Em qualquer caso, precisamos determinar o domínio para θ. Então nos perguntamos: quantas rotações completas são necessárias até que a curva comece a se repetir? Se a resposta for n, então

$$\operatorname{sen}\frac{8(\theta + 2n\pi)}{5} = \operatorname{sen}\left(\frac{8\theta}{5} + \frac{16n\pi}{5}\right) = \operatorname{sen}\frac{8\theta}{5}$$

e assim precisamos que $16n\pi/5$ seja um múltiplo par de π. Isso ocorrerá primeiro quando $n = 5$. Portanto, traçamos a curva inteira se especificarmos que $0 \leq \theta \leq 10\pi$. Trocando de θ para t, temos as equações

$$x = \operatorname{sen}(8t/5)\cos t \qquad y = \operatorname{sen}(8t/5)\operatorname{sen} t \qquad 0 \leq t \leq 10\pi$$

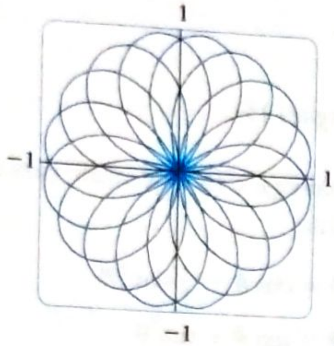


FIGURA 18
$r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$

e a Figura 18 nos mostra a curva resultante. Observe que essa rosácea tem 16 laços. □

EXEMPLO 11 Investigue a família de curvas polares dada por $r = 1 + c \operatorname{sen}\theta$. Como o formato muda conforme c varia? (Essas curvas são chamadas **limaçons**, que em francês significa caracol, por causa do formato dessas curvas para certos valores de c.)

■ No Exercício 55 pediremos que você demonstre analiticamente o que descobriu a partir dos gráficos na Figura 19.

SOLUÇÃO A Figura 19 mostra gráficos desenhados por computador para vários valores de c. Para $c > 1$ existe um laço que reduz de tamanho quando c diminui. Quando $c = 1$, o laço desaparece e a curva torna-se a cardioide que esboçamos no Exemplo 7. Para c entre 1 e $\frac{1}{2}$, a cúspide da cardioide é suavizada e torna-se uma "covinha". Quando c diminui de $\frac{1}{2}$ para 0, a limaçon parece oval. Essa oval se torna mais circular quando $c \to 0$ e quando $c = 0$, a curva é apenas o círculo $r = 1$.

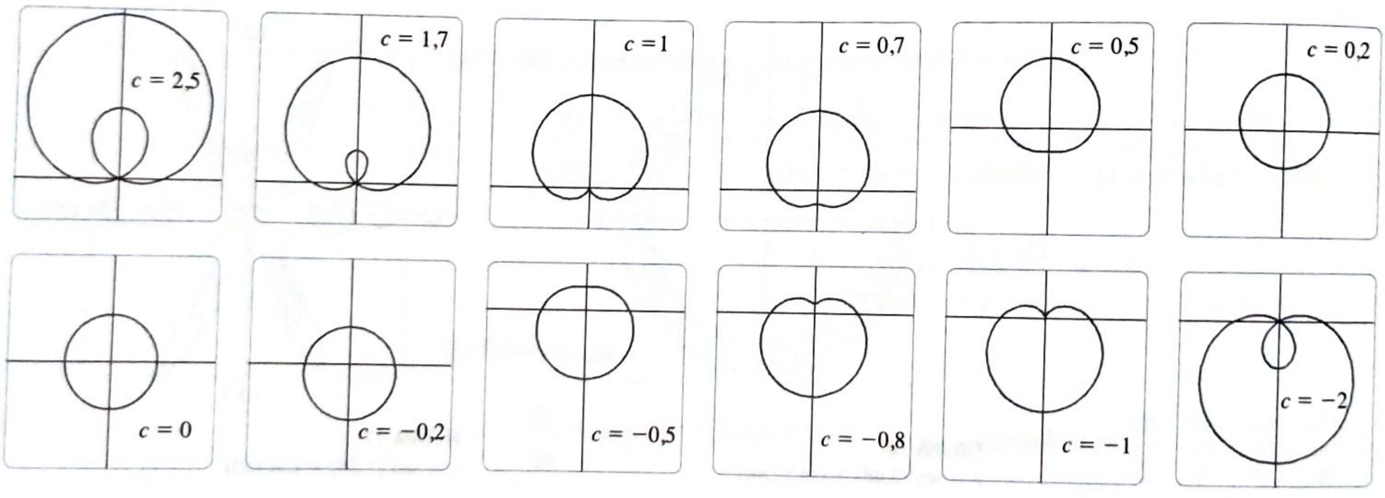


FIGURA 19
Membros da família de limaçons
$r = 1 + c \operatorname{sen}\theta$

As partes restantes da Figura 18 mostram que, quando c se torna negativo, os formatos mudam na ordem inversa. De fato, essas curvas são reflexões ao redor do eixo horizontal das curvas correspondentes com c positivo. □

10.3 EXERCÍCIOS

1-2 Marque o ponto cujas coordenadas polares são dadas. A seguir, encontre dois outros pares de coordenadas polares desse ponto, um com $r > 0$ e o outro com $r < 0$.

1. (a) $(2, \pi/3)$ (b) $(1, -3\pi/4)$ (c) $(-1, \pi/2)$

2. (a) $(1, 7\pi/4)$ (b) $(-3, \pi/6)$ (c) $(1, -1)$

3-4 Marque o ponto cujas coordenadas polares são dadas. A seguir, encontre as coordenadas cartesianas do ponto.

3. (a) $(1, \pi)$ (b) $(2, -2\pi/3)$ (c) $(-2, 3\pi/4)$

4. (a) $(-\sqrt{2}, 5\pi/4)$ (b) $(1, 5\pi/2)$ (c) $(2, -7\pi/6)$

5-6 As coordenadas cartesianas de um ponto são dadas.

(i) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r > 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

(ii) Encontre as coordenadas polares (r, θ) do ponto, onde $r < 0$ e $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

5. (a) $(2, -2)$ (b) $(-1, \sqrt{3})$

6. (a) $(3\sqrt{3}, 3)$ (b) $(1, -2)$

7-12 Esboce a região no plano que consiste em pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas.

7. $1 \leqslant r \leqslant 2$

8. $r \geqslant 0,\ \pi/3 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/3$

9. $0 < r < 4,\ -\pi/2 < \theta < \pi/6$

10. $2 < r \leqslant 5,\ 3\pi/4 < \theta < 5\pi/4$

11. $2 < r < 3,\ 5\pi/3 \leqslant \theta \leqslant 7\pi/3$

12. $r \geqslant 1,\ \pi \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

13. Encontre a distância entre os pontos com coordenadas polares $(2, \pi/3)$ e $(4, 2\pi/3)$.

14. Encontre uma fórmula para a distância entre os pontos com coordenadas polares (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2).

15-20 Encontre a equação cartesiana para a curva descrita pela equação polar dada.

15. $r = 2$ **16.** $r \cos \theta = 1$

17. $r = 3 \operatorname{sen} \theta$ **18.** $r = 2 \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta$

19. $r = \operatorname{cossec} \theta$ **20.** $r = \operatorname{tg} \theta \sec \theta$

21-26 Encontre uma equação polar para a curva representada pela equação cartesiana dada.

21. $y = 5$ **22.** $x^2 + y^2 = 9$

23. $x = -y^2$ **24.** $y = 2x - 1$

25. $x^2 + y^2 = 2cx$ **26.** $xy = 4$

27-28 Para cada uma das curvas descritas, decida se a curva seria mais facilmente dada por uma equação polar ou por uma equação cartesiana. Então, escreva uma equação para a curva.

27. (a) Uma reta que passa pela origem e forma um ângulo de $\pi/6$ com o eixo x positivo.

(b) Uma reta vertical pelo ponto $(3, 3)$.

28. (a) Um círculo com raio 5 e centro $(2, 3)$.

(b) Um círculo com centro na origem e raio 4.

29-48 Esboce a curva com a equação dada.

29. $\theta = -\pi/6$ **30.** $r^2 - 3r + 2 = 0$

31. $r = \operatorname{sen} \theta$ **32.** $r = -3 \cos \theta$

33. $r = 2(1 - \operatorname{sen} \theta),\ \theta \geqslant 0$ **34.** $r = 1 - 3 \cos \theta$

35. $r = \theta,\ \theta \geqslant 0$ **36.** $r = \ln \theta,\ \theta \geqslant 1$

37. $r = \operatorname{sen} 2\theta$ **38.** $r = 2 \cos 3\theta$

39. $r = 2 \cos 4\theta$ **40.** $r = 3 \cos 6\theta$

41. $r = 1 - 2 \operatorname{sen} \theta$ **42.** $r = 2 + \operatorname{sen} \theta$

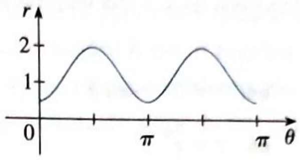
43. $r^2 = 9 \operatorname{sen} 2\theta$ **44.** $r^2 = \cos 4\theta$

45. $r = 2 \cos (3\theta/2)$ **46.** $r^2\theta = 1$

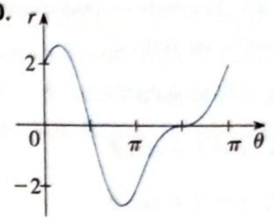
47. $r = 1 + 2 \cos 2\theta$ **48.** $r = 1 + 2 \cos(\theta/2)$

49-50 A figura mostra o gráfico de r como uma função de θ em coordenadas cartesianas. Use-o para esboçar a curva polar correspondente.

49.



50.



51. Mostre que a curva polar $r = 4 + 2 \sec \theta$ (chamada **conchoide**) tem a reta $x = 2$ como uma assíntota vertical mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} x = 2$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchoide.

52. Mostre que a curva $r = 2 - \operatorname{cossec} \theta$ (também uma conchoide) tem a reta $y = -1$ como uma assíntota horizontal mostrando que $\lim_{r \to \pm\infty} y = -1$. Use esse fato para ajudar a esboçar a conchoide.

53. Mostre que a curva $r = \operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} \theta$ (denominada **cissoide de Diocles**) tem a reta $x = 1$ como uma assíntota vertical. Mostre também que a curva está inteiramente dentro da faixa vertical $0 \leqslant x < 1$. Use esses fatos para ajudar a esboçar a cissoide.

54. Esboce a curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

55. (a) No Exemplo 11 os gráficos sugerem que a limaçon $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ tem um laço interno quando $|c| > 1$. Demonstre que isso é verdadeiro e encontre os valores de θ que correspondam ao laço interno.

(b) A partir da Figura 19 parece que a limaçon perde sua covinha quando $c = \frac{1}{2}$. Demonstre isto.

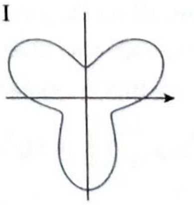
56. Associe as curvas polares com seus respectivos gráficos I–VI. Dê razões para suas escolhas. (Não use uma ferramenta gráfica.)

