77018, 0,38764, −2,99287, −3,28388, −2,41243, −9,21214, −9,66446, −9,01610; divergente



7. 0,29289, 0,42265, 0,50000, 0,55279, 0,59175, 0,62204, 0,64645, 0,66667, 0,68377, 0,69849; convergente, soma = 1



9. (a)C (b)D **11.** 9 **13.** D **15.** 60 **17.** $\frac{1}{7}$

19. D **21.** D **23.** D **25.** $\frac{3}{2}$ **27.** D **29.** D

31. D **33.** $e/(e-1)$ **35.** $\frac{3}{2}$ **37.** $\frac{11}{6}$ **39.** $e - 1$

41. $\frac{2}{9}$ **43.** 1 138/333 **45.** 41 111/333 000

47. $-3 < x < 3$; $\dfrac{x}{3-x}$ **49.** $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$; $\dfrac{1}{1-4x}$

51. Todo x; $\dfrac{2}{2-\cos x}$ **53.** 1

55. $a_1 = 0$, $a_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$ para $n > 1$, soma = 1

57. (a) $S_n = \dfrac{D(1-c^n)}{1-c}$ (b) 5 **59.** $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

63. $\dfrac{1}{n(n+1)}$ **65.** A série é divergente.

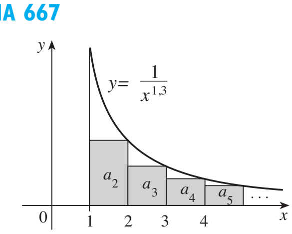
71. $\{s_n\}$ é limitada e crescente.

73. (a) $0, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, 1$

75. (a) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{23}{24}, \frac{119}{120}$; $\dfrac{(n+1)!-1}{(n+1)!}$ (c) 1

EXERCÍCIOS 11.3 ■ PÁGINA 667

1. C



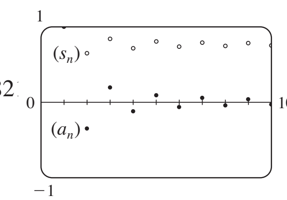
3. C **5.** C **7.** C **9.** D **11.** C **13.** D **15.** C
17. C **19.** C **21.** D **23.** C **25.** C **27.** $p > 1$
29. $p < -1$ **31.** $(1, \infty)$
33. (a) 1,54977, erro $\leqslant$ 0,1 (b) 1,64522, erro < 0,005
(c) $n > 1\,000$ **35.** 0,00145 **41.** $b < 1/e$

EXERCÍCIOS 11.4 ■ PÁGINA 672

1. (a) Nada (b) C **3.** C **5.** D **7.** C **9.** C
11. C **13.** C **15.** C **17.** D **19.** D **21.** C
23. C **25.** D **27.** C **29.** C **31.** D
33. 1,249, erro < 0,1 **35.** 0,76352, erro < 0,001
45. Sim

EXERCÍCIOS 11.5 ■ PÁGINA 677

1. (a) Uma série cujos termos são alternadamente positivos e negativos (b) $0 < b_{n+1} \leqslant b_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, onde $b_n = |a_n|$
(c) $|R_n| \leqslant b_{n+1}$
3. C **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** D
15. C **17.** C **19.** D
21. 1,0000, 0,6464, 0,8389, 0,7139, 0,8033, 0,7353, 0,7893, 0,7451, 0,782 0,7505; erro < 0,0275



23. 5 **25.** 4 **27.** 0,9721 **29.** 0,0676
31. Uma subestimativa **33.** p não é um inteiro negativo
35. $\{b_n\}$ não é decrescente

EXERCÍCIOS 11.6 ■ PÁGINA 683

Abreviações: AC, absolutamente convergente; CC, condicionalmente convergente

1. (a) D (b) C (c) Pode convergir ou divergir

3. AC **5.** CC **7.** AC **9.** D **11.** AC **13.** AC

15. AC **17.** CC **19.** AC **21.** AC **23.** D

25. AC **27.** D **29.** D **31.** (a) e (d)

35. (a) $\frac{661}{960} \approx 0{,}68854$, erro < 0,00521
(b) $n \geqslant 11$, 0,693109

EXERCÍCIOS 11.7 ■ PÁGINA 686

1. C **3.** D **5.** C **7.** D **9.** C **11.** C **13.** C
15. C **17.** D **19.** C **21.** C **23.** D **25.** C
27. C **29.** C **31.** D **33.** C **35.** C **37.** C

EXERCÍCIOS 11.8 ■ PÁGINA 691

1. Uma série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, onde x é uma variável e a e c_n são constantes

3. 1, $[-1, 1]$ **5.** 1, $[-1, 1)$ **7.** ∞, $(-\infty, \infty)$

9. $\frac{1}{4}$, $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ **11.** $\frac{1}{2}$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ **13.** 4, $(-4, 4]$

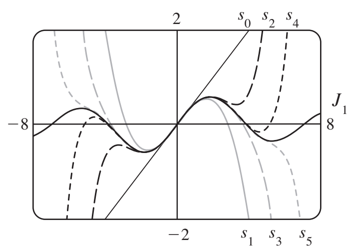
15. 1, $[1, 3]$ **17.** $\frac{1}{3}$, $[-\frac{13}{3}, -\frac{11}{3})$ **19.** ∞, $(-\infty, \infty)$

21. b, $(a-b, a+b)$ **23.** 0, $\{\frac{1}{2}\}$ **25.** $\frac{1}{4}$, $[-\frac{1}{2}, 0]$

27. ∞, $(-\infty, \infty)$ **29.** (a) Sim (b) Não **31.** k^k **33.** Não

35. (a) $(-\infty, \infty)$

(b), (c)



37. $(-1, 1), f(x) = (1 + 2x)/(1 - x^2)$ **41.** 2

EXERCÍCIOS 11.9 ■ PÁGINA 697

1. 10 **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, (-1, 1)$ **5.** $2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} x^n, (-3, 3)$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{9^{n+1}} x^{2n+1}, (-3, 3)$ **9.** $1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} x^n, (-1, 1)$

11. $\sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^{n+1} - \frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n, (-1, 1)$

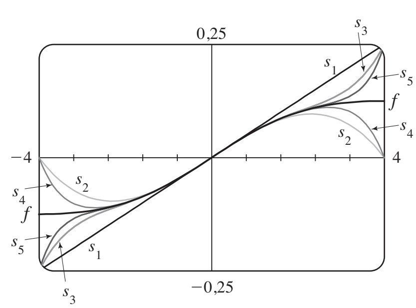
13. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 1)x^n, R = 1$

(b) $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n + 2)(n + 1)x^n, R = 1$

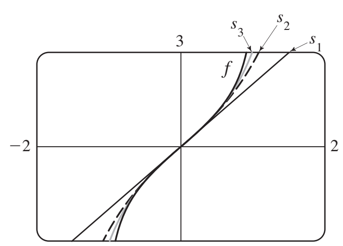
(c) $\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n(n - 1)x^n, R = 1$

15. $\ln 5 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n5^n}, R = 5$ **17.** $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{2^{n-1}} x^n, R = 2$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{16^{n+1}} x^{2n+1}, R = 4$



21. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{2n + 1}, R = 1$



23. $C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{8n+2}}{8n + 2}, R = 1$

25. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{4n^2 - 1}, R = 1$

27. 0,199989 **29.** 0,000065 **31.** 0,09531

33. (b) 0,920 **37.** $[-1, 1], [-1, 1), (-1, 1)$

EXERCÍCIOS 11.10 ■ PÁGINA 709

1. $b_8 = f^{(8)}(5)/8!$ **3.** $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)\, x^n, R = 1$

5. $\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)x^n, R = 1$

7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, R = \infty$

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} x^n, R = \infty$ **11.** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n + 1)!}, R = \infty$

13. $7 + 5(x - 2) + (x - 2)^2, R = \infty$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^3}{n!}(x - 3)^n, R = \infty$

17. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n)!} (x - \pi)^{2n}, R = \infty$

19. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{2^n \cdot 3^{2n+1} \cdot n!} (x - 9)^n, R = 9$

25. $1 + \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 3)}{2^n n!} x^n, R = 1$

27. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n + 1)(n + 2)}{2^{n+4}!} x^n, R = 2$

29. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n + 1)!} x^{2n+1}, R = \infty$

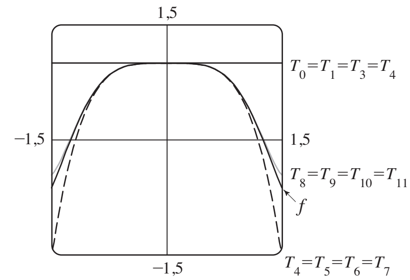
31. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n!} x^n, R = \infty$

33. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2n}(2n)!} x^{4n+1}, R = \infty$

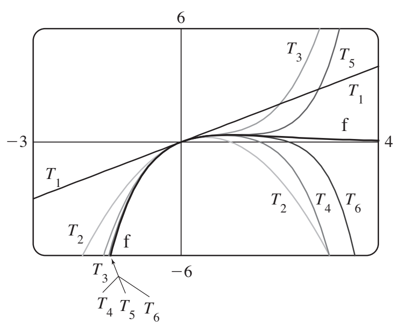
35. $\frac{1}{2}x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x, \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 1)}{n! 2^{3n+1}} x^{2n+1} R = 2$

37. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, R = \infty$

39. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{4n}, R = \infty$



41. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} x^n,\ R = \infty$



43. 0,81873

45. (a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} x^{2n}$

(b) $x + \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n+1)2^n n!} x^{2n+1}$

47. $C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!},\ R = \infty$

49. $C + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{2n(2n)!} x^{2n},\ R = \infty$ **51.** 0,440

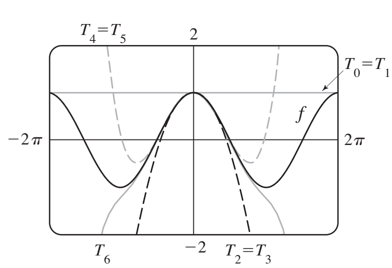
53. 0,40102 **55.** $\frac{1}{2}$ **57.** $\frac{1}{120}$ **59.** $1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4$

61. $1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{7}{360}x^4$ **63.** e^{-x^4}

65. $1/\sqrt{2}$ **67.** $e^3 - 1$

EXERCÍCIOS 11.11 ■ PÁGINA 718

1. (a) $T_0(x) = 1 = T_1(x)$, $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 = T_3(x)$,
$T_4(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 = T_5(x)$,
$T_6(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6$

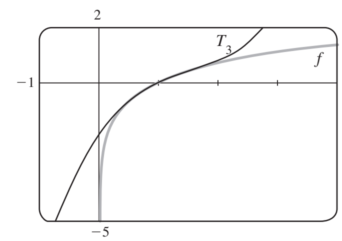


(b)

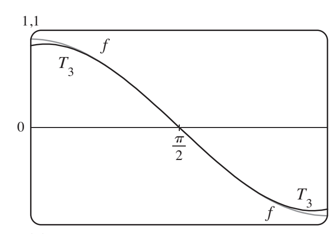
x	f	$T_0 = T_1$	$T_2 = T_3$	$T_4 = T_5$	T_6
$\frac{\pi}{4}$	0,7071	1	0,6916	0,7074	0,7071
$\frac{\pi}{2}$	0	1	−0,2337	0,0200	−0,0009
π	−1	1	−3,9348	0,1239	−1,2114

(c) À medida que n aumenta, $T_n(x)$ passa a ser uma boa aproximação para $f(x)$ em intervalos cada vez maiores.

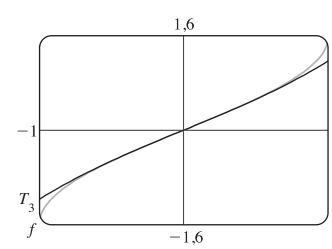
3. $(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$



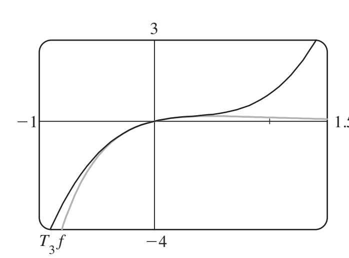
5. $-\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{1}{6}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^3$



7. $x + \frac{1}{6}x^3$

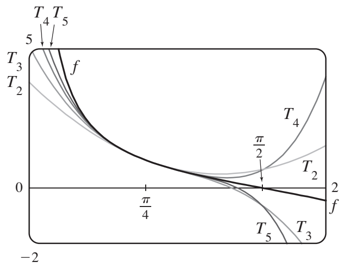


9. $x - 2x^2 + 2x^3$



11. $T_5(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$

$+ \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{64}{15}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^5$



13. (a) $2 + \frac{1}{4}(x - 4) - \frac{1}{64}(x - 4)^2$ (b) $1{,}5625 \times 10^5$

15. (a) $1 + \frac{2}{3}(x - 1) - \frac{1}{9}(x - 1)^2 + \frac{4}{81}(x - 1)^3$ (b) 0,000097

17. (a) $1 + \frac{1}{2}x^2$ (b) 0,0015 **19.** (a) $1 + x^2$ (b) 0,00006

21. (a) $x^2 - \frac{1}{6}x^4$ (b) 0,042 **23.** 0,17365 **25.** Quatro

27. $-1{,}037 < x < 1{,}037$ **29.** $-0{,}86 < x < 0{,}86$

31. 21 m, não **37.** (c) Eles diferem por cerca de 8×10^{-9} km.