(a) $r = \sqrt{\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$ (b) $r = \theta^2,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 16\pi$

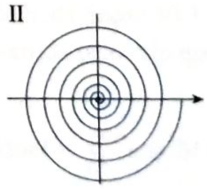
(c) $r = \cos(\theta/3)$ (d) $r = 1 + 2 \cos \theta$

(e) $r = 2 + \operatorname{sen} 3\theta$ (f) $r = 1 + 2 \operatorname{sen} 3\theta$

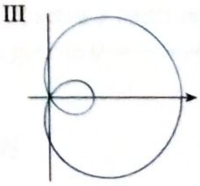
I

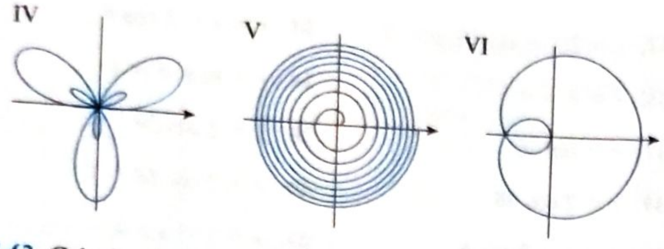


II



III





57-62 Calcule a inclinação da reta tangente para a curva polar dada no ponto especificado pelo valor de θ.

57. $r = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/6$

58. $r = 2 - \operatorname{sen} \theta, \quad \theta = \pi/3$

59. $r = 1/\theta, \quad \theta = \pi$

60. $r = \cos(\theta/3), \quad \theta = \pi$

61. $r = \cos 2\theta, \quad \theta = \pi/4$

62. $r = 1 - 2\cos\theta, \quad \theta = \pi/3$

63-68 Encontre os pontos na curva dada onde a reta tangente é horizontal ou vertical.

63. $r = 3\cos\theta$

64. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

65. $r = 1 + \cos\theta$

66. $r = e^{\theta}$

67. $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$

68. $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

69. Mostre que a equação polar $r = a \operatorname{sen}\theta + b\cos\theta$, para a qual $ab \neq 0$, representa um círculo e calcule seu centro e o raio.

70. Mostre que as curvas $r = a \operatorname{sen}\theta$ e $r = a\cos\theta$ se interceptam com ângulos retos.

71-76 Use uma ferramenta gráfica para traçar a curva polar. Escolha o intervalo do parâmetro para ter certeza de que você fez a curva inteira.

71. $r = 1 + 2\operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide de Freeth)

72. $r = \sqrt{1 - 0{,}8\operatorname{sen}^2\theta}$ (hipopédia)

73. $r = e^{\operatorname{sen}\theta} - 2\cos(4\theta)$ (curva borboleta)

74. $r = \operatorname{sen}^2(4\theta) + \cos(4\theta)$

75. $r = 2 - 5\operatorname{sen}(\theta/6)$

76. $r = \cos(\theta/2) + \cos(\theta/3)$

77. Como os gráficos $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ e $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ estão relacionados ao gráfico $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$? Em geral, como o gráfico de $r = f(\theta - \alpha)$ está relacionado ao gráfico de $r = f(\theta)$?

78. Use um gráfico para estimar a coordenada y dos pontos mais altos na curva $r = \operatorname{sen} 2\theta$. Então, use o cálculo para encontrar o valor exato.

79. (a) Investigue a família de curvas definidas pelas equações polares $r = \operatorname{sen} n\theta$, onde n é um inteiro positivo. Como o número de laços está relacionado a n?

(b) O que aconteceria se a equação na parte (a) fosse trocada por $r = |\operatorname{sen} n\theta|$?

80. Uma família de curvas é dada pelas equações $r = 1 + c \operatorname{sen} n\theta$, onde c é um número real e n é um inteiro positivo. Como o gráfico muda quando n aumenta? Como ele muda quando c varia? Ilustre traçando membros suficientes da família para justificar suas conclusões.

81. Uma família de curvas tem equações polares

$$r = \frac{1 - a\cos\theta}{1 + a\cos\theta}$$

Investigue como o gráfico muda quando o número a varia. Em particular, você deveria identificar os valores de transição de a para os quais o formato básico da curva muda.

82. O astrônomo Giovanni Cassini (1625-1712) estudou a família de curvas com equações polares

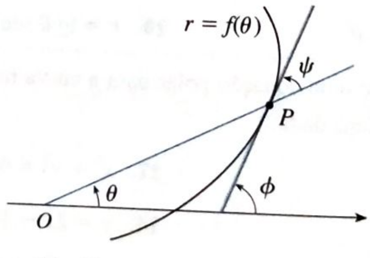
$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\theta + c^4 - a^4 = 0$$

para as quais a e c são números reais positivos. Essas curvas são chamadas **ovais de Cassini**, embora tenham formato oval apenas para certos valores de a e c. (Cassini pensou que essas curvas pudessem representar as órbitas planetárias melhor que as elipses de Kepler.) Investigue a variedade de formatos que essas curvas podem ter. Em particular, como estão relacionados a e c quando a curva se divide em duas partes?

83. Seja P um ponto qualquer (exceto a origem) na curva $r = f(\theta)$. Se ψ for o ângulo entre a reta tangente em P e a reta radial OP, mostre que

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

[*Sugestão*: Observe que $\psi = \phi - \theta$ na figura.]



84. (a) Use o Exercício 83 para mostrar que o ângulo entre a reta tangente e a reta radial é $\psi = \pi/4$ em cada ponto na curva $r = e^{\theta}$.

(b) Ilustre a parte (a) traçando a curva e a reta tangente aos pontos onde $\theta = 0$ e $\pi/2$.

(c) Demonstre que qualquer curva polar $r = f(\theta)$, com a propriedade de que o ângulo ψ entre a reta radial e a reta tangente é uma constante, deve ser do tipo $r = Ce^{k\theta}$, onde C e k são constantes.

Pela Fórmula 9 essa distância é

$$D = \frac{|13(1) - 6(-2) - 5(4) + 3|}{\sqrt{13^2 + (-6)^2 + (-5)^2}} = \frac{8}{\sqrt{230}} \approx 0{,}53$$

12.5 EXERCÍCIOS

1. Determine se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.
(a) Duas retas paralelas a uma terceira são paralelas.
(b) Duas retas perpendiculares a uma terceira são paralelas.
(c) Dois planos paralelos a um terceiro são paralelos.
(d) Dois planos perpendiculares a um terceiro são paralelos.
(e) Duas retas paralelas a um plano são paralelas.
(f) Duas retas perpendiculares a um plano são paralelas.
(g) Dois planos paralelos a uma reta são paralelos.
(h) Dois planos perpendiculares a uma reta são paralelos.
(i) Dois planos ou se interceptam ou são paralelos.
(j) Duas retas ou se interceptam ou são paralelas.
(k) Um plano e uma reta ou se interceptam ou são paralelos.

2-5 Determine uma equação vetorial e equações paramétricas para a reta.

2. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, -3)$ e é paralela ao vetor $2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

3. A reta que passa pelo ponto $(-2, 4, 10)$ e é paralela ao vetor $\langle 3, 1, -8 \rangle$

4. A reta que passa pelo ponto $(0, 14, -10)$ e é paralela à reta $x = -1 + 2t, y = 6 - 3t, z = 3 + 9t$

5. A reta que passa pelo ponto $(1, 0, 6)$ e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$

6-12 Determine as equações paramétricas e as equações simétricas para a reta.

6. Reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, 2, 3)$

7. Reta que passa pelos pontos $(1, 3, 2)$ e $(-4, 3, 0)$

8. Reta que passa pelos pontos $(6, 1, -3)$ e $(2, 4, 5)$

9. Reta que passa pelos pontos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e $(2, 1, -3)$

10. Reta que passa por $(2, 1, 0)$ e é perpendicular à reta $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. Reta que passa por $(1, -1, 1)$ e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$

12. Reta que é a intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$

13. A reta que passa pelos pontos $(-4, -6, 1)$ e $(-2, 0 -3)$ é paralela à reta que passa pelos pontos $(10, 18, 4)$ e $(5, 3, 14)$?

14. A reta que passa pelos pontos $(4, 1, -1)$ e $(2, 5, 3)$ é perpendicular à reta que passa pelos pontos $(-3, 2, 0)$ e $(5, 1, 4)$?

15. (a) Determine as equações simétricas da reta que passa pelo ponto $(1, -5, 6)$ e é paralela ao vetor $\langle -1, 2, -3 \rangle$.
(b) Determine os pontos nos quais a reta da parte (a) intercepta os planos coordenados.

16. (a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(2, 4, 6)$ e que é perpendicular ao plano $x - y + 3z = 7$.
(b) Em que pontos essa reta intercepta os planos coordenados?

17. Ache a equação vetorial para o segmento de reta de $(2, -1, 4)$ a $(4, 6, 1)$.

18. Ache as equações paramétricas para o segmento de reta de $(10, 3, 1)$ a $(5, 6, -3)$.

19-22 Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de intersecção.

19. L_1: $x = -6t, \quad y = 1 + 9t, \quad z = -3t$
L_2: $x = 1 + 2s, \quad y = 4 - 3s, \quad z = s$

20. L_1: $x = 1 + 2t, \quad y = 3t, \quad z = 2 - t$
L_2: $x = -1 + s, \quad y = 4 + s, \quad z = 1 + 3s$

21. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 2}{3}$

L_2: $\dfrac{x - 3}{-4} = \dfrac{y - 2}{-3} = \dfrac{z - 1}{2}$

22. L_1: $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 3}{2} = \dfrac{z - 2}{-1}$

L_2: $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y - 6}{-1} = \dfrac{z + 2}{3}$

23-38 Determine a equação do plano.

23. O plano que passa pelo ponto $(6, 3, 2)$ e é perpendicular ao vetor $\langle -2, 1, 5 \rangle$

24. O plano que passa pelo ponto $(4, 0, -3)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e cujo vetor normal é $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. O plano que passa pelo ponto $(-2, 8, 10)$ e é perpendicular à reta $x = 1 + t, y = 2t, z = 4 - 3t$

27. O plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $2x - y + 3z = 1$

28. O plano que passa pelo ponto $(-1, 6, -5)$ e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$

29. O plano que passa pelo ponto $(4, -2, 3)$ e é paralelo ao plano $3x - 7z = 12$

30. O plano que contém a reta $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$

31. O plano que passa pelos pontos $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$

32. O plano que passa pela origem e pelos pontos $(2, -4, 6)$ e $(5, 1, 3)$

33. O plano que passa pelos pontos $(3, -1, 2)$, $(8, 2, 4)$ e $(-1, -2, -3)$

34. O plano que passa pelo ponto $(1, 2, 3)$ e contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

35. O plano que passa pelo ponto $(6, 0, -2)$ e contém a reta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 5t$, $z = 7 + 4t$

36. O plano que passa pelo ponto $(1, -1, 1)$ e contém a reta com equações simétricas $x = 2y = 3z$

37. O plano que passa pelo ponto $(-1, 2, 1)$ e contém a reta intersecção dos planos $x + y - z = 2$ e $2x - y + 3z = 1$

38. O plano que passa pela reta intersecção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$

39-42 Use as intersecções com os eixos coordenados como uma ajuda para esboçar o plano.

39. $2x + 5y + z = 10$

40. $3x + y + 2z = 6$

41. $6x - 3y + 4z = 6$

42. $6x + 5y - 3z = 15$

43-45 Determine o ponto no qual a reta intercepta o plano dado.

43. $x = 1 + t, \quad y = 2t, \quad z = 3t; \quad x + y + z = 1$

44. $x = 5, \quad y = 4 - t, \quad z = 2t; \quad 2x - y + z = 5$

45. $x = y - 1 = 2z; \quad 4x - y + 3z = 8$

46. Onde a reta que passa pelos pontos $(1, 0, 1)$ e $(4, -2, 2)$ intercepta o plano $x + y + z = 6$?

47. Determine as coordenadas do vetor diretor da reta intersecção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

48. Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$.

49-54 Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

49. $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$

50. $2z = 4y - x, \quad 3x - 12y + 6z = 1$

51. $x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1$

52. $2x - 3y + 4z = 5, \quad x + 6y + 4z = 3$

53. $x = 4y - 2z, \quad 8y = 1 + 2x + 4z$

54. $x + 2y + 2z = 1, \quad 2x - y + 2z = 1$

55-56 (a) Determine as equações simétricas da reta intersecção dos planos e (b) determine o ângulo entre os planos.

55. $x + y + z = 1, \quad x + 2y + 2z = 1$

56. $3x - 2y + z = 1, \quad 2x + y - 3z = 3$

57-58 Determine as equações paramétricas da reta intersecção dos planos.

57. $5x - 2y - 2z = 1, \quad 4x + y + z = 6$

58. $z = 2x - y - 5, \quad z = 4x + 3y - 5$

59. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(1, 0, -2)$ e $(3, 4, 0)$.

60. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são equidistantes dos pontos $(2, 5, 5)$ e $(-6, 3, 1)$.

61. Determine a equação do plano que intercepta o eixo x em a, o eixo y em b e o eixo z em c.

62. (a) Determine o ponto dado pela intersecção das retas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$$
$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2 \rangle + s\langle 1, 1, 0 \rangle$$

(b) Determine a equação do plano que contém essas retas.

63. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é paralela ao plano $x + y + z = 2$ e perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

64. Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $(0, 1, 2)$, é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$, e intercepta essa reta.

65. Quais dos quatro planos seguintes são paralelos? Existem dois coincidentes?

$$P_1\colon 4x - 2y + 6z = 3 \qquad P_2\colon 4x - 2y - 2z = 6$$
$$P_3\colon -6x + 3y - 9z = 5 \qquad P_4\colon z = 2x - y - 3$$

66. Quais das quatro retas seguintes são paralelas? Existem duas coincidentes?

$$L_1\colon x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 2 - 5t$$
$$L_2\colon x + 1 = y - 2 = 1 - z$$
$$L_3\colon x = 1 + t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t$$
$$L_4\colon \mathbf{r} = \langle 2, 1, -3 \rangle + t\langle 2, 2, -10 \rangle$$

67-68 Utilize a fórmula que aparece no Exercício 43 da Seção 12.4 para determinar a distância do ponto à reta dada.

67. $(4, 1, -2); \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - 2t, \quad z = 4 - 3t$

68. $(0, 1, 3); \quad x = 2t, \quad y = 6 - 2t, \quad z = 3 + t$

69-70 Determine a distância do ponto ao plano dado.

69. $(1, -2, 4), \quad 3x + 2y + 6z = 5$

70. $(-6, 3, 5), \quad x - 2y - 4z = 8$

71-72 Determine a distância entre os planos paralelos dados.

71. $2x - 3y + z = 4, \quad 4x - 6y + 2z = 3$

72. $6z = 4y - 2x, \quad 9z = 1 - 3x + 6y$

73. Mostre que a distância entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

74. Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano $x + 2y - 2z = 1$ e que distam duas unidades dele.

75. Mostre que as retas com equações simétricas $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ são reversas e determine a distância entre elas.

76. Determine a distância entre as retas reversas com equações paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$ e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$.

77. Se a, b e c não são todos nulos, mostre que a equação $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano e $\langle a, b, c\rangle$ é o vetor normal ao plano.

Sugestão: Suponha $a \neq 0$ e reescreva a equação na forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

78. Dê a interpretação geométrica de cada família de planos.

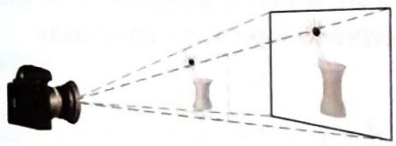
(a) $x + y + z = c$ (b) $x + y + cz = 1$

(c) $y \cos\theta + z \operatorname{sen}\theta = 1$

PROJETO DE LABORATÓRIO

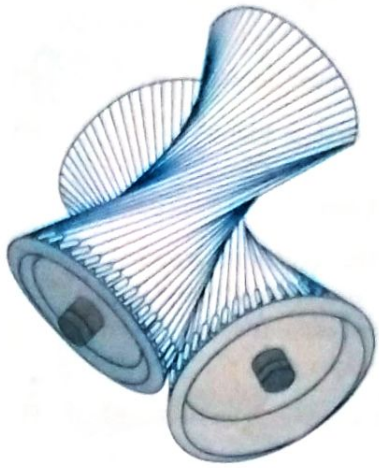
PONDO 3D EM PERSPECTIVA

Os programadores de computação gráfica encaram o mesmo desafio que os grandes pintores do passado: como representar uma cena tridimensional como uma imagem em um plano (um monitor ou uma tela). Para criar a ilusão de perspectiva, na qual os objetos próximos parecem maiores que aqueles mais distantes, os objetos tridimensionais na memória do computador são projetados em uma tela retangular a partir do ponto de visão onde o olho ou a câmera estão localizados. O volume de visão – a porção do espaço que estará visível – é a região contida nos quatro planos que passam pelo ponto de visão e por uma aresta da tela retangular. Se os objetos na cena se estendem além dos quatro planos, eles são truncados antes que os dados sejam enviados para a tela. Esses planos são, portanto, chamados *planos cortantes*.



1. Suponha que a tela seja representada por um retângulo no plano yz com vértices $(0, \pm 400, 0)$ e $(0, \pm 400, 600)$, e a câmera esteja localizada em $(1000, 0, 0)$. Uma reta L na cena passa pelos pontos $(230, -285, 102)$ e $(860, 105, 264)$. Em quais pontos L será contada pelos planos cortantes?
2. Se o segmento de reta cortado for projetado na tela, identifique o segmento de reta resultante.
3. Use equações paramétricas para traçar as arestas da tela, o segmento de reta cortado e sua projeção na tela. A seguir, adicione retas que conectem o ponto de visão a cada extremidade dos segmentos cortados para verificar que a projeção está correta.
4. Um retângulo com vértices $(621, -147, 206)$, $(563, 31, 242)$, $(657, -111, 86)$ e $(599, 67, 122)$ é adicionado à cena. A reta L intercepta esse retângulo. Para fazer o retângulo parecer opaco, um programador pode usar *linhas escondidas* as quais removem partes do objeto que estão atrás de outros objetos. Identifique a parte de L que deve ser removida.

são usados para transmitir movimento de rotação entre eixos transversais. (Os dentes das engrenagens são as retas geradoras do hiperboloide. Veja o Exercício 49.)



Hiperboloides produzem transmissão por engrenagens.

12.6 EXERCÍCIOS

1. (a) O que a equação $y = x^2$ representa como uma curva em $\mathbb{R}^2$?
   (b) O que ela representa como uma superfície em $\mathbb{R}^3$?
   (c) O que a equação $z = y^2$ representa?

2. (a) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma curva em $\mathbb{R}^2$.
   (b) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
   (c) Descreva e esboce a superfície $z = e^y$.

3-8 Descreva e esboce a superfície.

3. $y^2 + 4z^2 = 4$
4. $z = 4 - x^2$
5. $x - y^2 = 0$
6. $yz = 4$
7. $z = \cos x$
8. $x^2 - y^2 = 1$

9. (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperboloide de uma folha da Tabela 1.
   (b) Se trocarmos a equação em (a) para $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, como isso afeta o gráfico?
   (c) E se trocarmos a equação em (a) para $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

10. (a) Encontre e identifique os cortes da superfície quádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperboloide de duas folhas da Tabela 1.
   (b) Se a equação na parte (a) for trocada para $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, o que acontece com o gráfico? Esboce o novo gráfico.

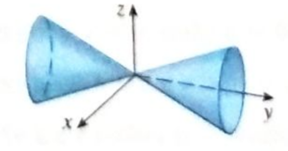
11-20 Use cortes para esboçar e identificar as superfícies.

11. $x = y^2 + 4z^2$
12. $9x^2 - y^2 + z^2 = 0$
13. $x^2 = y^2 + 4z^2$
14. $25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$
15. $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$
16. $4x^2 + 9y^2 + z = 0$
17. $36x^2 + y^2 + 36z^2 = 36$
18. $4x^2 - 16y^2 + z^2 = 16$
19. $y = z^2 - x^2$
20. $x = y^2 - z^2$

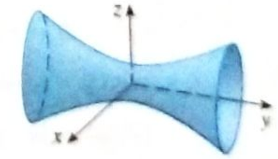
21-28 Faça uma correspondente entre a equação e seu gráfico (identificado por I-VIII). Justifique sua escolha.

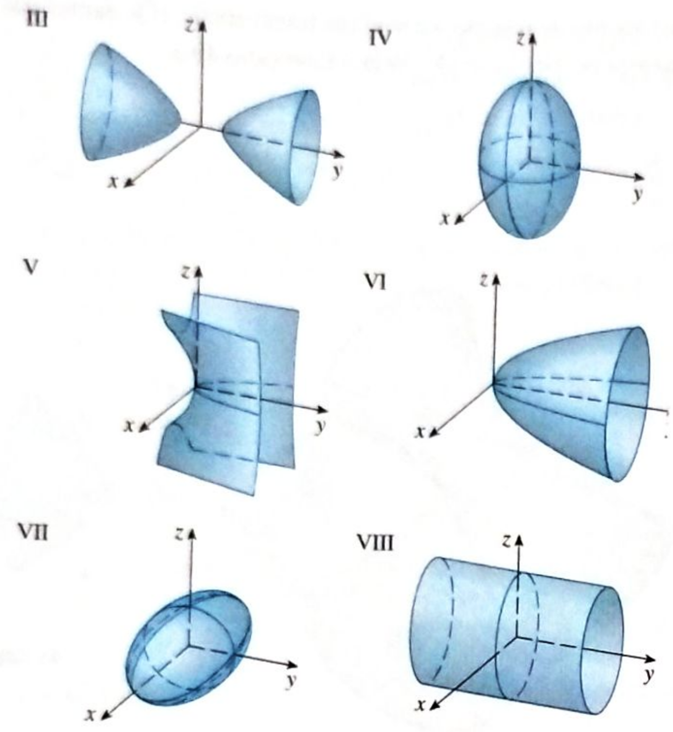
21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$
22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$
23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$
24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$
25. $y = 2x^2 + z^2$
26. $y^2 = x + 2z^2$
27. $x^2 + 2z^2 = 1$
28. $y = x^2 - z^2$

I



II





29-36 Coloque a equação na forma-padrão, classifique a superfície e esboce-a.