CAPÍTULO 11 REVISÃO ■ PÁGINA 721

Testes Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Falso

9. Falso **11.** Verdadeiro **13.** Verdadeiro **15.** Falso

17. Verdadeiro **19.** Verdadeiro

Exercícios

1. $\frac{1}{2}$ **3.** D **5.** 0 **7.** e^{12} **9.** 2 **11.** C

13. C **15.** D **17.** C **19.** C **21.** C **23.** CC

25. AC **27.** $\frac{1}{11}$ **29.** $\pi/4$ **31.** e^{-e} **35.** 0,9721

37. 0,18976224,erro $< 6{,}4 \times 10^{-7}$

41. 4, $[-6, 2)$ **43.** 0,5, $[2{,}5, 3{,}5)$

45. $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{(2n)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n} + \frac{\sqrt{3}}{(2n+1)!}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}\right]$

47. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, $R = 1$ **49.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$, $R = 1$

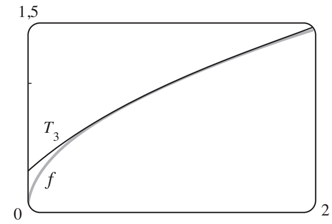
51. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$

53. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot (4n-3)}{n!2^{6n+1}}x^n$, $R = 16$

55. $C + \ln|x| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n \cdot n!}$

57. (a) $1 + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{8}(x - 1)^2 + \frac{1}{16}(x - 1)^3$

(b)



(c) 0,000006

59. $-\frac{1}{6}$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 725

1. $15!/5! = 10{,}897{,}286{,}400$

3. (b) 0 se $x = 0$, $(1/x) - \text{cotg}\, x$ se $x \neq k\pi$, k inteiro

5. (a) $s_n = 3 \cdot 4^n$, $l_n = 1/3^n$, $p_n = 4^n/3^{n-1}$ (c) $\frac{2}{5}\sqrt{3}$

9. $(-1, 1)$, $\frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1 - x)^4}$ **11.** $\ln \frac{1}{2}$

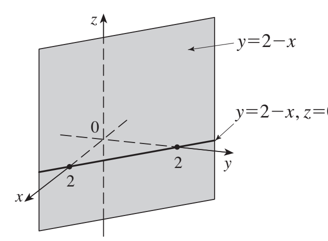
13. (a) $\frac{250}{101}\pi(e^{-(n-1)p/5} - e^{-n\pi/5})$ (b) $\frac{250}{101}\pi$

CAPÍTULO 12

EXERCÍCIOS 12.1 ■ PÁGINA 732

1. $(4, 0, -3)$ **3.** Q; R

5. Um plano vertical que intercepta o plano xy na reta $y = 2 - x$, $z = 0$ (veja o gráfico à direita)



7. $|PQ| = 6$, $|QR| = 2s10$, $|RP| = 6$; triângulo isósceles

9. (a) Não (b) Sim

11. $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 16$;
$(y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 16$, $x = 0$

13. $(x - 3)^2\ (y - 8)^2 + (z - 1)^2 = 30$

15. $(3, -2, 1)$,5

17. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\sqrt{3}/2$ **19.** (b) $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{2}\sqrt{94}$, $\frac{1}{2}\sqrt{85}$

21. (a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 36$
(b) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 4$
(c) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 6)^2 = 9$

23. Um plano paralelo ao plano xz e quatro unidades à esquerda dele

25. Um semiespaço consistindo em todos os pontos à frente do plano $x = 3$

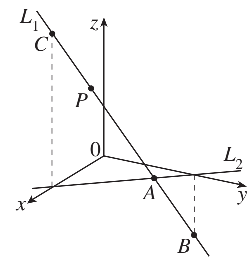
27. Todos os pontos sobre ou entre os planos horizontais $z = 0$ e $z = 6$

29. Todos os pontos sobre ou dentro da esfera com raio $\sqrt{3}$ e centro O

31. Todos os pontos sobre ou dentro do cilindro circular de raio 3 e eixo no eixo y

33. $0 < x < 5$ **35.** $r^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2$

37. (a) (2, 1, 4) (b)



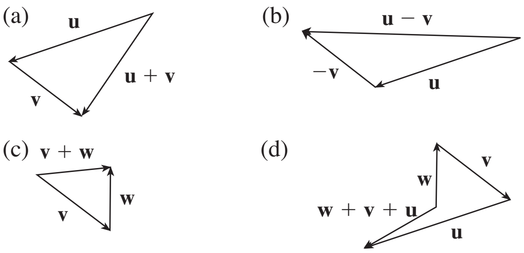
39. $14x - 6y - 10z = 9$, um plano perpendicular a AB

EXERCÍCIOS 12.2 ■ PÁGINA 740

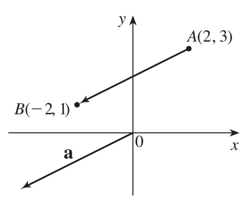
1. (a) Escalar (b) Vetor (c) Vetor (d) Escalar

3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CE}$

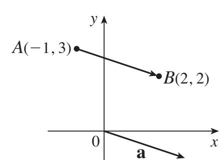
5.



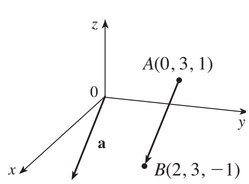
7. $\mathbf{a} = \langle -4, -2 \rangle$



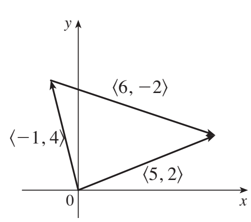
9. $\mathbf{a} = \langle 3, -1 \rangle$



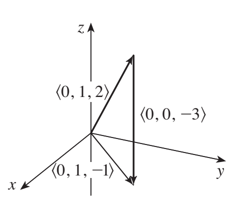
11. $\mathbf{a} = \langle 2, 0, -2 \rangle$



13. $\langle 5, 2 \rangle$



15. $\langle 0, 1, -1 \rangle$



17. $\langle 2, -18 \rangle, \langle 1, -42 \rangle, 13, 10$

19. $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 9\mathbf{k}, \sqrt{14}, \sqrt{82}$

21. $-\dfrac{3}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \dfrac{7}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$ **23.** $\frac{8}{9}\mathbf{i} - \frac{1}{9}\mathbf{j} + \frac{4}{9}\mathbf{k}$

25. $\langle 2, 2\sqrt{3} \rangle$ **27.** $\approx 15{,}32$ m/s, $\approx 12{,}86$ m/s

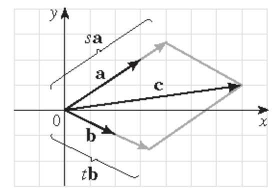
29. $100\sqrt{7} \approx 264{,}6$ N, $\approx 139{,}1°$

31. $\sqrt{1\,250} \approx 35{,}4$ km/h, N8°W

33. $\mathbf{T}_1 \approx -196\,\mathbf{i} + 3{,}92\,\mathbf{j}$, $\mathbf{T}_2 \approx 196\,\mathbf{i} + 3{,}92\,\mathbf{j}$

35. $\pm(\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j})/\sqrt{17}$ **37.** $\mathbf{0}$

39. (a), (b) (d) $s = \frac{9}{7}, t = \frac{11}{7}$



41. Uma esfera com raio 1, centrada em (x_0, y_0, z_0)

EXERCÍCIOS 12.3 ■ PÁGINA 747

1. (b), (c), (d) têm significado

3. 14 **5.** −5 **7.** 32 **9.** −15

11. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = -\frac{1}{2}$

15. $\cos^{-1}\left(\dfrac{9 - 4\sqrt{7}}{20}\right) \approx 95°$ **17.** $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{\sqrt{1\,015}}\right) \approx 81°$

19. $\cos^{-1}\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{7}}\right) \approx 101°$ **21.** 45°, 45°, 90°

23. (a) Nenhum dos dois (b) Ortogonais
(c) Ortogonais (d) Paralelos

25. Sim **27.** $(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})/\sqrt{3}$ [ou $(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})/\sqrt{3}$]

29. $\dfrac{3}{5\sqrt{2}}, \dfrac{4}{5\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; 65°, 56°, 45°

31. $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$; 73°, 65°, 149°

33. $1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$; 55°, 55°, 55°

35. $3, \left\langle \frac{9}{5}, -\frac{12}{5} \right\rangle$ **37.** $\frac{9}{7}, \left\langle \frac{27}{49}, \frac{54}{49}, -\frac{18}{49} \right\rangle$

39. $1/\sqrt{21}, \frac{2}{21}\mathbf{i} - \frac{1}{21}\mathbf{j} + \frac{4}{21}\mathbf{k}$

43. $\langle 0, 0, -2\sqrt{10} \rangle$ ou qualquer vetor da forma $\langle s, t, 3s - 2\sqrt{10} \rangle$, $s, t \in \mathbb{R}$

45. 144 J **47.** $560 \cos 20° \approx 526$ J **49.** $\frac{13}{5}$

51. $\cos^{-1}(1/\sqrt{3}) \approx 55°$

EXERCÍCIOS 12.4 ■ PÁGINA 754

1. $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ **3.** $15\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}$ **5.** $\frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \frac{3}{2}\mathbf{k}$

7. $t^4\mathbf{i} - 2t^3\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ **9.** $\mathbf{0}$ **11.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. (a) Escalar (b) Sem significado (c) Vetor
(d) Sem significado (e) Sem significado (f) Escalar

15. 24; entrando na página **17.** $\langle 5, -3, 1 \rangle, \langle -5, 3, -1 \rangle$

19. $\langle -2/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6} \rangle, \langle 2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6} \rangle$

27. 16 **29.** (a) $\langle 6, 3, 2 \rangle$ (b) $\frac{7}{2}$

31. (a) $\langle 13, -14, 5 \rangle$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{390}$

33. 82 **35.** 3 **39.** $10{,}8 \operatorname{sen} 80° \approx 10{,}6$ N · m

41. ≈ 417 N **43.** (b) $\sqrt{97/3}$

49. (a) Não (b) Não (c) Sim

EXERCÍCIOS 12.5 ■ PÁGINA 763

1. (a) Verdadeiro (b) Falso (c) Verdadeiro (d) Falso
(e) Falso (f) Verdadeiro (g) Falso (h) Verdadeiro
(i) Verdadeiro (j) Falso (k) Verdadeiro

3. $\mathbf{r} = (-2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) + t(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\,\mathbf{k})$;
$x = -2 + 3t, y = 4 + t, z = 10 - 8t$

5. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $x = 1 + t, y = 3t, z = 6 + t$

7. $x = 1 - 5t, y = 3, z = 2 - 2t$; $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{z-2}{-2}, y = 3$

9. $x = 2 + 2t, y = 1 + \frac{1}{2}t, z = 3 - 4t$;
$(x - 2)/2 = 2y - 2 = (z + 3)/(-4)$

11. $x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = 1 + t$; $x - 1 = (y + 1)/2 = z - 1$

13. Sim

15. (a) $(x - 1)/(-1) = (y + 5)/2 = (z - 6)/(-3)$
(b) $(-1, -1, 0), (-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}), (0, -3, 3)$

17. $\mathbf{r}(t) = (2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}) + t(2\,\mathbf{i} + 7\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}), 0 \leqslant t \leqslant 1$

19. Paralelas **21.** Reversas

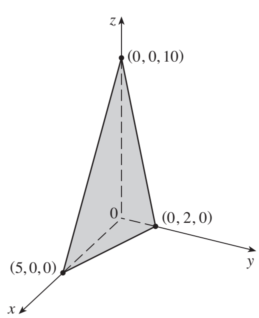
23. $-2x + y + 5z = 1$ **25.** $x + y - z = -1$

27. $2x - y + 3z = 0$ **29.** $3x - 7z = -9$

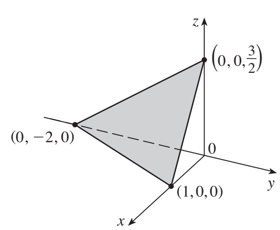
31. $x + y + z = 2$ **33.** $-13x + 17y + 7z = -42$

35. $33x + 10y + 4z = 190$ **37.** $x - 2y + 4z = -1$

39.



41.



43. $(1, 0, 0)$ **45.** $(2, 3, 1)$ **47.** $1, 0, -1$

49. Perpendiculares **51.** Nenhum dos dois, $\approx 70{,}5°$

53. Paralelos

55. (a) $x = 1, y = -t, z = t$ (b) $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\right) \approx 15{,}8°$

57. $x = 1, y - 2 = -z$

59. $x + 2y + z = 5$ **61.** $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$

63. $x = 3t, y = 1 - t, z = 2 - 2t$

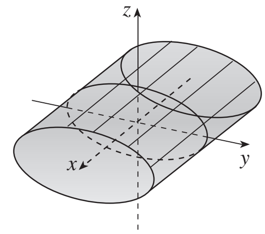
65. P_1 e P_3 são paralelos, P_2 e P_4 são idênticos

67. $\sqrt{61/14}$ **69.** $\frac{18}{7}$ **71.** $5/(2\sqrt{14})$ **75.** $1/\sqrt{6}$

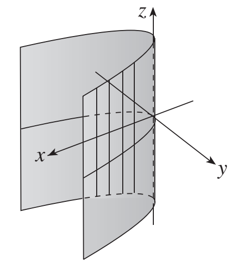
EXERCÍCIOS 12.6 ■ PÁGINA 771

1. (a) Parábola
(b) Cilindro parabólico com geratriz paralela ao eixo z
(c) Cilindro parabólico com a geratriz paralela ao eixo x

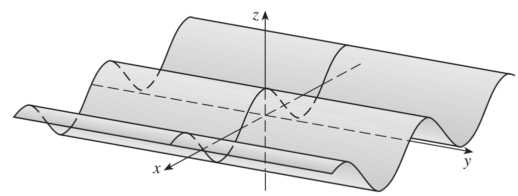
3. Cilindro elíptico



5. Cilindro parabólico

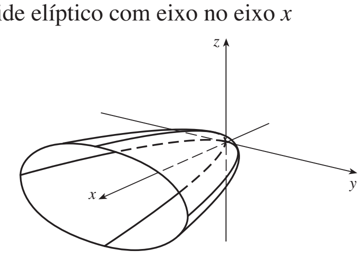


7. Superfície cilíndrica

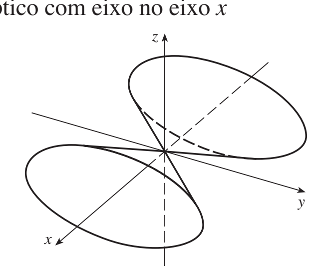


9. (a) $x = k, y^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbole $(k \neq \pm 1)$;
$y = k, x^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbole $(k \neq \pm 1)$;
$z = k, x^2 + z^2 = 1 + k^2$, círculo
(b) O hiperboloide é girado de modo que ele tenha eixo no eixo y
(c) O hiperboloide é transladado uma unidade na direção do eixo y negativo

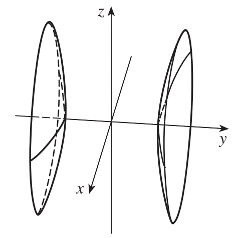
11. Paraboloide elíptico com eixo no eixo x



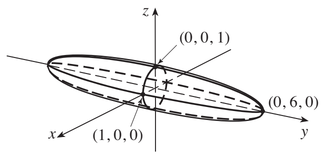
13. Cone elíptico com eixo no eixo x



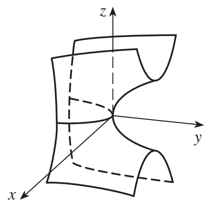
15. Hiperboloide de duas folhas



17. Elipsoide



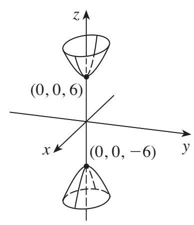
19. Paraboloide hiperbolico



21. VII **23.** II **25.** VI **27.** VIII

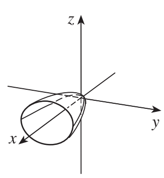
29. $-\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{36} = 1$

Hiperboloide de duas folhas com eixo no eixo z



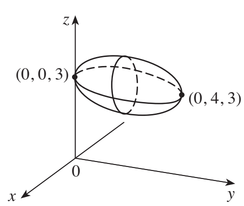
31. $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z^2}{2}$

Paraboloide elíptico com vértice $(0, 0, 0)$ e eixo no eixo x

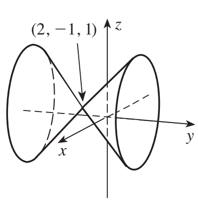


33. $x^2 + \dfrac{(y-2)^2}{4} + (z-3)^2 = 1$

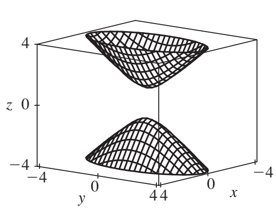
Elipsoide com centro $(0, 2, 3)$



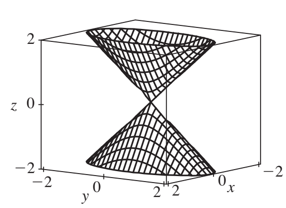
35. $(y+1)^2 = (x-2)^2 + (z-1)^2$
Cone circular com vértice $(2, -1, 1)$ e eixo paralelo ao eixo y



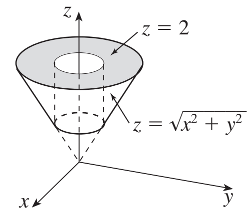
37.