29. $z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$

30. $x^2 = 2y^2 + 3z^2$

31. $x = 2y^2 + 3z^2$

32. $4x - y^2 + 4z^2 = 0$

33. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

34. $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

35. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$

36. $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

37-40 Use um computador com um programa que trace superfícies tridimensionais. Experimente diversos pontos de vista e diversos tamanhos de janela retangular até conseguir uma boa visão da superfície.

37. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 1$

38. $x^2 - y^2 - z = 0$

39. $-4x^2 - y^2 + z^2 = 0$

40. $x^2 - 6x + 4y^2 - z = 0$

41. Esboce a região delimitada pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leqslant z \leqslant 2$.

42. Esboce a região delimitada pelos paraboloides $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

43. Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da parábola $y = x^2$ em torno do eixo y.

44. Determine uma equação da superfície obtida pela rotação da reta $x = 3y$ em torno do eixo x.

45. Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos que são equidistantes do ponto $(-1, 0, 0)$ e do plano $x = 1$. Identifique essa superfície.

46. Determine uma equação da superfície constituída de todos os pontos P para os quais a distância de P ao eixo x é o dobro da distância de P ao plano yz. Identifique a superfície.

47. Tradicionalmente, a superfície da Terra tem sido modelada por uma esfera, mas o World Geodesic System de 1984 (WGS-84) usa um elipsoide como um modelo mais preciso. Ele coloca o centro da Terra na origem e o polo norte no eixo z positivo. A distância do centro ao polo é 6 356,523 km e a distância a um ponto do equador é 6 378,137 km.

(a) Encontre uma equação para superfície da Terra como a usada pelo WGS-84.

(b) Curvas de latitude constante são cortes nos planos $z = k$. Qual a forma destas curvas?

(c) Meridianos (curvas com longitude constante) são cortes nos planos da forma $y = mx$. Qual é a forma destes meridianos?

48. Uma torre de resfriamento de um reator nuclear deve ser construída na forma de um hiperboloide de uma folha. O diâmetro na base é 280 m e o diâmetro mínimo, 500 m acima do solo, é 200 m. Encontre uma equação para a torre.

49. Mostre que se o ponto (a, b, c) está em um paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, então as retas com equações paramétricas $x = a + t, y = b + t, z = c + 2(b - a)t$ e $x = a + t, y = b - t, z = c - 2(b + a)t$, estão ambas inteiramente neste paraboloide. (Isto mostra que o paraboloide hiperbólico é o que é chamado uma **superfície regrada**; ou seja, ela pode ser gerada pelo movimento de uma reta. De fato, este exercício mostra que por cada ponto do paraboloide hiperbólico existem duas retas geradoras. As únicas outras superfícies quádricas que são superfícies regradas são os cilindros, cones e hiperboloides de uma folha.)

50. Mostre que a curva obtida pela intersecção das superfícies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ e $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ está em um plano.

51. Desenhe as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - y^2$ em uma mesma tela usando uma janela de tamanho $|x| \leqslant 1,2$, $|y| \leqslant 1,2$, e observe a curva de intersecção. Mostre que a projeção dessa curva no plano xy é uma elipse.

13.1 EXERCÍCIOS

1-2 Determine o domínio das funções vetoriais.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t}\,\rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t-2}{t+2}\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln(9-t^2)\,\mathbf{k}$

3-6 Calcule os limites.

3. $\lim\limits_{t\to 0^+} \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t\ln t\rangle$

4. $\lim\limits_{t\to 0} \left\langle \dfrac{e^t-1}{t}, \dfrac{\sqrt{1+t}-1}{t}, \dfrac{3}{t+1}\right\rangle$

5. $\lim\limits_{t\to 0} \left(e^{-3t}\,\mathbf{i} + \dfrac{t^2}{\operatorname{sen}^2 t}\,\mathbf{j} + \cos 2t\,\mathbf{k}\right)$

6. $\lim\limits_{t\to \infty} \left\langle \operatorname{arctg} t, e^{-2t}, \dfrac{\ln t}{t}\right\rangle$

7-14 Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com setas a direção na qual o parâmetro cresce.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, t\rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2\rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 1+t, 3t, -t\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, 3, \cos t\rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j} + t^6\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{k}$

15-18 Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q.

15. $P(0,0,0)$, $Q(1,2,3)$

16. $P(1,0,1)$, $Q(2,3,1)$

17. $P(1,-1,2)$, $Q(4,1,7)$

18. $P(-2,4,0)$, $Q(6,-1,2)$

19-24 Faça uma correspondência entre as equações paramétricas e os gráficos (identificados com números de I-VI). Justifique sua escolha.

19. $x = \cos 4t$, $y = t$, $z = \operatorname{sen} 4t$

20. $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$

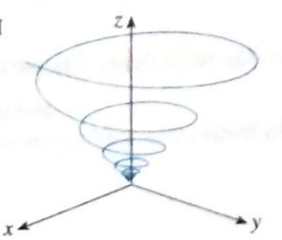
21. $x = t$, $y = 1/(1+t^2)$, $z = t^2$

22. $x = e^{-t}\cos 10t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} 10t$, $z = e^{-t}$

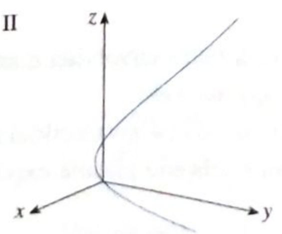
23. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen} 5t$

24. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \ln t$

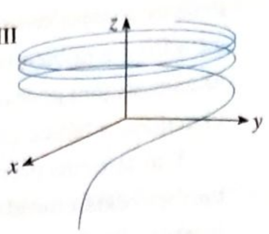
I



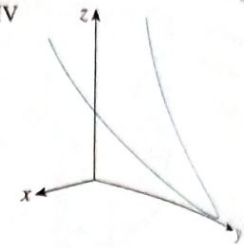
II



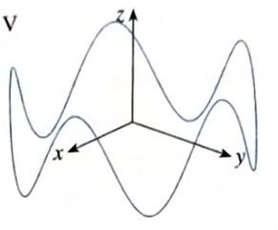
III



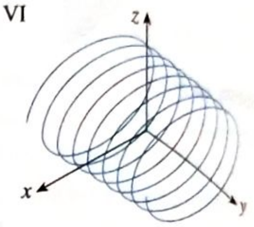
IV



V



VI



25. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos t$, $y = t\operatorname{sen} t$, $z = t$ está no cone $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

26. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ é a curva de intersecção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Use esse fato para esboçar a curva.

27. Em quais pontos a curva $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + (2t - t^2)\mathbf{k}$ intercepta o paraboloide $z = x^2 + y^2$?

28. Em quais pontos a hélice $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t\rangle$ intercepta a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$?

29-32 Utilize um computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a revelar a verdadeira natureza da curva.

29. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t\operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} t\operatorname{sen} 2t, \cos 2t\rangle$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \ln t, t\rangle$

31. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t\operatorname{sen} t, t\cos t\rangle$

32. $\mathbf{r}(t) = \langle t, e^t, \cos t\rangle$

33. Trace a curva com equações paramétricas
$x = (1 + \cos 16t)\cos t$, $y = (1 + \cos 16t)\operatorname{sen} t$,
$z = 1 + \cos 16t$.
Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em um cone.

34. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\operatorname{sen} t$$
$$z = 0{,}5\cos 10t$$

Explique a aparência da curva, mostrando que ela está em uma esfera.

35. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos $(1, 4, 0)$ e $(9, -8, 28)$, mas não passa pelo ponto $(4, 7, -6)$.

36-38 Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela intersecção das duas superfícies.

36. O cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e a superfície $z = xy$

37. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 1 + y$

38. O paraboloide $z = 4x^2 + y^2$ e o cilindro parabólico $y = x^2$

39. Tente esboçar à mão a curva obtida pela intersecção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ com o cilindro parabólico $z = x^2$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

40. Tente esboçar à mão a intersecção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a metade superior do elipsoide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Escreva então as equações paramétricas para a curva e utilize um computador para traçá-la.

41. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão colidir. (Um míssil vai atingir seu alvo móvel? Duas aeronaves vão colidir?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias de duas partículas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para $t \geqslant 0$. As partículas colidem?

42. Duas partículas se movem ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

43. Suponha que **u** e **v** sejam funções vetoriais que possuem limites quando $t \to a$ e seja c uma constante. Demonstre as seguintes propriedades de limites.

(a) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t \to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t)$

(c) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(d) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

44. A visão do nó de trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1{,}5t) \cos t$$
$$y = (2 + \cos 1{,}5t) \operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

para esboçar à mão a curva vista de cima, deixando pequenas falhas para indicar os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que sua projeção sobre o plano xy tem coordenadas polares $r = 2 + \cos 1{,}5t$ e $\theta = t$, de forma que r varia entre 1 e 3. Mostre então que z tem um valor máximo e um mínimo quando a projeção está entre $r = 1$ e $r = 3$.

Quando você terminar o esboço à mão livre, utilize um computador para traçar a curva com o observador vendo de cima e compare-a ao seu desenho. Trace a curva sob outros pontos de vista. Você alcançará melhor resultado se traçar um tubo de raio 0,2 em torno da curva. (Utilize o comando tubeplot no Maple.)

45. Mostre que $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{b}$ se e somente se para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |t - a| < \delta \quad \text{então} \quad |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

13.2 DERIVADAS E INTEGRAIS DE FUNÇÕES VETORIAIS

Mais adiante neste capítulo, utilizaremos as funções vetoriais para descrever o movimento dos planetas e outros objetos no espaço. Vamos nos preparar aqui para desenvolver o cálculo com funções vetoriais.

DERIVADAS

A **derivada** $\mathbf{r}'$ de uma função vetorial $\mathbf{r}$ é definida do mesmo modo como foi feito para as funções a valores reais:

1
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

se este limite existir. O significado geométrico dessa definição está representado na Figura 1. Se os pontos P e Q têm vetores posição $\mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{r}(t + h)$, então $\overrightarrow{PQ}$ representa o vetor $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$, que pode ser visto como um vetor secante. Se $h > 0$, o múltiplo por escalar $(1/h)(\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t))$ tem a mesma direção e sentido que $\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)$. Quando então,

$$\boxed{\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b g(t)\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int_a^b h(t)\,dt\right)\mathbf{k}}$$

Isso mostra que podemos calcular a integral da função vetorial integrando cada componente dela.

Podemos estender o Teorema Fundamental do Cálculo para as funções vetoriais contínuas como segue:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a)$$

onde $\mathbf{R}$ é uma primitiva de $\mathbf{r}$, ou seja, $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Usaremos a notação $\int \mathbf{r}(t)\,dt$ para as integrais indefinidas (primitivas).

EXEMPLO 5 Se $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$, então

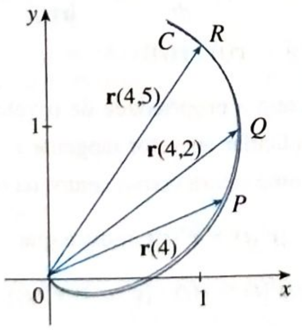
$$\int \mathbf{r}(t)\,dt = \left(\int 2\cos t\,dt\right)\mathbf{i} + \left(\int \operatorname{sen} t\,dt\right)\mathbf{j} + \left(\int 2t\,dt\right)\mathbf{k}$$
$$= 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k} + \mathbf{C}$$

onde $\mathbf{C}$ é um vetor constante de integração, e

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{r}(t)\,dt = \left[2\operatorname{sen} t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}\right]_0^{\pi/2} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{\pi^2}{4}\,\mathbf{k}$$ □

13.2 EXERCÍCIOS

1. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
   (a) Desenhe os vetores $\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)$ e $\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)$.
   (b) Esboce os vetores
   $$\frac{\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)}{0{,}5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)}{0{,}2}$$
   (c) Escreva a expressão para $\mathbf{r}'(4)$ e para seu vetor tangente unitário $\mathbf{T}(4)$.
   (d) Desenhe o vetor $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t\rangle, 0 \leqslant t \leqslant 2$, e desenhe os vetores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1{,}1)$ e $\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)$.
   (b) Desenhe o vetor $\mathbf{r}'(1)$ começando em $(1, 1)$ e o compare com o vetor
   $$\frac{\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)}{0{,}1}$$
   Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção e sentido.

3-8

(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.
(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$.
(c) Esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t - 2, t^2 + 1\rangle, \quad t = -1$
4. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, \sqrt{t}\rangle, \quad t = 1$
5. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}, \quad t = \pi/4$
6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}, \quad t = 0$
7. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{3t}\,\mathbf{j}, \quad t = 0$
8. $\mathbf{r}(t) = (1 + \cos t)\,\mathbf{i} + (2 + \operatorname{sen} t)\,\mathbf{j}, \quad t = \pi/6$

9-16 Determine a derivada da função vetorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t\operatorname{sen} t, t^2, t\cos 2t\rangle$
10. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{tg} t, \sec t, 1/t^2\rangle$
11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\,\mathbf{k}$
12. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^{-1} t\,\mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$
13. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = at\cos 3t\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}^3 t\,\mathbf{j} + c\cos^3 t\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$

16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17-20 Determine o vetor tangente unitário $\mathbf{T}(t)$ no ponto com valor de parâmetro t dado.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 6t^5, 4t^3, 2t\rangle, \quad t = 1$

18. $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}, \quad t = 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,2t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

20. $\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \text{tg}\,t\,\mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

21. Se $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$, encontre $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

22. Se $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t}\rangle$, determine $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ e $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23-26 Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

23. $x = t^5, \quad y = t^4, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

24. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = t + 1; \quad (-1, 1, 1)$

25. $x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\,\text{sen}\,t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$

26. $x = \ln t, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad z = t^2; \quad (0, 2, 1)$

27-29 Encontre as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.

27. $x = t, \quad y = e^{-t}, \quad z = 2t - t^2; \quad (0, 1, 0)$

28. $x = 2\cos t, \quad y = 2\,\text{sen}\,t, \quad z = 4\cos 2t; \quad (\sqrt{3}, 1, 2)$

29. $x = t\cos t, \quad y = t, \quad z = t\,\text{sen}\,t; \quad (-\pi, \pi, 0)$

30. (a) Determine o ponto de intersecção das retas tangentes à curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\,\pi t, 2\,\text{sen}\,\pi t, \cos \pi t\rangle$ nos pontos $t = 0$ e $t = 0{,}5$.
(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.

31. As curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ e $\mathbf{r}_2(t) = \langle \text{sen}\,t, \text{sen}\,2t, t\rangle$ se interceptam na origem. Determine o ângulo de intersecção destas com precisão de um grau.

32. Em que ponto as curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2\rangle$ e $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2\rangle$ se interceptam? Encontre o ângulo entre elas no ponto de intersecção, com precisão de um grau.

33-38 Calcule a integral.

33. $\int_0^1 (16t^3\,\mathbf{i} - 9t^2\,\mathbf{j} + 25t^4\,\mathbf{k})\,dt$

34. $\int_0^1 \left(\dfrac{4}{1 + t^2}\mathbf{j} + \dfrac{2t}{1 + t^2}\mathbf{k}\right) dt$

35. $\int_0^{\pi/2} (3\,\text{sen}^2 t\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\text{sen}\,t\cos^2 t\,\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,t\cos t\,\mathbf{k})\,dt$

36. $\int_1^2 (t^2\,\mathbf{i} + t\sqrt{t - 1}\,\mathbf{j} + t\,\text{sen}\,\pi t\,\mathbf{k})\,dt$

37. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

38. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,\pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

39. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} + \sqrt{t}\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

40. Encontre $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + te^t\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

41. Demonstre a Fórmula 1 do Teorema 3.

42. Demonstre a Fórmula 3 do Teorema 3.

43. Demonstre a Fórmula 5 do Teorema 3.

44. Demonstre a Fórmula 6 do Teorema 3.

45. Se $\mathbf{u}(t) = \langle \text{sen}\,t, \cos t, t\rangle$ e $\mathbf{v}(t) = \langle t, \cos t, \text{sen}\,t\rangle$, use a Fórmula 4 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)]$$

46. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são as funções vetoriais no Exercício 45, use a Fórmula 5 do Teorema 3 para encontrar

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)]$$

47. Mostre que se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial tal que exista $\mathbf{r}''$, então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$$

48. Determine uma expressão para $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot (\mathbf{v}(t) \times \mathbf{w}(t))]$.

49. Se $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$, mostre que $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = \dfrac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$.
[*Sugestão*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)$]

50. Se uma curva tem a propriedade de o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ estar sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$, mostre que essa curva está em uma esfera com o centro na origem.

51. Se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)]$, mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t) \cdot [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t)]$$

13.3 EXERCÍCIOS

1-6 Determine o comprimento da curva dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \operatorname{sen} t, 5t, 2 \cos t \rangle, \quad -10 \leqslant t \leqslant 10$

2. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t \cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t \rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$

3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln \cos t\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

6. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

7-9 Encontre o comprimento da curva com precisão de quatro casas decimais. (Use sua calculadora para aproximar a integral.)

7. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, t, t^2 \rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 4$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \ln t, t \ln t \rangle, \quad 1 \leqslant t \leqslant 2$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{tg} t \rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/4$

10. Trace a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = \operatorname{sen} 3t$. Encontre o comprimento total desta curva com precisão de quatro casas decimais.

11. Seja C a curva de intersecção do cilindro parabólico $x^2 = 2y$ e da superfície $3z = xy$. Encontre o comprimento exato de C da origem até o ponto $(6, 18, 36)$.

12. Encontre, com precisão de quatro casas decimais, o comprimento da curva de intersecção do cilindro $4x^2 + y^2 = 4$ e do plano $x + y + z = 2$.

13-14 Reparametrize a curva com relação ao comprimento de arco medido a partir do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t.

13. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 - 3t)\,\mathbf{j} + (5 + 4t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = e^{2t} \cos 2t\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + e^{2t} \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}$

15. Suponha que você comece no ponto $(0, 0, 3)$ e se mova 5 unidades ao longo da curva $x = 3 \operatorname{sen} t$, $y = 4t$, $z = 3 \cos t$ na direção positiva. Onde você está agora?

16. Reparametrize a curva

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{t^2 + 1} - 1\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2 + 1}\,\mathbf{j}$$

em relação ao comprimento do arco medido a partir do ponto $(1, 0)$ na direção crescente de t. Expresse a reparametrização em sua forma mais simples. O que você pode concluir sobre a curva?

17-20

(a) Determine os vetores tangente e normal unitários $\mathbf{T}(t)$ e $\mathbf{N}(t)$.

(b) Utilize a Fórmula 9 para encontrar a curvatura.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \operatorname{sen} t, 5t, 2 \cos t \rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t \cos t, \cos t + t \operatorname{sen} t \rangle \quad t > 0$

19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{3}t^3, t^2, 2t \right\rangle$

20. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 2t, \ln t \rangle$

21-23 Utilize o Teorema 10 para encontrar a curvatura.

21. $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + (1 + t^2)\,\mathbf{k}$

23. $\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 4 \cos t\,\mathbf{k}$

24. Determine a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle e^t \cos t, e^t \operatorname{sen} t, t \rangle$ no ponto $(1, 0, 0)$.

25. Encontre a curvatura de $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$ no ponto $(1, 1, 1)$.

26. Trace o gráfico da curva com equações paramétricas

$$x = t \qquad y = 4t^{3/2} \qquad z = -t^2$$

e calcule a curvatura no ponto $(1, 4, -1)$.

27-29 Use a Fórmula 11 para encontrar a curvatura.

27. $y = 2x - x^2$ **28.** $y = \cos x$ **29.** $y = 4x^{5/2}$

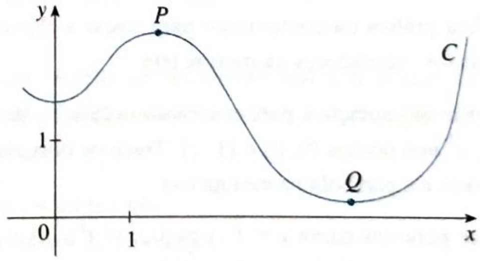
30-31 Em que ponto a curva tem curvatura máxima? O que acontece com a curvatura quando $x \to \infty$?

30. $y = \ln x$ **31.** $y = e^x$

32. Determine a equação de uma parábola que tenha curvatura 4 na origem.

33. (a) A curvatura da curva C mostrada na figura é maior em P ou em Q? Explique.

(b) Estime a curvatura em P e Q desenhando o círculo osculador nesses pontos.

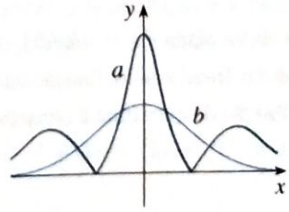


34-35 Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar na mesma tela a curva e sua função curvatura $\kappa(x)$. Esse é o gráfico que você esperava?

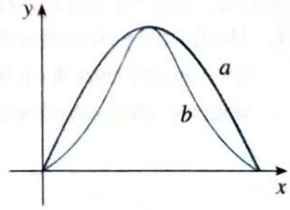
34. $y = x^4 - 2x^2$ **35.** $y = x^{-2}$

36-37 Dois gráficos, a e b, são mostrados. Um é a curva $y = f(x)$ e o outro é o gráfico da sua função curvatura $y = \kappa(x)$. Identifique cada uma e justifique suas escolhas.

36.



37.



SCA **38.** (a) Faça o gráfico da curva $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen } 3t, \text{ sen } 2t, \text{ sen } 3t \rangle$. Em quantos pontos da curva tem-se a impressão de que a curvatura possui um máximo local ou absoluto?

(b) Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Esse gráfico confirma sua conclusão na parte (a)?

SCA **39.** O gráfico de $\mathbf{r}(t) = \left\langle t - \frac{3}{2}\text{sen } t,\ 1 - \frac{3}{2}\cos t,\ t \right\rangle$ é ilustrado na Figura 12(b), na Seção 13.1. Onde você acha que a curvatura é maior? Use um SCA para determinar e fazer o gráfico da função curvatura. Para quais valores de t a curvatura é maior?

40. Use o Teorema 10 para mostrar que a curvatura da curva plana parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$, é

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\,\ddot{y} - \dot{y}\,\ddot{x}|}{[\dot{x}^2 + \dot{y}^2]^{3/2}}$$

onde os pontos indicam as derivadas em relação a t.

41-42 Use a fórmula do Exercício 40 para calcular a curvatura.