39.



41.

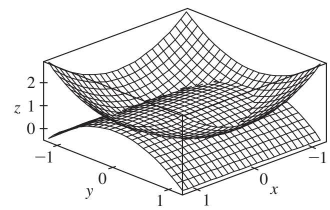


43. $y = x^2 + z^2$ **45.** $-4x = y^2 + z^2$, paraboloide

47. (a) $\dfrac{x^2}{(6\,378{,}137)^2} + \dfrac{y^2}{(6\,378{,}137)^2} + \dfrac{z^2}{(6\,356{,}523)^2} = 1$

(b) Círculo (c) Elipse

51.



CAPÍTULO 12 REVISÃO ■ PÁGINA 773

Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Verdadeiro **7.** Verdadeiro
9. Verdadeiro **11.** Falso **13.** Falso **15.** Falso
17. Verdadeiro

Exercícios

1. (a) $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 69$
(b) $(y-2)^2 + (z-1)^2 = 68$, $x = 0$
(c) Centro $(4, -1, -3)$, raio 5

3. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3\sqrt{2}$; $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = 3\sqrt{2}$; para fora da página

5. $-2, -4$ **7.** (a) 2 (b) -2 (c) -2 (d) 0

9. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 71°$ **11.** (a) $\langle 4, -3, 4 \rangle$ (b) $\sqrt{41}/2$

13. 166 N, 114 N

15. $x = 4 - 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 2 + 3t$

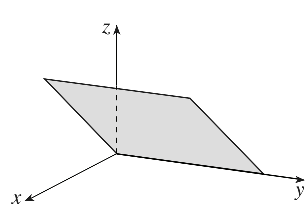
17. $x = -2 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = 4 + 5t$

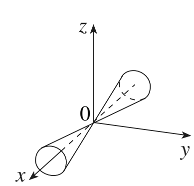
19. $-4x + 3y + z = -14$ **21.** $(1, 4, 4)$

23. Reversas **25.** $x + y + z = 4$

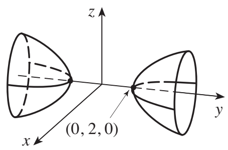
27. $22/\sqrt{26}$

29. Plano **31.** Cone

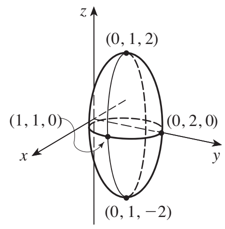




33. Hiperboloide de duas folhas



35. Elipsoide



37. $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 776

1. $(\sqrt{3} - 1{,}5)$ m

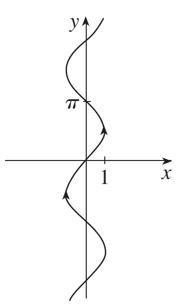
3. (a) $(x + 1)/(-2c) = (y - c)/(c^2 - 1) = (z - c)/(c^2 + 1)$
(b) $x^2 + y^2 = t^2 + 1, z = t$ (c) $4\pi/3$

CAPÍTULO 13

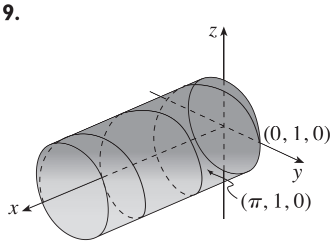
EXERCÍCIOS 13.1 ■ PÁGINA 784

1. $[1, 5]$ **3.** $\langle 1, 0, 0 \rangle$ **5.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

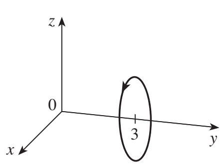
7.



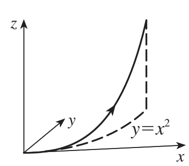
9.



11.



13.

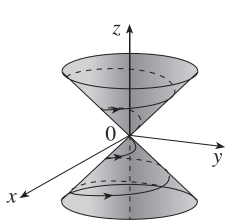


15. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t, 3t \rangle, 0 \leqslant t \leqslant 1; x = t, y = 2t, z = 3t, 0 \leqslant t \leqslant 1$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 3t + 1, 2t - 1, 5t + 2 \rangle, 0 \leqslant t \leqslant 1;$
$x = 3t + 1, y = 2t - 1, z = 5t + 2, 0 \leqslant t \leqslant 1$

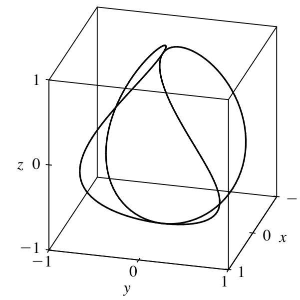
19. VI **21.** IV **23.** V

25.

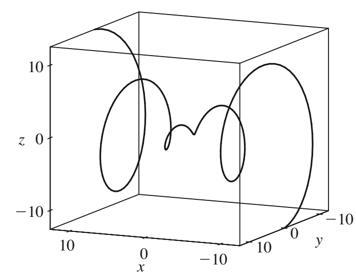


27. $(0, 0, 0), (1, 0, 1)$

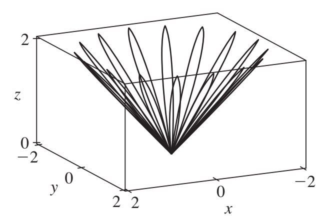
29.



31.



33.

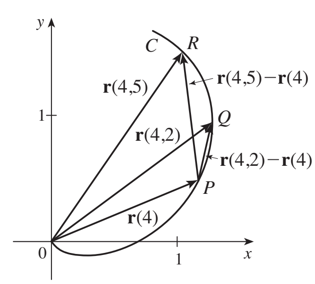


37. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\,\mathbf{k}$

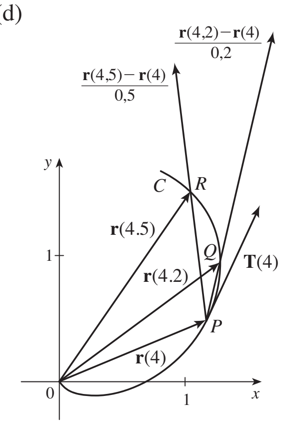
39. $x = 2\cos t, y = 2\,\text{sen}\,t, z = 4\cos^2 t$ **41.** Sim

EXERCÍCIOS 13.2 ■ PÁGINA 789

1. (a)

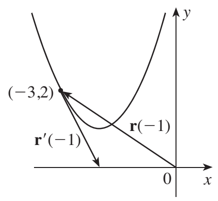


(b), (d)



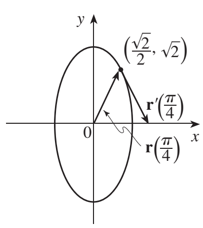
(c) $\mathbf{r}'(4) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\mathbf{r}(4+h) - \mathbf{r}(4)}{h}$; $\mathbf{T}(4) = \dfrac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$

3.



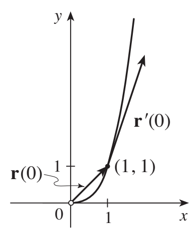
(b) $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t\rangle$

5. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \cos t\,\mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$

7. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = e^t\,\mathbf{i} + 3e^{3t}\,\mathbf{j}$

9. $\mathbf{r}'(t) = \langle t\cos t + \operatorname{sen} t, 2t, \cos 2t - 2t \operatorname{sen} 2t\rangle$

11. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{4t}\,\mathbf{k}$ **13.** $\mathbf{r}'(t) = 2te^{t^2}\,\mathbf{i} + [3/(1+3t)]\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$ **17.** $\langle 15/\sqrt{262}, 6/\sqrt{262}, 1/\sqrt{262}\rangle$

19. $\frac{3}{5}\,\mathbf{j} + \frac{4}{5}\,\mathbf{k}$

21. $\langle 1, 2t, 3t^2\rangle, \langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14}\rangle, \langle 0, 2, 6t\rangle, \langle 6t^2, -6t, 2\rangle$

23. $x = 1 + 5t, y = 1 + 4t, z = 1 + 3t$

25. $x = 1 - t, y = t, z = 1 - t$

27. $x = t, y = 1 - t, z = 2t$

29. $x = -\pi - t, y = \pi + t, z = -\pi t$

31. 66° **33.** $4\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$ **35.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. $e^t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t\ln t - t)\mathbf{k} + \mathbf{C}$

39. $t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + \left(\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3}\right)\mathbf{k}$

45. $2t\cos t + 2\operatorname{sen} t - 2\cos t \operatorname{sen} t$

EXERCÍCIOS 13.3 ■ PÁGINA 797

1. $20\sqrt{29}$ **3.** $e - e^{-1}$ **5.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$ **7.** 15 3841

9. 1 2780 **11.** 42

13. $\mathbf{r}(t(s)) = \dfrac{2}{\sqrt{29}}\,s\,\mathbf{i} + \left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \dfrac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

15. $(3 \operatorname{sen} 1, 4, 3\cos 1)$

17. (a) $\langle (2/\sqrt{29})\cos t, 5/\sqrt{29}, (2/\sqrt{29}) \operatorname{sen} t\rangle$, $\langle -\operatorname{sen} t, 0, -\cos t\rangle$ (b) $\frac{2}{29}$

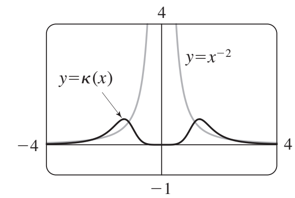
19. (a) $\langle t^2, 2t, 2\rangle/(t^2+2), \langle 2t, 2 - t^2, -2t\rangle/(t^2+2)$ (b) $2/(t^2+2)^2$

21. $2/(4t^2+1)^{3/2}$ **23.** $\frac{4}{25}$ **25.** $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

27. $2/(4x^2 - 8 + 5)^{3/2}$ **29.** $15\sqrt{x}/(1 + 100x^3)^{3/2}$

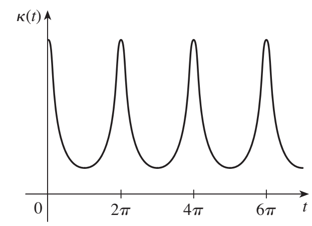
31. $(-\frac{1}{2}\ln 2, 1/\sqrt{2})$; tende a 0 **33.** (a) P (b) 1,3, 0,7

35.