41. $x = e^t \cos t, \qquad y = e^t \text{ sen } t$

42. $x = 1 + t^3, \qquad y = t + t^2$

43-44 Encontre os vetores **T**, **N** e **B** no ponto indicado.

43. $\mathbf{r}(t) = \left\langle t^2, \frac{2}{3}t^3, t \right\rangle, \qquad \left(1, \frac{2}{3}, 1\right)$

44. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \text{ sen } t, \ln \cos t \rangle, (1, 0, 0)$

45-46 Determine as equações dos planos normal e osculador da curva no ponto indicado.

45. $x = 2 \text{ sen } 3t, \quad y = t, \quad z = 2 \cos 3t; \qquad (0, \pi, -2)$

46. $x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3; \qquad (1, 1, 1)$

47. Determine as equações para o círculo osculador da elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ nos pontos $(2, 0)$ e $(0, 3)$. Utilize uma calculadora gráfica ou computador para traçar a elipse e ambos os círculos osculadores na mesma tela.

48. Encontre as equações para o círculo osculador da parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ nos pontos $(0, 0)$ e $\left(1, \frac{1}{2}\right)$. Trace os dois círculos osculadores e a parábola na mesma tela.

49. Em que ponto da curva $x = t^3$, $y = 3t$, $z = t^4$ o plano normal é paralelo ao plano $6x + 6y - 8z = 1$?

SCA **50.** Existe um ponto da curva do Exercício 49 onde o plano osculador é paralelo ao plano $x + y + z = 1$? (*Observação*: Você precisará de um SCA para derivar, simplificar e calcular um produto vetorial.)

51. Mostre que a curvatura κ está relacionada com os vetores tangente e normal pela equação

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}$$

52. Mostre que a curvatura de uma curva plana é $\kappa = |d\phi/ds|$, onde ϕ é o ângulo entre **T** e **i**, isto é, ϕ é o ângulo de inclinação da reta tangente. (Isso mostra que a definição de curvatura é consistente com a definição dada para curvas planas no Exercício 69 da Seção 10.2.)

53. (a) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a **B**.

(b) Mostre que $d\mathbf{B}/ds$ é perpendicular a **T**.

(c) Deduza das partes (a) e (b) que $d\mathbf{B}/ds = -\tau(s)\mathbf{N}$ para algum número $\tau(s)$ chamado **torção** da curva. (A torção mede quanto a curva é retorcida.)

(d) Mostre que para uma curva plana a torção é $\tau(s) = 0$.

54. As fórmulas seguintes, chamadas **fórmulas de Frenet-Serret**, são de fundamental importância em geometria diferencial:

1. $d\mathbf{T}/ds = \kappa \mathbf{N}$

2. $d\mathbf{N}/ds = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}$

3. $d\mathbf{B}/ds = -\tau \mathbf{N}$

(A Fórmula 1 vem do Exercício 51, e a Fórmula 3, do Exercício 53.) Use o fato de que $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ para deduzir a Fórmula 2 a partir das Fórmulas 1 e 3.

55. Utilize as fórmulas de Frenet-Serret para demonstrar cada um dos seguintes itens. (Aqui as linhas indicam derivadas com relação a t. Comece como na demonstração do Teorema 10.)

(a) $\mathbf{r}'' = s''\mathbf{T} + \kappa(s')^2\mathbf{N}$ (b) $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \kappa(s')^3\mathbf{B}$

(c) $\mathbf{r}''' = [s''' - \kappa^2(s')^3]\mathbf{T} + [3\kappa s's'' + \kappa'(s')^2]\mathbf{N} + \kappa\tau(s')^3\mathbf{B}$

(d) $\tau = \dfrac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \cdot \mathbf{r}'''}{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|^2}$

56. Mostre que a hélice circular $\mathbf{r}(t) = \langle a \cos t, a \text{ sen } t, bt \rangle$, onde a e b são as constantes positivas, tem curvatura e torção constantes. [Use o resultado do Exercício 55(d).]

57. Utilize a fórmula do Exercício 55(d) para calcular a torção da curva $\mathbf{r}(t) = \left\langle t, \frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3 \right\rangle$.

58. Determine a curvatura e a torção da curva $x = \text{senh } t$, $y = \cosh t$, $z = t$ no ponto $(0, 1, 0)$.

59. A molécula de DNA tem a forma de duas hélices circulares (veja a Figura 3 na Seção 13.1). O raio de cada uma das hélices é de cerca de 10 ângströms ($1\ \text{Å} = 10^{-8}$ cm). Cada hélice, em uma volta completa, sobe 34 Å, e existem cerca de $2{,}9 \times 10^8$ voltas completas em uma molécula. Estime o comprimento de cada hélice circular.

60. Consideremos o problema de projetar uma linha férrea de modo a fazer transições lisas entre as seções de trilhos retos. Um trilho existente ao longo da parte negativa do eixo x precisa ser ligado a um trilho que corre ao longo da reta $y = 1$ para $x \geqslant 1$.

(a) Determine um polinômio $P = P(x)$ de grau 5 tal que a função F definida por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leqslant 0 \\ P(x) & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

seja contínua e tenha derivada e curvatura contínuas.

(b) Utilize uma calculadora gráfica ou um computador para traçar o gráfico de F.

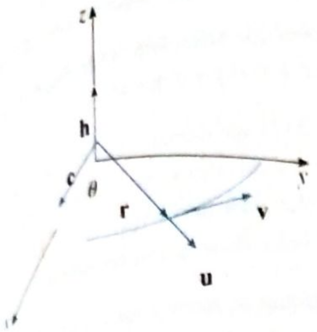


FIGURA 8

Mas $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 = 1$ e, como $|\mathbf{u}(t)| = 1$, segue do Exemplo 4 da Seção 13.2 que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$. Portanto,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

e, então,

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{h})' = \mathbf{v}' \times \mathbf{h} = \mathbf{a} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u}'$$

Integrando ambos os lados da equação, obtemos

11
$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}$$

onde **c** é um vetor constante.

Neste ponto é conveniente escolher os eixos coordenados de forma que o vetor da base canônica **k** aponte na direção do vetor **h**. O planeta se move assim no plano xy. Como $\mathbf{v} \times \mathbf{h}$ e **u** são perpendiculares a **h**, a Equação 11 mostra que **c** pertence ao plano xy. Isso significa que podemos escolher os eixos x e y de forma que o vetor **i** esteja na direção de **c**, como mostrado na Figura 8.

Se θ é o ângulo entre **c** e **r**, então (r, θ) são as coordenadas polares do planeta. Da Equação 11, temos

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{r} \cdot (GM\,\mathbf{u} + \mathbf{c}) = GM\,\mathbf{r} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{c}$$
$$= GMr\,\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}| \cos\theta = GMr + rc\cos\theta$$

onde $c = |\mathbf{c}|$. Então,

$$r = \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{GM + c\cos\theta} = \frac{1}{GM} \frac{\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h})}{1 + e\cos\theta}$$

onde $e = c/(GM)$. Mas

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

onde $h = |\mathbf{h}|$. Desse modo,

$$r = \frac{h^2/(GM)}{1 + e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1 + e\cos\theta}$$

Escrevendo $d = h^2/c$, obtemos a equação

12
$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Comparando com o Teorema 10.6.6, vemos que a Equação 12 é aquela da forma polar da seção cônica com foco na origem e excentricidade e. Sabemos que a órbita de um planeta é uma curva fechada e, portanto, precisa ser uma elipse.

Isso completa a dedução da Primeira Lei de Kepler. Guiaremos você na dedução da Segunda e da Terceira Lei no Projeto Aplicado na página 807. As demonstrações dessas três leis mostram que o método deste capítulo fornece uma ferramenta poderosa na descrição de leis da natureza.

13.4 EXERCÍCIOS

1. A tabela fornece coordenadas de uma partícula movendo-se no espaço ao longo de uma curva lisa.
   (a) Determine a velocidade média nos intervalos de tempo [0; 1], [0,5; 1], [1; 2] e [1; 1,5].
   (b) Estime a velocidade e a velocidade escalar da partícula no instante $t = 1$.

t	x	y	z
0	2,7	9,8	3,7
0,5	3,5	7,2	3,3
1,0	4,5	6,0	3,0
1,5	5,9	6,4	2,8
2,0	7,3	7,8	2,7

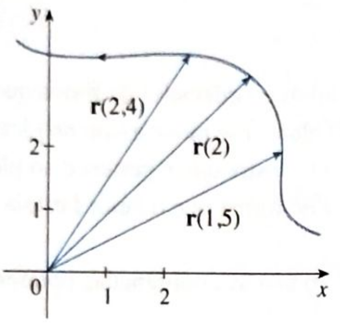
2. A figura mostra a trajetória de uma partícula que se move com vetor posição $\mathbf{r}(t)$ no instante t.

(a) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $2 \leq t \leq 2{,}4$.

(b) Desenhe um vetor que represente a velocidade média da partícula no intervalo de tempo $1{,}5 \leq t \leq 2$.

(c) Escreva uma expressão para o vetor velocidade $\mathbf{v}(2)$.

(d) Desenhe uma aproximação do vetor $\mathbf{v}(2)$ e estime a velocidade escalar da partícula em $t = 2$.



3-8 Determine a velocidade, a aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada. Esboce a trajetória da partícula e desenhe os vetores velocidade e aceleração para os valores de t especificados.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2 - 1, t \rangle, \quad t = 1$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t}, 1 - t \rangle, \quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = 3 \cos t\, \mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} t\, \mathbf{j}, \quad t = \pi/3$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\, \mathbf{i} + e^{2t}\, \mathbf{j}, \quad t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + t^2\, \mathbf{j} + 2\, \mathbf{k}, \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\, \mathbf{i} + 2 \cos t\, \mathbf{j} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{k}, \quad t = 0$

9-14 Determine os vetores velocidade e aceleração e a velocidade escalar da partícula cuja função posição é dada.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 2 \cos t, 3t, 2 \operatorname{sen} t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}\, t\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = t^2\, \mathbf{i} + \ln t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^t(\cos t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + t\, \mathbf{k})$

14. $\mathbf{r}(t) = t \operatorname{sen} t\, \mathbf{i} + t \cos t\, \mathbf{j} + t^2\, \mathbf{k}$

15-16 Determine os vetores velocidade e posição de uma partícula, dadas a sua aceleração, velocidade e posição iniciais.

15. $\mathbf{a}(t) = \mathbf{i} + 2\, \mathbf{j}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i}$

16. $\mathbf{a}(t) = 2\, \mathbf{i} + 6t\, \mathbf{j} + 12t^2\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

17-18

(a) Determine o vetor posição de uma partícula, dada a sua aceleração, e suas velocidade e posição iniciais.

(b) Utilize o computador para traçar a trajetória percorrida pela partícula.

17. $\mathbf{a}(t) = 2t\, \mathbf{i} + \operatorname{sen} t\, \mathbf{j} + \cos 2t\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{i}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$

18. $\mathbf{a}(t) = t\, \mathbf{i} + e^t\, \mathbf{j} + e^{-t}\, \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}(0) = \mathbf{k}, \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. A função posição de uma partícula é dada por $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 5t, t^2 - 16t \rangle$. Quando sua velocidade escalar é mín

20. Qual a força necessária para que uma partícula de massa m t a função posição $\mathbf{r}(t) = t^3\, \mathbf{i} + t^2\, \mathbf{j} + t^3\, \mathbf{k}$?

21. Uma força com módulo 20 N age diretamente no sentido as dente a partir do plano xy em um objeto com massa 4 kg. O ob começa na origem com velocidade inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Determ sua função posição e sua velocidade escalar no instante t.

22. Mostre que, se uma partícula se move com velocidade esca constante, então os vetores velocidade e aceleração são ortogon

23. Um projétil é disparado com uma velocidade escalar inicial 500 m/s e ângulo de elevação de 30°. Determine (a) o alcance projétil, (b) a altura máxima atingida e (c) a velocidade escal no impacto.

24. Repita o Exercício 23, considerando agora o projétil disparad de uma posição 200 m acima do solo.

25. Uma bola é atirada em um ângulo de elevação de 45° em rela ção ao solo. Se a bola cai no solo a uma distância de 90 m, qua a velocidade escalar inicial da bola?

26. Uma arma é disparada com ângulo de elevação de 30°. Qual a velocidade de disparo se o máximo de altura que a bala atinge são 500 m?

27. A velocidade de disparo de uma arma é 150 m/s. Determine dois ângulos de elevação que podem ser utilizados para atingir um alvo que está a 800 m de distância.

28. No beisebol, um batedor rebate uma bola, que está 3 pés acima do chão, em direção à parte central da cerca do campo, que tem 10 pés de altura e dista 400 pés da base do lançamento. A bola deixa o bastão com uma velocidade escalar de 115 pés e com ângulo de 50° acima da horizontal. Foi *home run*? (Em outras palavras, a bola passou por cima da cerca?)

29. Uma cidade medieval tem a forma de um quadrado e é protegida por muralhas com comprimento de 500 m e altura de 15 m. Você é o comandante de um exército atacante e o mais próximo que pode chegar da muralha é 100 m. Seu plano é incendiar a cidade arremessando com catapultas rochas aquecidas sobre a muralha (com velocidade escalar inicial de 80 m/s). Em que intervalo de ângulos você deve dizer a seus homens para armar a catapulta? (Suponha que a trajetória das rochas seja perpendicular à muralha.)

30. Uma bola com massa 0,8 kg é arremessada ao ar em direção ao sul com velocidade escalar de 30 m/s e ângulo de 30° com o solo. Um vento do oeste aplica uma força constante de 4 N à bola na direção leste. Onde a bola cai e com que velocidade escalar?

31. A água, descendo por um trecho reto de um rio, em geral escoa mais rapidamente no meio e a velocidade escalar diminui para quase zero nas margens. Considere um trecho longo de rio escoando para o norte com as margens paralelas distando 40 m uma da outra. Se a velocidade escalar máxima da água é de

3 m/s, podemos usar uma função quadrática como modelo básico para encontrar a taxa com que escoa a água x unidades de distância da margem oeste: $f(x) = \frac{3}{400}x(40 - x)$.

(a) Um barco se move com uma velocidade escalar constante de 5 m/s a partir de um ponto de A na margem oeste enquanto se mantém direcionado perpendicularmente à margem. A que distância rio abaixo, na margem oposta, o barco vai atingir a terra firme? Faça um gráfico da trajetória do barco.

(b) Suponha que quiséssemos pilotar o barco a fim de atracar em um ponto B, diretamente oposto ao A, na margem leste. Se mantivermos a velocidade escalar constante de 5 m/s e uma direção constante, determine o ângulo no qual o barco deve ser conduzido. Depois, faça o gráfico do caminho real que o barco segue. Essa trajetória parece realista?

32. Outro modelo razoável para a velocidade escalar da água do rio no Exercício 31 é a função senoidal: $f(x) = 3\ \mathrm{sen}(\pi x/40)$. Se o piloto do barco quiser atravessar o rio de A até B com direção constante e velocidade escalar constante de 5 m/s, determine o ângulo no qual o barco deve seguir.

33-38 Determine as componentes tangencial e normal do vetor aceleração.

33. $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3)\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j}$

34. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\,\mathbf{i} + (t^2 - 2t)\,\mathbf{j}$

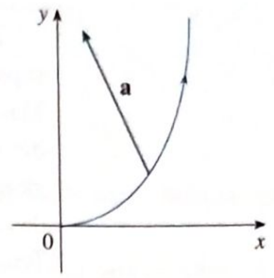
35. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 3t\,\mathbf{k}$

37. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\,t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos^2 t\,\mathbf{j} + \mathrm{sen}^2 t\,\mathbf{k}$

39. O módulo do vetor aceleração a é 10 cm/s^2. Use a figura para estimar as componentes tangencial e normal de a.



40. Se uma partícula com massa m se move com vetor posição $\mathbf{r}(t)$, então seu **momento angular** é definido como $\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)$ e seu **torque** é definido como $\tau(t) = m\mathbf{r}(t) \times \mathbf{a}(t)$. Mostre que $\mathbf{L}'(t) = \tau(t)$. Deduza que, se $\tau(t) = \mathbf{0}$ para todo t, então $\mathbf{L}(t)$ é constante. (Esta é a *lei de conservação do momento angular*.)

41. A função posição de uma nave espacial é

$$\mathbf{r}(t) = (3 + t)\,\mathbf{i} + (2 + \ln t)\,\mathbf{j} + \left(7 - \frac{4}{t^2 + 1}\right)\mathbf{k}$$

e as coordenadas de uma estação espacial são (6, 4, 9). O capitão quer que a nave ataque na estação espacial. Quando os motores da nave devem ser desligados?

42. Um foguete que queima o combustível carregado dentro de si enquanto se move no espaço tem, no instante t, velocidade $\mathbf{v}(t)$ e massa $m(t)$. Se os gases provenientes da combustão escapam a uma velocidade de $\mathbf{v}_e$ relativamente ao foguete, deduz-se da Segunda Lei de Newton do movimento que

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\mathbf{v}_e$$

(a) Mostre que $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) - \ln\dfrac{m(0)}{m(t)}\mathbf{v}_e$.

(b) Para que, em linha reta, o foguete acelere do repouso para o dobro da velocidade escalar de escape de seus gases de combustão, que fração de sua massa inicial o foguete deverá queimar como combustível?

PROJETO APLICADO

LEIS DE KEPLER

Johannes Kepler enunciou três leis sobre o movimento planetário, baseando-se em uma grande quantidade de dados relativos à posição dos planetas em diferentes instantes de tempo.

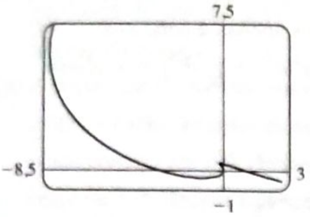
LEIS DE KEPLER

1. Um planeta gira em torno do Sol em uma órbita elíptica com o Sol em um dos focos.
2. O segmento de reta que liga o Sol a um planeta varre áreas iguais em intervalos de tempo iguais.
3. O quadrado do período de revolução de um planeta é proporcional ao cubo do comprimento do eixo maior de sua órbita.

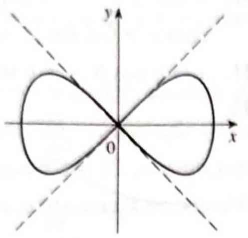
19. Horizontal em $(\pm\sqrt{2}, \pm 1)$ (quatro pontos), vertical em $(\pm 2, 0)$

21. $(0{,}6, 2)$; $(5 \cdot 6^{-6/5}, e^{6^{-1/5}})$

23.



25. $y = x, y = -x$



27. (a) $d \operatorname{sen} \theta/(r - d\cos\theta)$ **29.** $\left(\frac{16}{27}, \frac{29}{9}\right), (-2, -4)$

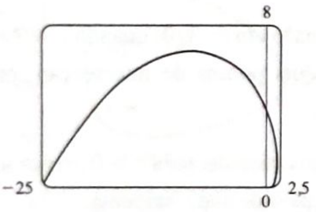
31. πab **33.** $3 - e$ **35.** $2\pi r^2 + \pi d^2$

37. $\int_1^2 \sqrt{1 + 4t^2}\, dt \approx 3{,}1678$

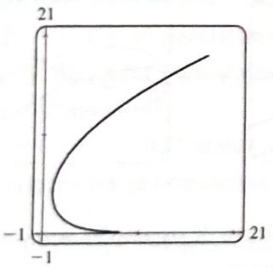
39. $\int_1^{2\pi} \sqrt{3 - 2\operatorname{sen} t - 2\cos t}\, dt \approx 10{,}0367$ **41.** $4\sqrt{2} - 2$

43. $-\sqrt{10}/3 + \ln(3 + \sqrt{10}) + \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})$

45. $\sqrt{2}\,(e^{\pi} - 1)$

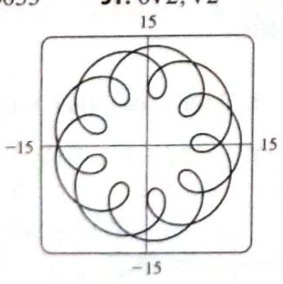


47. $e^3 + 11 - e^{-8}$



49. 612,3053 **51.** $6\sqrt{2}, \sqrt{2}$

55. (a) $t \in [0, 4\pi]$



(b) ≈ 294

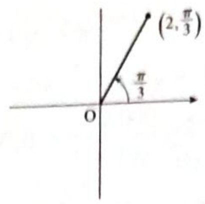
57. $\int_0^1 2\pi(t^2 + 1)e^t \sqrt{e^{2t}(t + 1)^2(t^2 + 2t + 2)}\, dt \approx 103{,}5999$

59. $\frac{2}{1215}\pi(247\sqrt{13} + 64)$ **61.** $\frac{6}{5}\pi a^2$ **63.** 59,101

65. $\frac{24}{5}\pi(949\sqrt{26} + 1)$ **71.** $\frac{1}{4}$

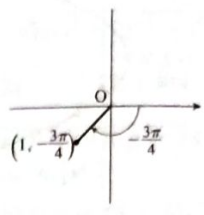
EXERCÍCIOS 10.3 ▪ PÁGINA 614

1. (a)



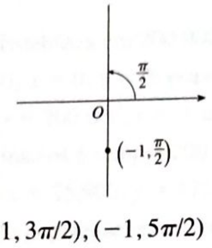
$(2, 7\pi/3), (-2, 4\pi/3)$

(b)



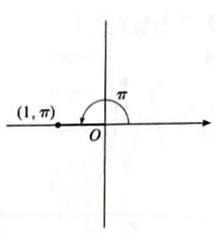
$(1, 5\pi/4), (-1, \pi/4)$

(c)



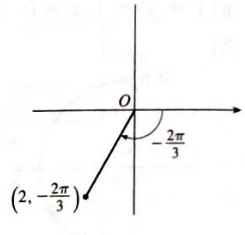
$(1, 3\pi/2), (-1, 5\pi/2)$

3. (a)



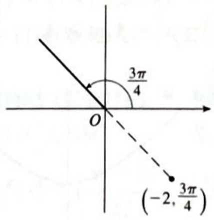
$(-1, 0)$

(b)



$(-1, \sqrt{3})$

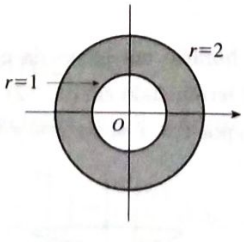
(c)



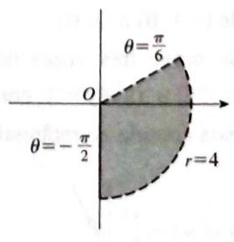
$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

5. (a) (i) $(2\sqrt{2}, 7\pi/4)$ (ii) $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$
(b) (i) $(2, 2\pi/3)$ (ii) $(-2, 5\pi/3)$

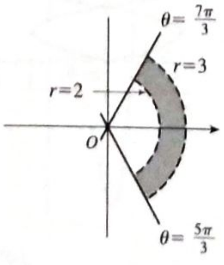
7.