37. a é $y = f(x)$, b é $y = \kappa(x)$

39. $\kappa(t) = \dfrac{6\sqrt{4\cos^2 t - 12\cos t + 13}}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$

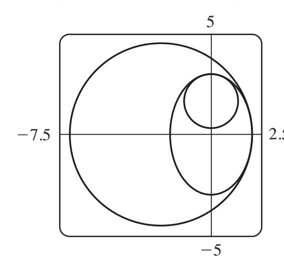


múltiplos inteiros de 2π

41. $1/(\sqrt{2}e^t)$ **43.** $\left\langle\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle, \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle, \left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\rangle$

45. $y = 6x + \pi, x + 6y = 6\pi$

47. $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y = \frac{81}{4}, x^2 + \left(y - \frac{5}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$



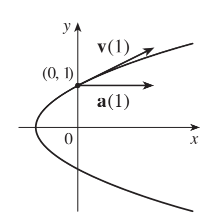
49. $(-1, -3, 1)$ **57.** $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$

59. $2{,}07 \times 10^{10}$ Å ≈ 2 m

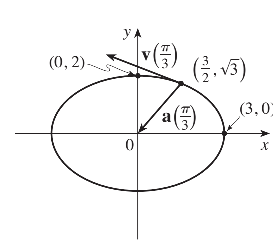
EXERCÍCIOS 13.4 ■ PÁGINA 805

1. (a) $1{,}8\mathbf{i} - 3{,}8\,\mathbf{j} - 0{,}7\mathbf{k}, 2{,}0\mathbf{i} - 2{,}4\,\mathbf{j} - 0{,}6\mathbf{k}$, $2{,}8\mathbf{i} + 1{,}8\mathbf{j} - 0{,}3\,\mathbf{k}, 2{,}8\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}4\,\mathbf{k}$
(b) $2{,}4\,\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}5\,\mathbf{k}, 2{,}58$

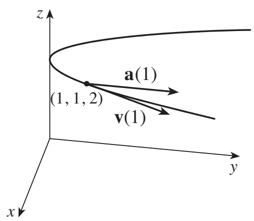
3. $\mathbf{v}(t) = \langle 2t, 1\rangle$
$\mathbf{a}(t) = \langle 2, 0\rangle$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + 1}$



5. $\mathbf{v}(t) = -3 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = -3\cos t\,\mathbf{i} - 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5 \operatorname{sen}^2 t + 4}$



7. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = 2\,\mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$



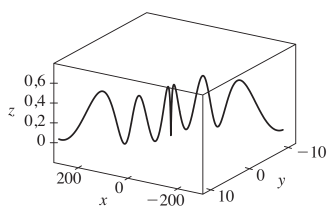
9. $\langle 1, 2t, 3t^2\rangle, \langle 0, 2, 6t\rangle, \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$

11. $\sqrt{2}\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}, e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, e^t + e^{-t}$

13. $e^t[(\cos t - \text{sen}\, t)\mathbf{i} + (\text{sen}\, t + \cos t)\,\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}]$,
$e^t[-2\,\text{sen}\, t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}], e^t\sqrt{t^2 + 2t + 3}$

15. $\mathbf{v}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

17. (a) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t - \text{sen}\, t + 1)\,\mathbf{j} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t\right)\mathbf{k}$
(b)



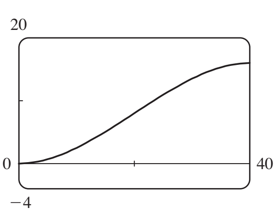
19. $t = 4$ **21.** $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + \frac{5}{2}t^2\mathbf{k}, |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{25t^2 + 2}$

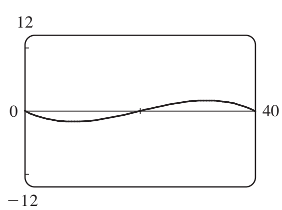
23. (a) ≈ 22 km (b) $\approx 3{,}2$ km (c) 500 m/s

25. 30 m/s **27.** $\approx 10{,}2, \approx 79{,}8$

29. $13{,}0^\circ < \theta < 36{,}0^\circ, 55{,}4^\circ < \theta < 85{,}5^\circ$

31. (a) 16 m (b) $\approx 23{,}6^\circ$ rio acima





33. $6t, 6$ **35.** $0, 1$ **37.** $e^t - e^{-t}, \sqrt{2}$

39. $4{,}5$ cm/s^2, $9{,}0$ cm/s^2 **41.** $t = 1$

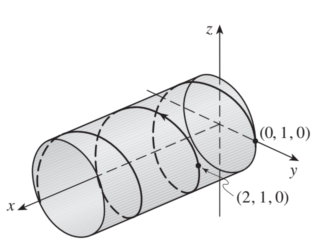
CAPÍTULO 13 REVISÃO ■ PÁGINA 809

Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Falso
7. Verdadeiro **9.** Falso **11.** Verdadeiro

Exercícios

1. (a)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \pi\,\text{sen}\,\pi t\,\mathbf{j} + \pi\cos\pi t\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}''(t) = -\pi^2\cos\pi t\,\mathbf{j} - \pi^2\,\text{sen}\,\pi t\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4\,\text{sen}\, t\,\mathbf{j} + (5 - 4\cos t)\mathbf{k}, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

5. $\frac{1}{3}\mathbf{i} - (2/\pi^2)\,\mathbf{j} + (2/\pi)\,\mathbf{k}$ **7.** 86,631 **9.** $\pi/2$

11. (a) $\langle t^2, t, 1\rangle/\sqrt{t^4 + t^2 + 1}$
(b) $\langle 2t, 1 - t^4, -2t^3 - t\rangle/\sqrt{t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 5t^2}$
(c) $\sqrt{t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 5t^2}/(t^4 + t^2 + 1)^2$

13. $12/17^{3/2}$ **15.** $x - 2y + 2\pi = 0$

17. $\mathbf{v}(t) = (1 + \ln t)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - e^{-t}\,\mathbf{k}$,
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2 + 2\ln t + (\ln t)^2 + e^{-2t}}, \mathbf{a}(t) = (1/t)\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

19. (a) Cerca de 0,8 m acima do solo, 18,4 m do atleta
(b) $\approx 6{,}3$ m (c) $\approx 19{,}1$ m do atleta

21. (c) $-2e^{-t}\mathbf{v}_d + e^{-t}\mathbf{R}$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 812

1. (a) $\mathbf{v} = \omega R(-\text{sen}\,\omega t\,\mathbf{i} + \cos\omega t\,\mathbf{j})$ (c) $\mathbf{a} = \omega^2\mathbf{r}$

3. (a) $90^\circ, v_0^2/(2g)$

5. (a) $\approx 0{,}25$ m para a direita do lado da mesa, $\approx 4{,}9$ m/s
(b) $\approx 5{,}9^\circ$ (c) $\approx 0{,}56$ m para a direita do lado da mesa

7. 56°

CAPÍTULO 14

EXERCÍCIOS 14.1 ■ PÁGINA 825

1. (a) -27; uma temperatura de -15 ºC com vento soprando a 40 km/h dá uma sensação equivalente a cerca de -27 ºC sem vento.
(b) Quando a temperatura é -20 ºC, qual velocidade do vento dá uma sensação térmica de -30 ºC? 20 km/h
(c) Com uma velocidade do vento de 20 km/h, qual temperatura dá uma sensação térmica de -49 ºC? -35 ºC
(d) Uma função da velocidade do vento que dá os valores da sensação térmica quando a temperatura é -5 ºC
(e) Uma função da temperatura que dá os valores da sensação térmica quando a velocidade do vento é 50 km/h

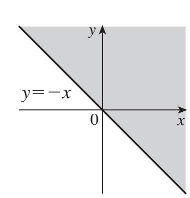
3. Sim

5. (a) 7,7; um vento de 80 km/h soprando em mar aberto por 15 h criará ondas de cerca de 7,7 m de altura.
(b) $f(60, t)$ é uma função de t que dá a altura das ondas produzidas por ventos de 60 km/h soprando por t horas.
(c) $f(v, 30)$ é uma função de v que dá a altura das ondas produzidas por ventos de velocidade v soprando por 30 horas.

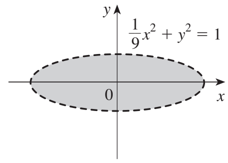
7. (a) 4 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[0, \infty)$

9. (a) e (b) $\{(x, y, z) \mid z \geqslant x^2 + y^2\}$ (c) $[1, \infty)$

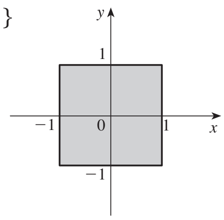
11. $\{(x, y) \mid y \geqslant -x\}$



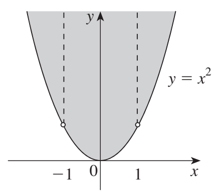
13. $\{(x, y) \mid \frac{1}{9}x^2 + y^2 < 1\}$



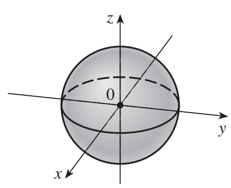
15. $\{(x, y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$



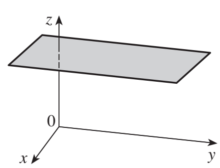
17. $\{(x, y) \mid y \geqslant x^2, x \neq \pm 1\}$



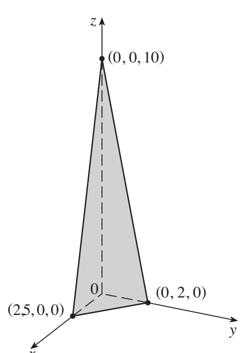
19. $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$



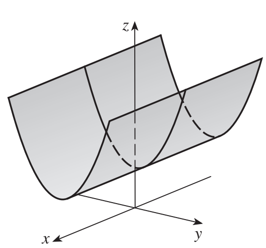
21. $z = 3$, plano horizontal



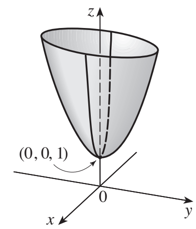
23. $4x + 5y + z = 10$, plano



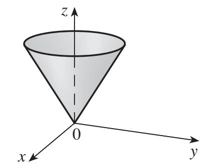
25. $z = y^2 + 1$, cilindro parabólico



27. $z = 4x^2 + y^2 + 1$ paraboloide elíptico



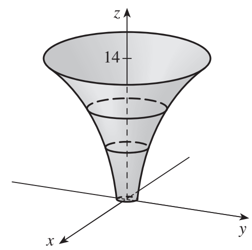
29. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, metade de cima do cone



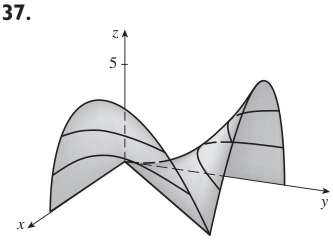
31. ≈ 56, ≈ 35

33. Íngreme; quase plano

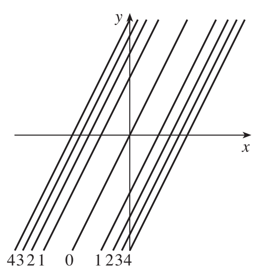
35.



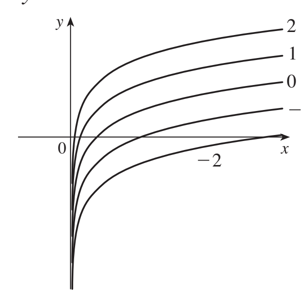
37.



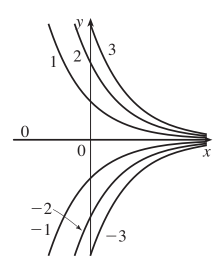
39. $(y - 2x)^2 = k$



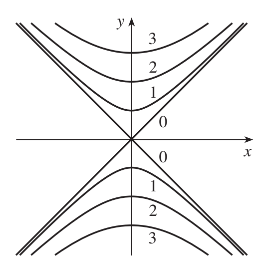
41. $y = \ln x + k$



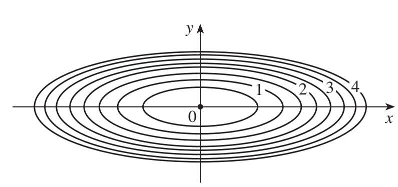
43. $y = ke^{-x}$

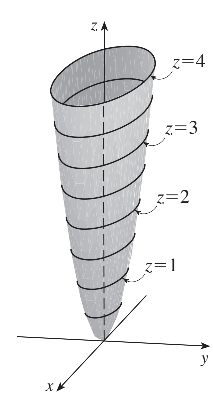


45. $y^2 - x^2 = k^2$

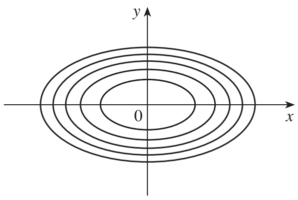


47. $x^2 + 9y^2 = k$

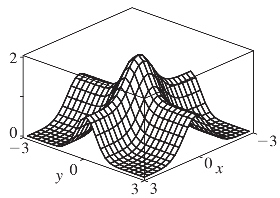




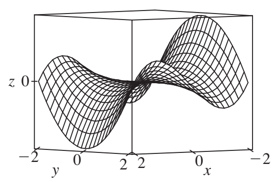
49.



51.



53.



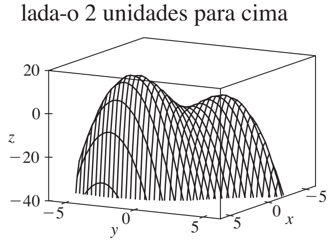
55. (a) C (b) II **57.** (a) F (b) I **59.** (a) B (b) VI

61. Família de planos paralelos

63. Família de hiperboloides de uma ou duas folhas com eixo no eixo y

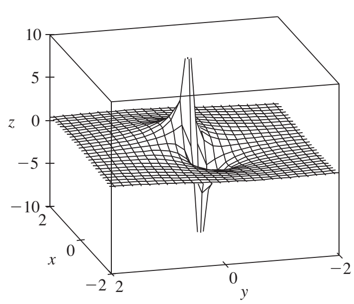
65. (a) Translada o gráfico de f duas unidades para cima
(b) Amplia o gráfico de f verticalmente por um fator 2
(c) Reflete o gráfico de f em relação ao plano xy
(d) Reflete o gráfico de f em relação ao plano xy e a seguir translada-o 2 unidades para cima

67.



f parece ter um valor máximo de cerca de 15. Existem dois pontos de máximo locais, mas nenhum ponto de mínimo local.

69.



Os valores da função tendem a 0 quando x, y se torna grande; quando (x, y) se aproxima da origem, f tende a $\pm\infty$ ou 0, dependendo da direção de aproximação.

71. Se $c = 0$, o gráfico é uma superfície cilíndrica. Para $c > 0$, as curvas de nível são elipses. O gráfico se curva para cima à medida que nos afastamos da origem e a inclinação aumenta quando c aumenta. Para $c < 0$, as curvas de nível são hipérboles. O gráfico se curva para cima na direção y e para baixo, tendendo ao plano xy, na direção x produzindo uma aparência de sela próximo a $(0, 0, 1)$.

73. $c = -2, 0, 2$ **75.** (b) $y = 0{,}75x + 0{,}01$

EXERCÍCIOS 14.2 ■ PÁGINA 835

1. Nada; se f for contínua, $f(3, 1) = 6$ **3.** $-\frac{5}{2}$

5. 2 025 **7.** $\frac{2}{7}$ **9.** Não existe **11.** Não existe

13. 0 **15.** Não existe **17.** 2 **19.** 1

21. Não existe

23. O gráfico mostra que a função tende a números diferentes ao longo de retas diferentes.

25. $h(x, y) = (2x + 3y - 6)^2 + \sqrt{2x + 3y - 6}$;
$\{(x, y) \mid 2x + 3y \geqslant 6\}$

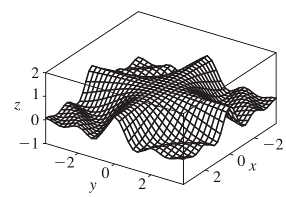
27. Ao longo da reta $y = x$ **29.** $\{(x, y) \mid y \neq x^2\}$

31. $\{(x, y) \mid y \geqslant 0\}$ **33.** $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

35. $\{(x, y, z) \mid y \geqslant 0, y \neq \sqrt{x^2 + z^2}\}$

37. $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ **39.** 0 **41.** −1

43.



f é contínua em $\mathbb{R}^2$

EXERCÍCIOS 14.3 ■ PÁGINA 845

1. (a) A taxa de variação da temperatura quando a longitude varia, com a latitude e o tempo fixados; a taxa de variação quando apenas a latitude varia; a taxa de variação quando apenas o tempo varia.
(b) Positiva, negativa, positiva

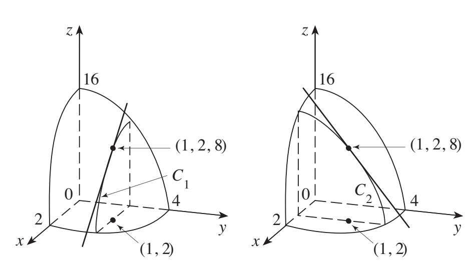
3. (a) $f_T(-15, 30) \approx 1{,}3$; para uma temperatura de −15 ºC e velocidade do vento de 30 km/h, o índice de sensação térmica aumenta de 1,3 ºC para cada grau que a temperatura aumenta. $f_v(-15, 30) \approx -0{,}15$; para uma temperatura de −15 ºC e velocidade do vento de 30 km/h, o índice de sensação térmica diminui de 0,15 ºC para cada km/h de aumento na velocidade do vento.
(b) Positiva, negativa (c) 0

5. (a) Positivo (b) Negativo

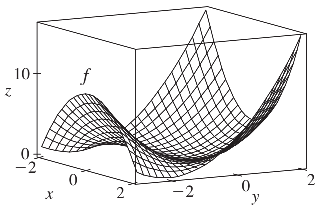
7. (a) Positivo (b) Negativo

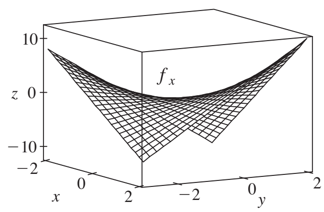
9. $c = f$, $b = f_x$, $a = f_y$

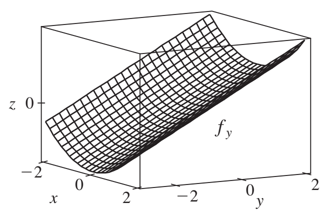
11. $f_x(1, 2) = -8 =$ inclinação de C_1, $f_y(1, 2) = -4 =$ inclinação de C_2



13. $f_x = 2x + 2xy, f_y = 2y + x^2$







15. $f_x(x, y) = 3, f_y(x, y) = 8y^3$

17. $\partial z/\partial x = e^{3y}, \partial z/\partial y = 3xe^{3y}$

19. $\partial z/\partial x = 20(2x + 3y)^9, \partial z/\partial y = 30(2x + 3y)^9$

21. $f_x(x, y) = 2y/(x + y)^2, f_y(x, y) = -2x/(x + y)^2$

23. $\partial w/\partial \alpha = \cos \alpha \cos \beta, \partial w/\partial \beta = -\text{sen}\, \alpha\, \text{sen}\, \beta$

25. $f_r(r, s) = \dfrac{2r^2}{r^2 + s^2} + \ln(r^2 + s^2), f_s(r, s) = \dfrac{2rs}{r^2 + s^2}$

27. $\partial u/\partial t = e^{w/t}(1 - w/t), \partial u/\partial w = e^{w/t}$

29. $f_x = z - 10xy^3z^4, f_y = -15x^2y^2z^4, f_z = x - 20x^2y^3z^3$

31. $\partial w/\partial x = 1/(x + 2y + 3z), \partial w/\partial y = 2/(x + 2y + 3z),$
$\partial w/\partial z = 3/(x + 2y + 3z)$

33. $\partial u/\partial x = y\, \text{sen}^{-1}(yz), \partial u/\partial y = x\, \text{sen}^{-1}(yz) + xyz/\sqrt{1 - y^2z^2},$
$\partial u/\partial z = xy^2/\sqrt{1 - y^2z^2}$

35. $f_x = yz^2 \,\text{tg}(yt), f_y = xyz^2t \sec^2(yt) + xz^2 \,\text{tg}(yt),$
$f_z = 2xyz \,\text{tg}(yt), f_t = xy^2z^2 \sec^2(yt)$

37. $\partial u/\partial x_i = x_i/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

39. $\frac{1}{5}$ **41.** $\frac{1}{4}$

43. $f_x(x, y) = y^2 - 3x^2y, f_y(x, y) = 2xy - x^3$

45. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{3yz - 2x}{2z - 3xy}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

47. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}, \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-z}{1 + y + y^2z^2}$

49. (a) $f'(x), g'(y)$ (b) $f'(x + y), f'(x + y)$

51. $f_{xx} = 6xy^5 + 24x^2y, f_{xy} = 15x^2y^4 + 8x^3 = f_{yx}, f_{yy} = 20x^3y^3$

53. $w_{uu} = v^2/(u^2 + v^2)^{3/2}, w_{uv} = -uv/(u^2 + v^2)^{3/2} = w_{vu},$
$w_{vv} = u^2/(u^2 + v^2)^{3/2}$

55. $z_{xx} = -2x/(1 + x^2)^2, z_{xy} = 0 = z_{yx}, z_{yy} = -2y/(1 + y^2)^2$

61. $12xy, 72xy$

63. $24\, \text{sen}(4x + 3y + 2z), 12\, \text{sen}(4x + 3y + 2z)$

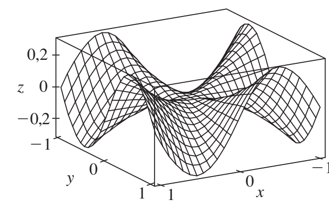
65. $\theta e^{r\theta}(2\, \text{sen}\, \theta + \theta \cos \theta + r\theta\, \text{sen}\, \theta)$ **67.** $4/(y + 2z)^3, 0$

69. $\approx 12{,}2, \approx 16{,}8, \approx 23{,}25$ **81.** R^2/R_1^2

87. Não **89.** $x = 1 + t, y = 2, z = 2 - 2t$

93. 2

95. (a)



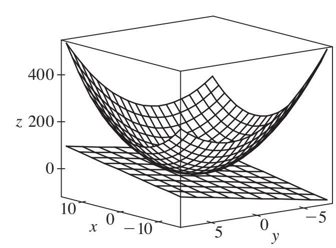
(b) $f_x(x, y) = \dfrac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, f_y(x, y) = \dfrac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$

(c) 0, 0 (e) Não, já que f_{xy} e f_{yx} não são contínuas.

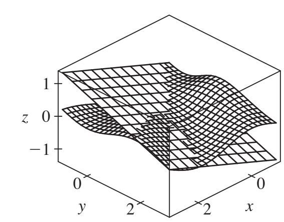
EXERCÍCIOS 14.4 ■ PÁGINA 855

1. $z = 8x - 2y$ **3.** $x + y - 2z = 0$ **5.** $z = y$

7.



9.



11. $2x + \frac{1}{4}y - 1$ **13.** $\frac{1}{9}x - \frac{2}{9}y + \frac{2}{3}$ **15.** $1 - \pi y$

19. $-\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{20}{3}$; 2,846 **21.** $\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{6}{7}z$; 6,9914

23. $2T + 0{,}3H - 40{,}5$; 44,4ºC

25. $dz = 3x^2 \ln(y^2)dx + (2x^3/y)dy$

27. $dm = 5p^4q^3dp + 3p^5q^2dq$

29. $dR = \beta^2 \cos \gamma\, d\alpha + 2\alpha\beta \cos \gamma d\beta - \alpha\beta^2\, \text{sen}\, \gamma\, d\gamma$

31. $\Delta z = 0{,}9225, dz = 0{,}9$ **33.** 5,4 cm^2 **35.** 16 cm^3

37. 7,2 m^2 **39.** $\frac{1}{17} \approx 0{,}059$ **41.** 2,3%

43. $\varepsilon_1 = \Delta x, \varepsilon_2 = \Delta y$

EXERCÍCIOS 14.5 ■ PÁGINA 863

1. $4(2xy + y^2)t^3 - 3(x^2\ 2xy)t^2$

3. $\pi \cos x \cos y - (\text{sen}\, x\, \text{sen}\, y)/(2\sqrt{t})$

5. $e^{y/z}[2t - (x/z) - (2xy/z^2)]$

7. $\partial z/\partial s = 2xy^3 \cos t + 3x^2y^2\, \text{sen}\, t,$
$\partial z/\partial t = -2sxy^3\, \text{sen}\, t + 3sx^2y^2 \cos t$

9. $\partial z/\partial s = t^2 \cos\theta \cos\phi - 2st \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$,
$\partial z/\partial t = 2st \cos\theta \cos\phi - s^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi$

11. $\dfrac{\partial z}{\partial s} = e^r\left(t\cos\theta - \dfrac{s}{\sqrt{s^2+t^2}}\operatorname{sen}\theta\right)$

$\dfrac{\partial z}{\partial t} = e^r\left(s\cos\theta - \dfrac{t}{\sqrt{s^2+t^2}}\operatorname{sen}\theta\right)$

13. 62 **15.** 7, 2

17. $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial s} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s},$

$\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t},$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial x},$

$\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial w}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial s}\dfrac{\partial s}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial t}\dfrac{\partial t}{\partial y}$

21. 85, 178, 54 **23.** $\frac{9}{7}, \frac{9}{7}$ **25.** 36, 24, 30

27. $\dfrac{4(xy)^{3/2} - y}{x - 2x^2\sqrt{xy}}$ **29.** $\dfrac{\operatorname{sen}(x-y) + e^y}{\operatorname{sen}(x-y) - xe^y}$

31. $\dfrac{3yz - 2x}{2z - 3xy}, \dfrac{3xz - 2y}{2z - 3xy}$

33. $\dfrac{1 + y^2z^2}{1 + y + y^2z^2}, -\dfrac{z}{1 + y + y^2z^2}$

35. 2ºC/s **37.** $\approx$ 0,33 m/s por minuto

39. (a) 6 m^3/s (b) 10 m^2/s (c) 0 m/s

41. $\approx$ 0,27 L/s **43.** $-1/(12\sqrt{3})$ rad/s

45. (a) $\partial z/\partial r = (\partial z/\partial x)\cos\theta + (\partial z/\partial y)\operatorname{sen}\theta$,
$\partial z/\partial\theta = -(\partial z/\partial x)r\operatorname{sen}\theta + (\partial z/\partial y)r\cos\theta$

51. $4rs\,\partial^2 z/\partial x^2 + (4r^2 + 4s^2)\partial^2 z/\partial x\partial y + 4rs\,\partial^2 z/\partial y^2 + 2\,\partial z/\partial y$

EXERCÍCIOS 14.6 ■ PÁGINA 874

1. $\approx$ 0,008 hPa/km **3.** $\approx$ 0,778 **5.** $2 + \sqrt{3}/2$

7. (a) $\nabla f(x, y) = \langle 5y^2 - 12x^2y, 10xy - 4x^3\rangle$ (b) $\langle -4, 16\rangle$
(c) 172/13

9. (a) $\langle e^{2yz}, 2xze^{2yz}, 2xye^{2yz}\rangle$ (b) $\langle 1, 12, 0\rangle$ (c) $-\frac{22}{3}$

11. 23/10 **13.** $-8/\sqrt{10}$ **15.** $4/\sqrt{30}$ **17.** $9/(2\sqrt{5})$

19. 2/5 **21.** $4\sqrt{2}, \langle -1, 1\rangle$ **23.** $1, \langle 0, 1\rangle$

25. $1, \langle 3, 6, -2\rangle$ **27.** (b) $\langle -12, 92\rangle$

29. Todos os pontos na reta $y = x + 1$ **31.** (a) $40/(3\sqrt{3})$

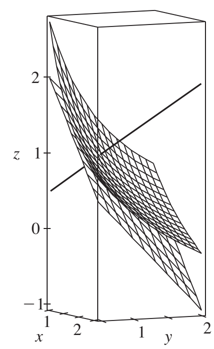
33. (a) $32/\sqrt{3}$ (b) $\langle 38, 6, 12\rangle$ (c) $2\sqrt{406}$ **35.** $\frac{327}{13}$

39. (a) $x + y + z = 11$ (b) $x - 3 = y - 3 = z - 5$

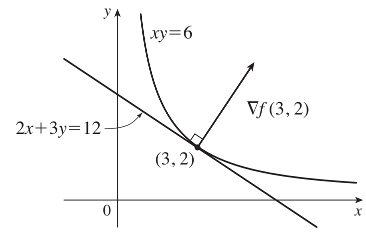
41. (a) $4x - 5y - z = 4$ (b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{-5} = \dfrac{z+1}{-1}$

43. (a) $x + y - z = 1$ (b) $x - 1 = y = -z$

45.



47. $\langle 2, 3\rangle$, $2x + 3y = 12$



53. Não **59.** $x = -1 - 10t, y = 1 - 16t, z = 2 - 12t$

63. Se $\mathbf{u} = \langle a, b\rangle$ e $\mathbf{v} = \langle c, d\rangle$, então $af_x + bf_y$ e $cf_x + df_y$ são conhecidos, de modo que podemos resolver as equações lineares para f_x e f_y.

EXERCÍCIOS 14.7 ■ PÁGINA 884

1. (a) f tem um mínimo local em (1, 1).
(b) f tem um ponto de sela em (1, 1).

3. Mínimo local em (1, 1), ponto de sela em (0, 0)

5. Máximo $f(-1, \frac{1}{2}) = 11$

7. Mínimo $f(0, 0) = 4$, pontos de sela em $(\pm\sqrt{2}, -1)$

9. Ponto de sela em (1, 2)

11. Mínimo $f(2, 1) = -8$, ponto de sela em (0, 0)

13. Nenhum **15.** Mínimo $f(0, 0) = 0$, ponto de sela em $(\pm 1, 0)$

17. Mínimo $f(0, 1) = f(\pi, -1) = f(2\pi, 1) = -1$, ponto de sela em $(\pi/2, 0), (3\pi/2, 0)$

21. Mínimos $f(1, \pm 1) = 3, f(-1, \pm 1) = 3$

23. Máximo $f(\pi/3, \pi/3) = 3\sqrt{3}/2$,
mínimo $f(5\pi/3, 5\pi/3) = -3\sqrt{3}/2$, ponto de sela em (π, π)

25. Mínimos $f(-1{,}714, 0) \approx -9{,}200, f(1{,}402, 0) \approx 0{,}242$, ponto de sela (0,312, 0), ponto mais baixo $(-1{,}714, 0, -9{,}200)$

27. Máximos $f(-1{,}267, 0) \approx 1{,}310, f(1{,}629, \pm 1{,}063) \approx 8{,}105$, pontos de sela em $(-0{,}259, 0), (1{,}526, 0)$, pontos mais altos $(1{,}629, \pm 1{,}063, 8{,}105)$

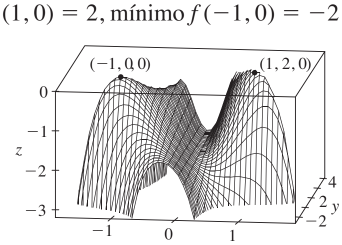
29. Máximo $f(2, 0) = 9$, mínimo $f(0, 3) = -14$

31. Máximo $f(\pm 1, 1) = 7$, mínimo $f(0, 0) = 4$

33. Máximo $f(3, 0) = 83$, mínimo $f(1, 1) = 0$

35. Máximo $f(1, 0) = 2$, mínimo $f(-1, 0) = -2$

37.



39. $\sqrt{3}$ **41.** $(2, 1, \sqrt{5}), (2, 1, -\sqrt{5})$ **43.** $\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}$

45. $8r^3/(3\sqrt{3})$ **47.** $\frac{4}{3}$ **49.** Cubo, comprimento da aresta $c/12$

51. Base quadrada de lado 40 cm, altura 20 cm **53.** $L^3/(3\sqrt{3})$

EXERCÍCIOS 14.8 ■ PÁGINA 893

1. $\approx 59, 30$

3. Nenhum máximo, mínimos $f(1, 1) = f(-1, -1) = 2$

5. Máximos $f(\pm 2, 1) = 4$, mínimos $f(\pm 2, -1) = -4$

7. Máximo $f(1, 3, 5) = 70$, mínimo $f(-1, -3, -5) = -70$

9. Máximo $2/\sqrt{3}$, mínimo $-2/\sqrt{3}$

11. Máximo $\sqrt{3}$, mínimo 1

13. Máximo $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2$, mínimo $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -2$

15. Máximo $f(1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2}$,
mínimo $f(1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}$

17. Máximo $\frac{3}{2}$, mínimo $\frac{1}{2}$

19. Máximos $f(\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$,
mínimos $f(\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/(2\sqrt{2})) = e^{-1/4}$

27-37. Veja os Exercícios 39-49 na Seção 14.7.

39. $L^3/(3\sqrt{3})$

41. Mais próximo $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, mais longe $(-1, -1, 2)$

43. Máximo $\approx 9{,}7938$, mínimo $\approx -5{,}3506$

45. (a) c/n (b) Quando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$

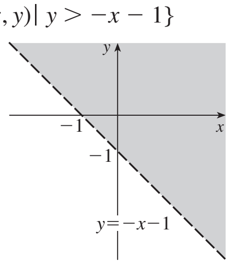
CAPÍTULO 14 REVISÃO ■ PÁGINA 897

Testes Verdadeiro-Falso

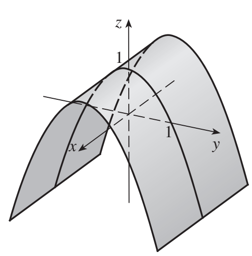
1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Falso
7. Verdadeiro **9.** Falso **11.** Verdadeiro

Exercícios

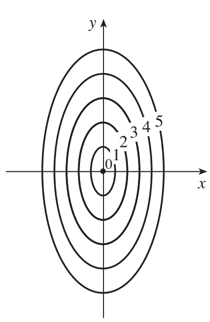
1. $\{(x, y) \mid y > -x - 1\}$



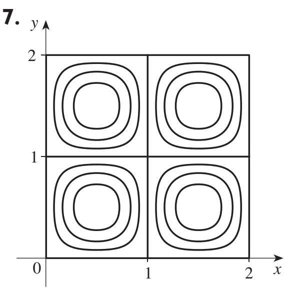
3.



5.



7.



9. $\frac{2}{3}$

11. (a) $\approx 3{,}5$ºC/m, $-3{,}0$ºC/m
(b) $\approx 0{,}35$ºC/m pela Equação 14.6.9 (a Definição 14.6.2 dá $\approx 1{,}1$ºC/m.) (c) $-0{,}25$

13. $f_x = 1/\sqrt{2x + y^2}$, $f_y = y/\sqrt{2x + y^2}$

15. $g_u = \operatorname{tg}^{-1} v$, $g_v = u/(1 + v^2)$

17. $T_p = \ln(q + e^r)$, $T_q = p/(q + e^r)$, $T_r = pe^r/(q + e^r)$

19. $f_{xx} = 24x$, $f_{xy} = -2y = f_{yx}$, $f_{yy} = -2x$

21. $f_{xx} = k(k-1)x^{k-2}y^l z^m$, $f_{xy} = klx^{k-1}y^{l-1}z^m = f_{yx}$,
$f_{xz} = kmx^{k-1}y^l z^{m-1} = f_{zx}$, $f_{yy} = l(l-1)x^k y^{l-2}z^m$,
$f_{yz} = lmx^k y^{l-1}z^{m-1} = f_{zy}$, $f_{zz} = m(m-1)x^k y^l z^{m-2}$

25. (a) $z = 8x + 4y + 1$ (b) $\dfrac{x-1}{8} = \dfrac{y+2}{4} = 1 - z$

27. (a) $2x - 2y - 3z = 3$ (b) $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-4} = \dfrac{z-1}{-6}$

29. (a) $4x - y - 2z = 6$
(b) $x = 3 + 8t$, $y = 4 - 2t$, $z = 1 - 4t$

31. $(2, \frac{1}{2}, -1)$, $(-2, -\frac{1}{2}, 1)$

33. $60x + \frac{24}{5}y + \frac{32}{5}z - 120$; $38{,}656$

35. $2xy^3(1 + 6p) + 3x^2y^2(pe^p + e^p) + 4z^3(p\cos p + \operatorname{sen} p)$

37. $-47, 108$ **43.** $ze^{x\sqrt{y}}\langle z\sqrt{y}, xz/(2\sqrt{y}), 2\rangle$ **45.** $\frac{43}{5}$

47. $\sqrt{145}/2$, $\langle 4, \frac{9}{2}\rangle$ **49.** $\approx \frac{5}{8}$ nós/mi

51. Mínimo $f(-4, 1) = -11$

53. Máximo $f(1, 1) = 1$; pontos de sela $(0, 0), (0, 3), (3, 0)$

55. Máximo $f(1, 2) = 4$, mínimo $f(2, 4) = -64$

57. Máximo $f(-1, 0) = 2$, mínimo $f(1, \pm 1) = -3$, pontos de sela $(-1, \pm 1)$, $(1, 0)$

59. Máximo $f(\pm\sqrt{2/3}, 1/\sqrt{3}) = 2/(3\sqrt{3})$,
mínimo $f(\pm\sqrt{2/3}, -1/\sqrt{3}) = -2/(3\sqrt{3})$

61. Máximo 1, mínimo -1

63. $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$, $(\pm 3^{-1/4}, 3^{-1/4}\sqrt{2}, \pm 3^{1/4})$

65. $P(2 - \sqrt{3})$, $P(3 - \sqrt{3})/6$, $P(2\sqrt{3} - 3)/3$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 902

1. L^2W^2, $\frac{1}{4}L^2W^2$ **3.** (a) $x = w/3$, base $= w/3$ (b) Sim

7. $\sqrt{6}/2$, $3\sqrt{2}/2$

CAPÍTULO 15

EXERCÍCIOS 15.1 ■ PÁGINA 912

1. (a) 288 (b) 144

3. (a) $\pi^2/2 \approx 4{,}935$ (b) 0

5. (a) -6 (b) 3,5

7. $U < V < L$

9. (a) ≈ 248 (b) 15,5

11. 60 **13.** 3

15. 1,141606, 1,143191, 1,143535, 1,143617, 1,143637, 1,143642

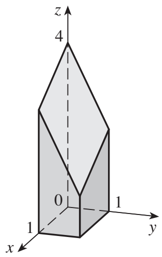
EXERCÍCIOS 15.2 ■ PÁGINA 917

1. $500y^3$, $3x^2$ **3.** 10 **5.** 1 **7.** 261,632/45 **9.** $\frac{21}{2}\ln 2$

11. 0 **13.** π **15.** $\frac{21}{2}$ **17.** $9\ln 2$

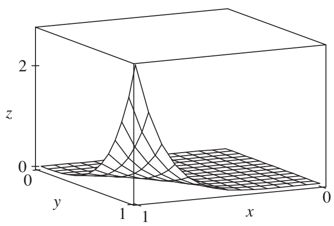
19. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1) - \frac{1}{12}\pi$ **21.** $\frac{1}{2}(e^2 - 3)$

23.



25. 47,5 **27.** $\frac{166}{27}$ **29.** 2 **31.** $\frac{64}{3}$

33. $21e - 57$



35. $\frac{5}{6}$

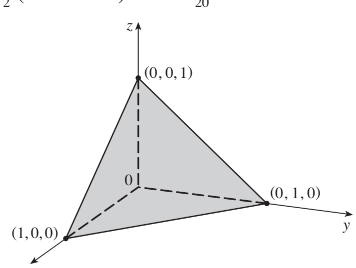
37. O Teorema de Fubini não se aplica. O integrando tem uma descontinuidade infinita na origem.

EXERCÍCIOS 15.3 ■ PÁGINA 924

1. $\frac{9}{20}$ **3.** $\frac{3}{10}$ **5.** $e - 1$ **7.** $\frac{256}{21}$ **9.** π **11.** $\frac{1}{2}e^{16} - \frac{17}{2}$

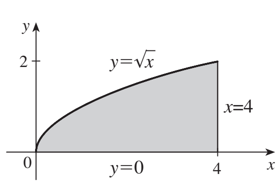
13. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$ **15.** $\frac{147}{20}$ **17.** 0 **19.** $\frac{6}{35}$ **21.** $\frac{31}{8}$

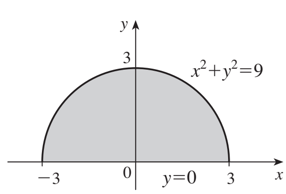
33.



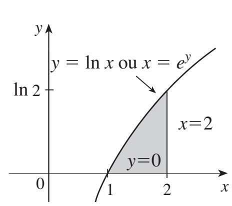
35. 13 984 735 616/14 549 535 **37.** $\pi/2$

39. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x, y)\, dx\, dy$ **41.** $\int_{-3}^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\, dy\, dx$





43. $\int_0^{\ln 2} \int_{e^y}^2 x^2 f(x, y)\, dx\, dy$



45. $\frac{1}{6}(e^9 - 1)$ **47.** $\frac{1}{3}\ln 9$ **49.** $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ **51.** 1

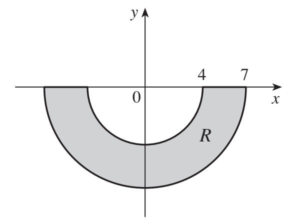
53. $(\pi/16)e^{-1/16} \leqslant \iint_Q e^{-(x^2+y^2)^2}\, dA \leqslant \pi/16$ **55.** $\frac{3}{4}$

59. 8π **61.** $2\pi/3$

EXERCÍCIOS 15.4 ■ PÁGINA 930

1. $\int_0^{3\pi/2} \int_0^4 f(r\cos\theta) r\, dr\, d\theta$ **3.** $\int_{-1}^1 \int_0^{(x+1)/2} f(x, y)\, dy\, dx$

5. $33\pi/2$



7. 0 **9.** $\frac{1}{2}\pi \operatorname{sen} 9$ **11.** $(\pi/2)(1 - e^{-4})$ **13.** $\frac{3}{64}\pi^2$

15. $\pi/12$ **17.** $\frac{1}{8}(\pi - 2)$ **19.** $\frac{16}{3}\pi$ **21.** $\frac{4}{3}\pi$

23. $\frac{4}{3}\pi a^3$ **25.** $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})]$

27. $(8\pi/3)(64 - 24\sqrt{3})$

29. $\frac{1}{2}\pi(1 - \cos 9)$ **31.** $2\sqrt{2}/3$

33. $37{,}5\pi \text{m}^3$ **35.** $\frac{15}{16}$ **37.** (a) $\sqrt{\pi}/4$ (b) $\sqrt{\pi}/2$

EXERCÍCIOS 15.5 ■ PÁGINA 939

1. $\frac{64}{3}$ C **3.** $\frac{4}{3}, \left(\frac{4}{3}, 0\right)$ **5.** $6, \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$

7. $\frac{1}{4}(e^2 - 1), \left(\frac{e^2 - 1}{2(e^2 - 1)}, \frac{4(e^3 - 1)}{9(e^2 - 1)}\right)$

9. $L/4, (L/2, 16/(9\pi))$ **11.** $\left(\frac{3}{8}, 3\pi/16\right)$ **13.** $(0, 45/(14\pi))$

15. $(2a/5, 2a/5)$ se o vértice for $(0, 0)$ e os lados estiverem nos eixos positivos

17. $\frac{1}{16}(e^4 - 1), \frac{1}{8}(e^2 - 1), \frac{1}{16}(e^4 + 2e^2 - 3)$

19. $7ka^6/180, 7ka^6/180, 7ka^6/90$ se o vértice for $(0, 0)$ e os lados estiverem nos eixos positivos

21. $m = \pi^2/8\ (\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{1}{\pi}, \frac{16}{9\pi}\right) I_x = 3\pi^2/64$

$I_y = \frac{1}{16}(\pi^4 - 3\pi^2), I_0 = \pi^4/16 - 9\pi^2/64$

23. $\rho bh^3/3, \rho b^3h/3; b/\sqrt{3}\ h/\sqrt{3}$

25. $\rho a^4/16, \rho a^4/16; a/2, a/2$

27. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0,375 (c) $\frac{5}{48} \approx 0{,}1042$

29. (b) (i) $e^{-0,2} \approx 0{,}8187$
(ii) $1 + e^{-1,8} - e^{-0,8} - e^{-1} \approx 0{,}3481$ (c) 2, 5

31. (a) $\approx 0{,}500$ (b) $\approx 0{,}632$

33. (a) $\iint_D (k/20)[20 - \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}]\, dA$, onde D é o disco de raio 10 km centrado no centro da cidade
(b) $200\pi k/3 \approx 209k, 200\left(\pi/2 - \frac{8}{9}\right)k \approx 136k$, na periferia

EXERCÍCIOS 15.6 ■ PÁGINA 948

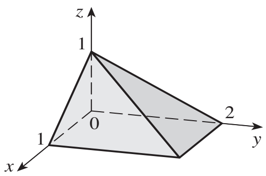
1. $\frac{27}{4}$ **3.** 1 **5.** $\frac{1}{3}(e^3 - 1)$ **7.** $-\frac{1}{3}$ **9.** 4 **11.** $\frac{65}{28}$

13. $8/(3e)$ **15.** $\frac{1}{60}$ **17.** $16\pi/3$ **19.** $\frac{16}{3}$ **21.** $\frac{8}{15}$

23. (a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz\, dy\, dx$ (b) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{3}$

25. 60,533

27.



29. $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}}\int_{-\sqrt{4-x^2-y}/2}^{\sqrt{4-x^2-y}/2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4-4z^2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{4-y}/2}^{\sqrt{4-y}/2}\int_{-\sqrt{4-y-4z^2}}^{\sqrt{4-y-4z^2}} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}/2}^{\sqrt{4-x^2}/2}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{4-4z^2}}^{\sqrt{4-4z^2}}\int_{0}^{4-x^2-4z^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

31. $\int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{4}\int_{0}^{2-y/2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{4}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\int_{0}^{2-y/2} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$
$= \int_{0}^{2}\int_{0}^{4-2z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$
$= \int_{0}^{4}\int_{0}^{2-y/2}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$
$= \int_{-2}^{2}\int_{0}^{2-x^2/2}\int_{x^2}^{4-2z} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$
$= \int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{4-2z}}^{\sqrt{4-2z}}\int_{x^2}^{4-2z} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$

33. $\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{1}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{y^2}\int_{0}^{1-y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-z}\int_{0}^{y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-y}\int_{0}^{y^2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-\sqrt{x}}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-z)^2}\int_{\sqrt{x}}^{1-z} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

35. $\int_{0}^{1}\int_{y}^{1}\int_{0}^{y} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{y} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{y}^{1} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{y}\int_{y}^{1} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$
$= \int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{z}^{x} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{z}^{1}\int_{z}^{x} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$

37. $\frac{79}{30}, \left(\frac{358}{553}, \frac{33}{79}, \frac{571}{553}\right)$

39. $a, (7a/12, 7a/12, 7a/12)$

41. $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}kL^5$

43. $\frac{1}{2}\pi kha^4$

45. (a) $m = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} \sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$
(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$\bar{x} = (1/m)\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} x\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$
$\bar{y} = (1/m)\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} y\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$
$\bar{z} = (1/m)\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$

(c) $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{1}^{5-y} (x^2+y^2)^{3/2}\,dz\,dy\,dx$

47. (a) $\frac{3}{32}\pi + \frac{11}{24}$
(b) $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{28}{9\pi+44}, \frac{30\pi+128}{45\pi+220}, \frac{45\pi+208}{135\pi+660}\right)$

(c) $\frac{1}{240}(68 + 15\pi)$

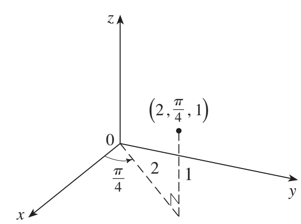
49. (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$ (c) $\frac{1}{5\,760}$

51. $L^3/8$

53. A região limitada pelo elipsoide $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

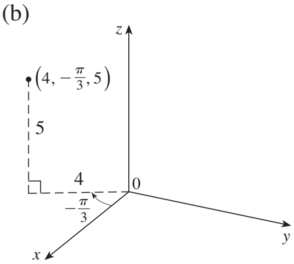
EXERCÍCIOS 15.7 ■ PÁGINA 953

1. (a)



$(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$

(b)



$(2, -2\sqrt{3}, 5)$

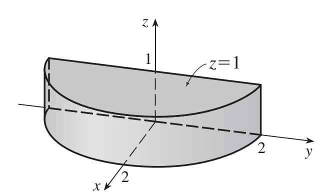
3. (a) $(\sqrt{2}, 7\pi/4, 4)$ (b) $(2, 4\pi/3, 2)$

5. Semiplano vertical pelo eixo z

7. Paraboloide circular

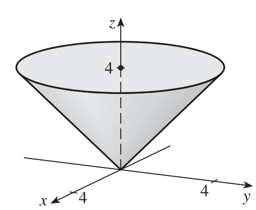
9. (a) $z = r^2$ (b) $r = 2$ sen θ

11.



13. Coordenadas cilíndricas: $6 \leqslant r \leqslant 7, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant 20$

15.



$64\pi/3$

17. 384π

19. 0

21. $2\pi/5$

23. (a) 162π (b) $(0, 0, 15)$

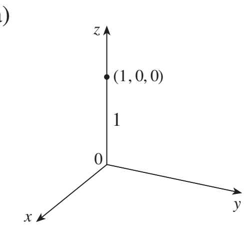
25. $\pi Ka^2/8, (0, 0, 2a/3)$

27. 0

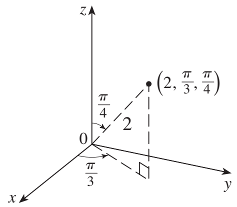
29. (a) $\iiint_C h(P)\,dV$, onde C é o cone (b) $\approx 4{,}4 \times 10^{18}$ J

EXERCÍCIOS 15.8 ■ PÁGINA 959

1. (a)



$(0, 0, 1)$

(b) 

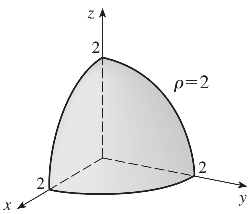
$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{6}, \sqrt{2}\right)$

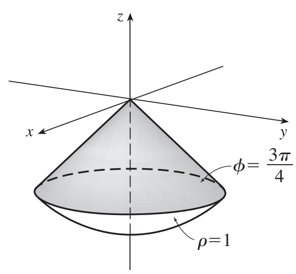
3. (a) $(4, \pi/3, \pi/6)$ (b) $(\sqrt{2}, 3\pi/2, 3\pi/4)$

5. Semicone

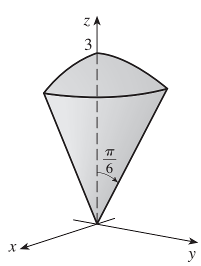
7. Esfera, raio $\frac{1}{2}$, centro $(0, \frac{1}{2}, 0)$

9. (a) $\cos^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi$ (b) $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi) = 9$

11. 

13. 

15. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4, 0 \leqslant \rho \leqslant \cos\phi$

17. 

$(9\pi/4)(2 - \sqrt{3})$

19. $\int_0^{\pi/2}\int_0^3\int_0^2 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta$

21. $312\,500\pi/7$ **23.** $15\pi/16$ **25.** $1562\pi/15$

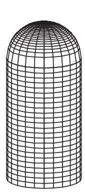
27. $(\sqrt{3} - 1)\pi a^3/3$ **29.** (a) 10π (b) $(0, 0, 2{,}1)$

31. $\left(0, \frac{525}{296}, 0\right)$

33. (a) $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$ (b) $4K\pi a^5/15$

35. $(2\pi/3)[1 - (1/\sqrt{2})], (0, 0, 3/[8(2 - \sqrt{2})])$

37. $5\pi/6$ **39.** $(4\sqrt{2} - 5)/15$

41. 

43. $136\pi/99$

EXERCÍCIOS 15.9 ■ PÁGINA 968

1. 16 **3.** 0 **5.** $2uvw$

7. O paralelogramo com vértices $(0, 0), (6, 3), (12, 1), (6, -2)$

9. A região limitada pela reta $y = 1$, pelo eixo y e por $y = \sqrt{x}$

11. -3 **13.** 6π **15.** $2 \ln 3$

17. (a) $\frac{4}{3}\pi abc$ (b) $1\,083 \times 10^{12}$ km^3

19. $\frac{8}{5}\ln 8$ **21.** $\frac{3}{2}\operatorname{sen} 1$ **23.** $e - e^{-1}$

CAPÍTULO 15 REVISÃO ■ PÁGINA 969

Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Verdadeiro **7.** Falso

Exercícios

1. $\approx 64{,}0$ **3.** $4e^2 - 4e + 3$ **5.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **7.** $\frac{2}{3}$

9. $\int_0^{\pi}\int_2^4 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta$

11. A região dentro do laço da rosácea de quatro pétalas $r = \operatorname{sen} 2\theta$ no primeiro quadrante

13. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **15.** $\frac{1}{2}e^6 - \frac{7}{2}$ **17.** $\frac{1}{4}\ln 2$ **19.** 8

21. $81\pi/5$ **23.** 40,5 **25.** $\pi/96$ **27.** $\frac{64}{15}$

29. 176 **31.** $\frac{2}{3}$ **33.** $2ma^3/9$

35. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{8}{15}\right)$

(c) $I_x = \frac{1}{12}, Iy = \frac{1}{24}; \overline{\overline{y}} = 1/\sqrt{3}, \overline{\overline{x}} = 1/\sqrt{6}$

37. $(0, 0, h/4)$

39. 97,2 **41.** 0,0512

43. (a) $\frac{1}{15}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{45}$

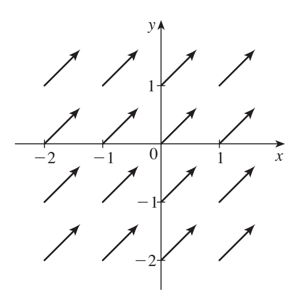
45. $\int_0^1\int_0^{1-z}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ **47.** $-\ln 2$ **49.** 0

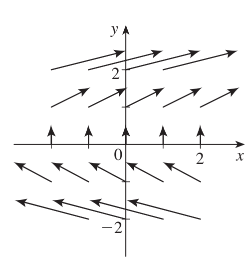
PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 972

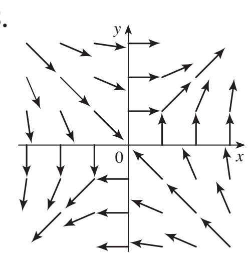
1. 30 **3.** $\frac{1}{2}\operatorname{sen} 1$ **7.** (b) 0,90

CAPÍTULO 16

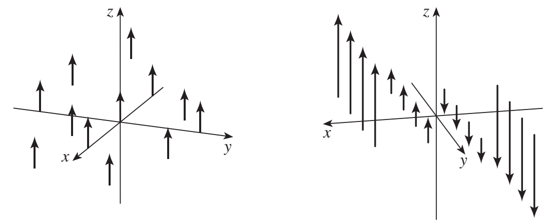
EXERCÍCIOS 16.1 ■ PÁGINA 980

1. 

3. 

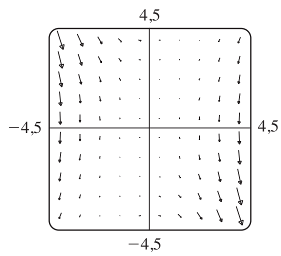
5. 

7.



11. II **13.** I **15.** IV **17.** III

19.

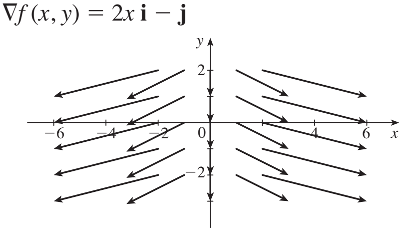


A reta $y = 2x$

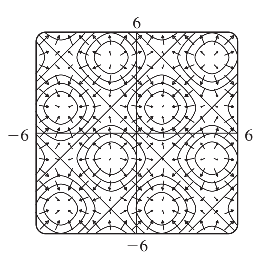
21. $\nabla f(x, y) = \dfrac{1}{x + 2y}\,\mathbf{i} + \dfrac{2}{x + 2y}\,\mathbf{j}$

23. $\nabla f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{i} + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{j} + \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,\mathbf{k}$

25. $\nabla f(x, y) = 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$

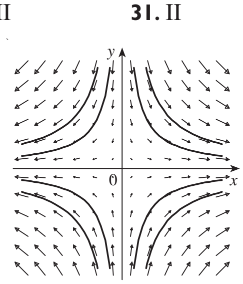


27.



29. III **31.** II **33.** (2,04, 1,03)

35.



$y = C/x$

(b) $y = 1/x,\ x > 0$

EXERCÍCIOS 16.2 ■ PÁGINA 990

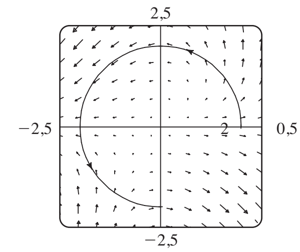
1. $\frac{1}{54}(145^{3/2} - 1)$ **3.** 1638,4 **5.** $\frac{243}{8}$ **7.** $\frac{17}{3}$ **9.** 320

11. $\frac{1}{12}\sqrt{14}\,(e^6 - 1)$ **13.** $\frac{1}{5}$ **15.** $\frac{97}{3}$

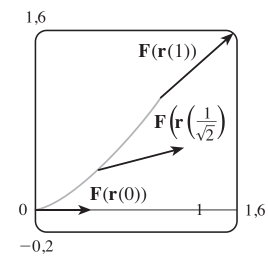
17. (a) Positivo (b) Negativo

19. 45 **21.** $\frac{6}{5} - \cos 1 - \operatorname{sen} 1$ **23.** 1,9633 **25.** 15,0074

27. $3\pi + \frac{2}{3}$



29. (a) $\frac{11}{8} - 1/e$ (b)



31. $\frac{172\,704}{5\,632\,705}\sqrt{2}(1 - e^{-14\pi})$ **33.** $2\pi k,\ (4/\pi, 0)$

35. (a) $\bar{x} = (1/m)\int_C x\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{y} = (1/m)\int_C y\rho(x, y, z)\,ds$,
$\bar{z} = (1/m)\int_C z\rho(x, y, z)\,ds$, onde $m = \int_C \rho(x, y, z)\,ds$
(b) $(0, 0, 3\pi)$

37. $I_x = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}\right),\ I_y = k\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3}\right)$

39. $2\pi^2$ **41.** 26 **43.** $1,67 \times 10^4$ pés-lb

45. (b) Sim **47.** ≈22 J

EXERCÍCIOS 16.3 ■ PÁGINA 999

1. 40 **3.** $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2 - 8y + K$

5. $f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + K$ **7.** $f(x, y) = ye^x + x \operatorname{sen} y + K$

9. $f(x, y) = x \ln y + x^2y^3 + K$

11. (b) 16 **13.** (a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2$ (b) 2

15. (a) $f(x, y, z) = xyz + z^2$ (b) 77

17. (a) $f(x, y, z) = xy^2 \cos z$ (b) 0

19. $25 \operatorname{sen} 1 - 1$ **21.** 30 **23.** Não **25.** Conservativo

29. (a) Sim (b) Sim (c) Sim

31. (a) Sim (b) Sim (c) Não

EXERCÍCIOS 16.4 ■ PÁGINA 1006

1. 8π **3.** $\frac{2}{3}$ **5.** $e - 1$ **7.** $\frac{1}{3}$ **9.** -24π **11.** $\frac{4}{3} - 2\pi$

13. $\frac{625}{2}\pi$ **15.** $-8e + 48e^{-1}$ **17.** $-\frac{1}{12}$ **19.** 3π **21.** (c) $\frac{9}{2}$

23. $(4a/3\pi, 4a/3\pi)$ se a região for a parte do disco $x^2 + y^2 = a^2$ no primeiro quadrante

EXERCÍCIOS 16.5 ■ PÁGINA 1013

1. (a) $-x^2\mathbf{i} + 3xy\,\mathbf{j} - xz\,\mathbf{k}$ (b) yz

3. (a) $\mathbf{0}$ (b) 1

5. (a) $\mathbf{0}$ (b) $2/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7. (a) $\langle 1/y, -1/x, 1/x \rangle$ (b) $1/x + 1/y + 1/z$

9. (a) Negativo (b) rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$

11. (a) Zero (b) rot $\mathbf{F}$ aponta na direção de z negativo

13. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + K$ **15.** $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + K$

17. Não conservativo **19.** Não

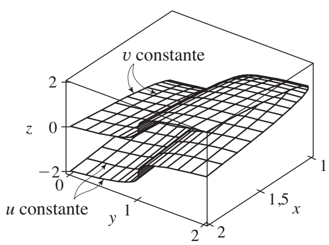
EXERCÍCIOS 16.6 ■ PÁGINA 1023

1. P: não; Q: sim

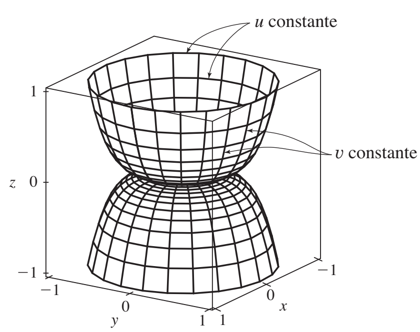
3. Plano por $(0, 3, 1)$ contendo os vetores $\langle 1, 0, 4 \rangle$, $\langle 1, -1, 5 \rangle$

5. Cilindro circular com eixo no eixo x

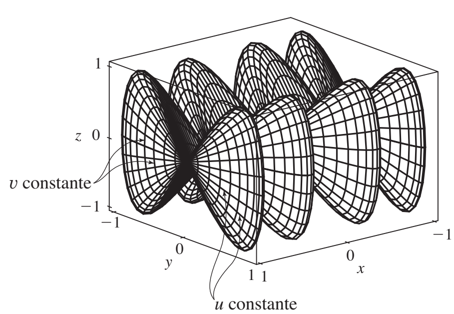
7.



9.



11.



13. IV **15.** II **17.** III

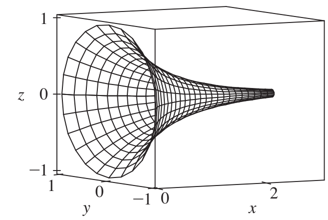
19. $x = 1 + u + v,\ y = 2 + u - v,\ z = -3 - u + v$

21. $x = x,\ z = z,\ y = \sqrt{1 - x^2 + z^2}$

23. $x = 2 \operatorname{sen}\phi \cos\theta,\ y = 2 \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta,$
$z = 2\cos\phi,\ 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$
[ou $x = x,\ y = y,\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 \leqslant 2$]

25. $x = x,\ y = e^{-x}\cos\theta,\ z = 4 \operatorname{sen}\theta,\ 0 \leqslant x \leqslant 5,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

29. $x = x,\ y = e^{-x}\cos\theta,$
$z = e^{-x}\operatorname{sen}\theta,\ 0 \leqslant x \leqslant 3$
$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$



31. (a) Inverte o sentido (b) O número de voltas dobra

33. $3x - y + 3z = 3$ **35.** $-x + 2z = 1$ **37.** $3\sqrt{14}$

39. $\frac{4}{15}(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)$ **41.** $(2\pi/3)(2\sqrt{2} - 1)$

43. $(\pi/6)(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$

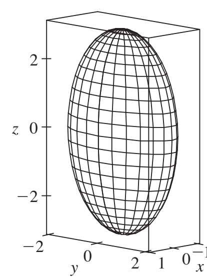
45. $\frac{1}{2}\sqrt{21} + \frac{17}{4}[\ln(2 + \sqrt{21}) - \ln\sqrt{17}]$ **47.** 4

49. 13 9783

51. (a) 24 2055 (b) 24 2476

53. $\frac{45}{8}\sqrt{14} + \frac{15}{16}\ln[(11\sqrt{5} + 3\sqrt{70})/(3\sqrt{5} + \sqrt{70})]$

55. (b)



(c) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{36 \operatorname{sen}^4 u \cos^2 v + 9 \operatorname{sen}^4 u \operatorname{sen}^2 v + 4\cos^2 u \operatorname{sen}^2 u}\; du\, dv$

57. 4π **59.** $2a^2(\pi - 2)$

EXERCÍCIOS 16.7 ■ PÁGINA 1034

1. 49,09 **3.** 900π **5.** $171\sqrt{14}$ **7.** $\sqrt{3}/24$

9. $5\sqrt{5}/48 + 1/240$ **11.** $364\sqrt{2}/3\pi$

13. $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$ **15.** 16π **17.** 12

19. $\frac{713}{180}$ **21.** $-\frac{1}{6}$ **23.** 108π **25.** 0 **27.** 48

29. $2\pi + \frac{8}{3}$ **31.** 0,1642 **33.** 3,4895

35. $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [P(\partial h/\partial x) - Q + R(\partial h/\partial z)]\,dA$, onde
D = projeção de S no plano xz

37. $(0, 0, a/2)$

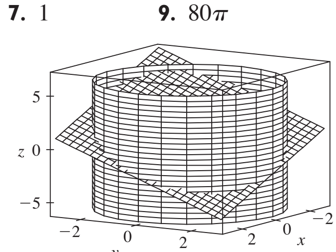
39. (a) $I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,dS$ (b) $4\,329\sqrt{2}/5$

41. 0 kg/s **43.** $\frac{8}{3}\pi a^3 \varepsilon_0$ **45.** $1\,248\pi$

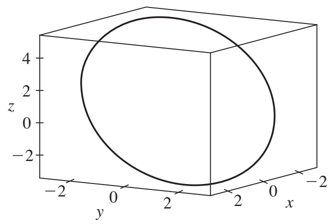
EXERCÍCIOS 16.8 ■ PÁGINA 1039

3. 0 **5.** 0 **7.** 1 **9.** 80π

11. (a) $81\pi/2$ (b)



(c) $x = 3\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$
$z = 1 - 3(\cos t + \text{sen}\,t)$,
$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$



17. 3

EXERCÍCIOS 16.9 ■ PÁGINA 1045

5. 2 **7.** $9\pi/2$ **9.** 0 **11.** $32\pi/3$ **13.** 0

15. $341\sqrt{2}/60 + \frac{81}{20}\,\text{arcsen}(\sqrt{3}/3)$ **17.** $13\pi/20$

19. Negativo em P_1, positivo em P_2

21. div $\mathbf{F} > 0$ nos quadrantes I, II; div $\mathbf{F} < 0$ nos quadrantes III, IV

CAPÍTULO 16 REVISÃO ■ PÁGINA 1048

Testes Verdadeiro-Falso

1. Falso **3.** Verdadeiro **5.** Falso **7.** Verdadeiro

Exercícios

1. (a) Negativo (b) Positivo **3.** $6\sqrt{10}$ **5.** $\frac{4}{15}$

7. $\frac{110}{3}$ **9.** $\frac{11}{12} - 4/e$ **11.** $f(x, y) = e^y + xe^{xy}$ **13.** 0

17. -8π **25.** $\frac{1}{6}(27 - 5\sqrt{5})$

27. $(\pi/60)(391\sqrt{17} + 1)$ **29.** $-64\pi/3$

33. $-\frac{1}{2}$ **37.** -4 **39.** 21

CAPÍTULO 17

EXERCÍCIOS 17.1 ■ PÁGINA 1058

1. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$ **3.** $y = c_1\cos(x/2) + c_2\,\text{sen}(x/2)$

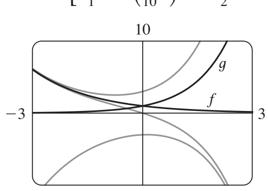
5. $y = c_1e^{2x/3} + c_2\,xe^{2x/3}$ **7.** $y = c_1 + c_2e^{x/2}$

9. $y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\,\text{sen}\,3x)$

11. $y = c_1e^{(\sqrt{3}-1)t/2} + c_2e^{(\sqrt{3}-1)t/2}$

13. $P = e^{-t}\left[c_1\cos\left(\frac{1}{10}t\right) + c_2\,\text{sen}\left(\frac{1}{10}t\right)\right]$

15.



Todas as soluções tendem ou a 0 ou a $\pm\infty$ quando $x \to \pm\infty$.

17. $y = 2e^{-3x/2} + e^{-x}$ **19.** $y = e^{x/2} - 2xe^{x/2}$

21. $y = 3\cos 4x - \text{sen}\,4x$ **23.** $y = e^{-x}(2\cos x + 3\,\text{sen}\,x)$

25. $y = 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 4\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ **27.** $y = \dfrac{e^{x+3}}{e^3 - 1} + \dfrac{e^{2x}}{1 - e^3}$

29. Nenhuma solução

31. $y = e^{-2x}(2\cos 3x - e^{\pi}\,\text{sen}\,3x)$

33. (b) $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, n um inteiro positivo; $y = C\,\text{sen}(n\pi x/L)$

EXERCÍCIOS 17.2 ■ PÁGINA 1064

1. $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$

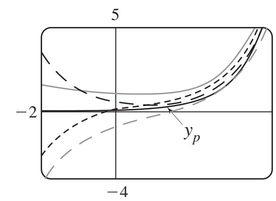
3. $y = c_1 + c_2e^{2x} + \frac{1}{40}\cos 4x - \frac{1}{20}\,\text{sen}\,4x$

5. $y = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\,\text{sen}\,x) + \frac{1}{10}e^{-x}$

7. $y = \frac{3}{2}\cos x + \frac{11}{2}\,\text{sen}\,x + \frac{1}{2}e^x + x^3 - 6x$

9. $y = e^x\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 2\right)$

11.



As soluções são todas assintóticas a $y_p = e^x/10$ quando $x \to \infty$. Exceto por y_p, todas as soluções tendem a ∞ ou $-\infty$ quando $x \to -\infty$.

13. $y_p = Ae^{2x} + (Bx^2 + Cx + D)\cos x + (Ex^2 + Fx + G)\,\text{sen}\,x$

15. $y_p = Ax + (Bx + C)e^{9x}$

17. $y_p = xe^{-x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos 3x + (Dx^2 + Ex + F)\text{sen}\,3x]$

19. $y = c_1\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + c_2\,\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{3}\cos x$

21. $y = c_1e^x + c_2xe^x + e^{2x}$

23. $y = c_1\,\text{sen}\,x + c_2\cos x + \text{sen}\,x\ln(\sec x + \text{tg}\,x) - 1$

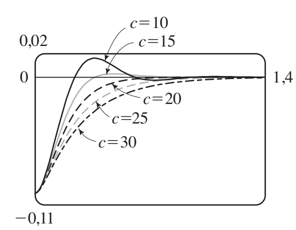
25. $y = [c_1 + \ln(1 + e^{-x})]e^x + [c_2 - e^{-x} + \ln(1 + e^{-x})]e^{2x}$

27. $y = e^x\left[c_1 + c_2x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + x\,\text{tg}^{-1}\,x\right]$

EXERCÍCIOS 17.3 ■ PÁGINA 1071

1. $x = 0{,}35\cos(2\sqrt{5}\,t)$ **3.** $x = -\frac{1}{5}e^{-6t} + \frac{6}{5}e^{-t}$ **5.** $\frac{49}{12}$ kg

7.



13. $Q(t) = (-e^{-10t}/250)(6\cos 20t + 3\,\text{sen}\,20t) + \frac{3}{125}$,
$I(t) = \frac{3}{5}e^{-10t}\,\text{sen}\,20t$

15. $Q(t) = e^{-10t}\left[\frac{3}{250}\cos 20t - \frac{3}{500}\,\text{sen}\,20t\right] - \frac{3}{250}\cos 10t + \frac{3}{125}\,\text{sen}\,10t$

EXERCÍCIOS 17.4 ■ PÁGINA 1076

1. $c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = c_0e^x$ **3.** $c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{3^n n!} = c_0e^{x^3/3}$

5. $c_0\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^n n!}x^{2n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-2)^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

7. $c_0 + c_1\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n} = c_0 - c_1\ln(1 - x)$ for $|x| < 1$

9. $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$

11. $x + \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 2^2 5^2 \cdot \cdots \cdot (3n-1)^2}{(3n+1)!}x^{3n+1}$

CAPÍTULO 17 REVISÃO ■ PÁGINA 1076

Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro

Exercícios

1. $y = c_1e^{5x} + c_2e^{-3x}$ **3.** $y = c_1 \cos(\sqrt{3}\,x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{3}\,x)$

5. $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 1)$

7. $y = c_1e^x + c_2xe^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(x+1)\operatorname{sen} x$

9. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{6} - \frac{1}{5}xe^{-2x}$

11. $y = 5 - 2e^{-6(x-1)}$ **13.** $y = (e^{4x} - e^x)/3$

15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

17. $Q(t) = -0{,}02e^{-10t}(\cos 10t + \operatorname{sen} 10t) + 0{,}03$

19. (c) $2\pi/k \approx 85$ min (d) $\approx 28{,}400$ km/h