9.



11.



13. $2\sqrt{3}$

15. Círculo, centro O, raio 2

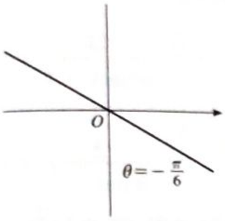
17. Círculo, centro $(0, \frac{3}{2})$, raio $\frac{3}{2}$

19. Reta horizontal, 1 unidade acima do eixo x

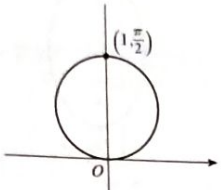
21. $r \operatorname{sen} \theta = 5$ **23.** $r = -\operatorname{cotg} \theta \operatorname{cossec} \theta$ **25.** $r = 2c \cos \theta$

27. (a) $\theta = \pi/6$ (b) $x = 3$

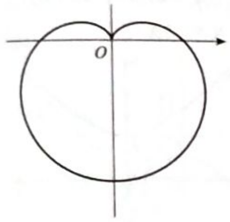
29.



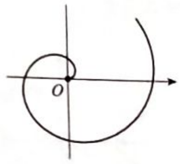
31.



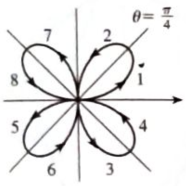
33.



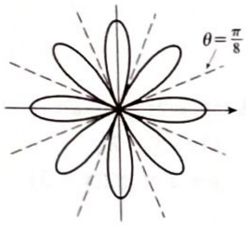
35.



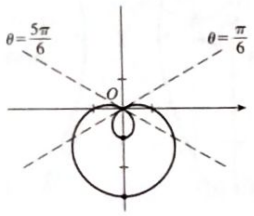
37.



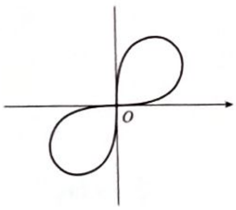
39.



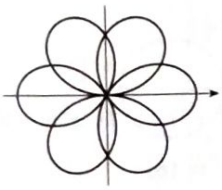
41.



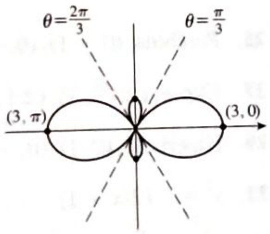
43.



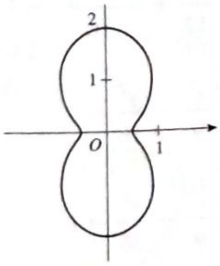
45.



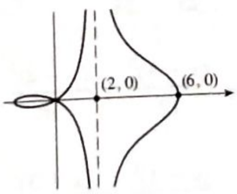
47.



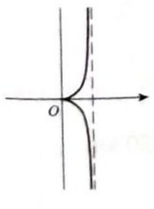
49.



51.



53.



55. (a) Para $c < -1$, o laço interno começa em $\theta = \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ e termina em $\theta = \pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$; para $c > 1$, ele começa em $\theta = \pi + \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$ e termina em $\theta = 2\pi - \operatorname{sen}^{-1}(-1/c)$

57. $\sqrt{3}$ **59.** $-\pi$ **61.** 1

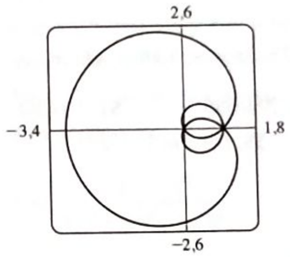
63. Horizontal em $(3/\sqrt{2}, \pi/4)$, $(-3/\sqrt{2}, 3\pi/4)$; vertical em $(3, 0)$, $(0, \pi/2)$

65. Horizontal em $(\frac{3}{2}, \pi/3)$, $(0, \pi)$ [o polo], e $(\frac{3}{2}, 5\pi/3)$; vertical em $(2, 0)$, $(\frac{1}{2}, 2\pi/3)$, $(\frac{1}{2}, 4\pi/3)$

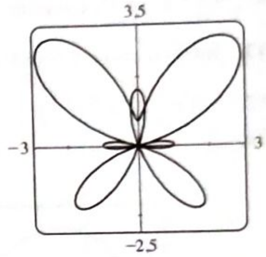
67. Horizontal em $(3, \pi/2)$, $(1, 3\pi/2)$; vertical em $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \alpha)$, $(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}, \pi - \alpha)$ onde $\alpha = \operatorname{sen}^{-1}(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3})$

69. Centro $(b/2, a/2)$, raio $\sqrt{a^2 + b^2}/2$

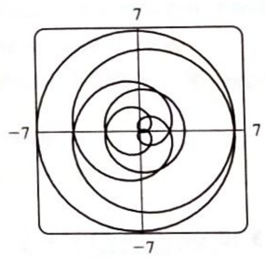
71.



73.



75.



77. Por rotação anti-horária de um ângulo $\pi/6$, $\pi/3$, ou α em torno da origem.

79. (a) Uma rosácea com n laços se n for ímpar e $2n$ laços se n for par

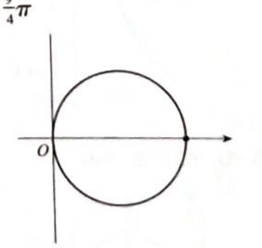
(b) O número de laços é sempre $2n$

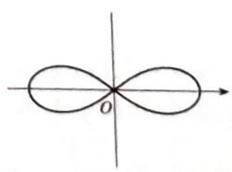
81. Para $0 < a < 1$, a curva é oval e ela desenvolve uma covinha quando $a \to 1^-$. Quando $a > 1$, a curva se divide em duas partes, uma das quais tem um laço.

EXERCÍCIOS 10.4 ▪ PÁGINA 620

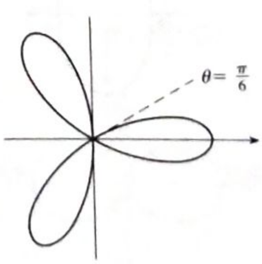
1. $\pi^5/10\,240$ **3.** $\pi/12 + \frac{1}{8}\sqrt{3}$ **5.** $\pi^3/6$ **7.** $\frac{41}{4}$

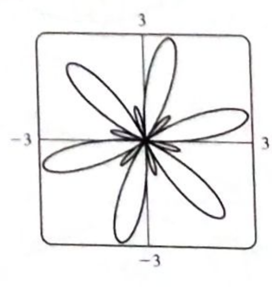
9. $\frac{9}{4}\pi$ **11.** 4





13. π **15.** 3π





41. ≈ 417 N **43.** (b) $\sqrt{97/3}$

49. (a) Não (b) Não (c) Sim

EXERCÍCIOS 12.5 ■ PÁGINA 763

1. (a) Verdadeiro (b) Falso (c) Verdadeiro (d) Falso
(e) Falso (f) Verdadeiro (g) Falso (h) Verdadeiro
(i) Verdadeiro (j) Falso (k) Verdadeiro

3. $\mathbf{r} = (-2\,\mathbf{i} + 4\,\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) + t(3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 8\,\mathbf{k})$;
$x = -2 + 3t, y = 4 + t, z = 10 - 8t$

5. $\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 6\mathbf{k}) + t(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k})$; $x = 1 + t, y = 3t, z = 6 + t$

7. $x = 1 - 5t, y = 3, z = 2 - 2t$; $\dfrac{x-1}{-5} = \dfrac{z-2}{-2}, y = 3$

9. $x = 2 + 2t, y = 1 + \frac{1}{2}t, z = 3 - 4t$;
$(x - 2)/2 = 2y - 2 = (z + 3)/(-4)$

11. $x = 1 + t, y = -1 + 2t, z = 1 + t$; $x - 1 = (y + 1)/2 = z - 1$

13. Sim

15. (a) $(x - 1)/(-1) = (y + 5)/2 = (z - 6)/(-3)$
(b) $(-1, -1, 0), (-\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}), (0, -3, 3)$

17. $\mathbf{r}(t) = (2\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\,\mathbf{k}) + t(2\,\mathbf{i} + 7\,\mathbf{j} - 3\,\mathbf{k}), 0 \leq t \leq 1$

19. Paralelas **21.** Reversas

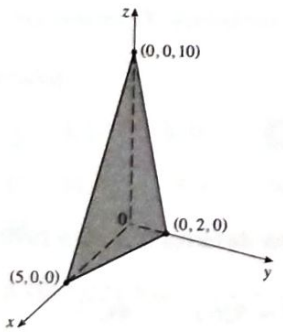
23. $-2x + y + 5z = 1$ **25.** $x + y - z = -1$

27. $2x - y + 3z = 0$ **29.** $3x - 7z = -9$

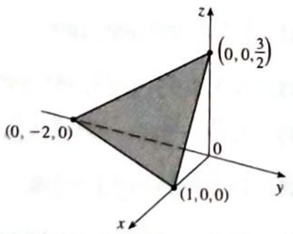
31. $x + y + z = 2$ **33.** $-13x + 17y + 7z = -42$

35. $33x + 10y + 4z = 190$ **37.** $x - 2y + 4z = -1$

39.



41.



43. $(1, 0, 0)$ **45.** $(2, 3, 1)$ **47.** $1, 0, -1$

49. Perpendiculares **51.** Nenhum dos dois, $\approx 70{,}5^\circ$

53. Paralelos

55. (a) $x = 1, y = -t, z = t$ (b) $\cos^{-1}\left(\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\right) \approx 15{,}8^\circ$

57. $x = 1, y - 2 = -z$

59. $x + 2y + z = 5$ **61.** $(x/a) + (y/b) + (z/c) = 1$

63. $x = 3t, y = 1 - t, z = 2 - 2t$

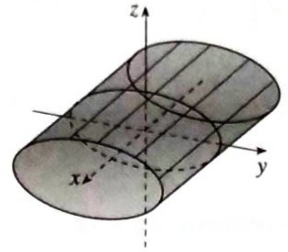
65. P_1 e P_3 são paralelos, P_2 e P_4 são idênticos

67. $\sqrt{61/14}$ **69.** $\frac{18}{7}$ **71.** $5/(2\sqrt{14})$ **75.** $1/\sqrt{6}$

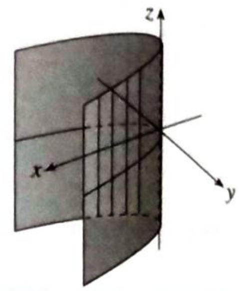
EXERCÍCIOS 12.6 ■ PÁGINA 771

1. (a) Parábola
(b) Cilindro parabólico com geratriz paralela ao eixo z
(c) Cilindro parabólico com a geratriz paralela ao eixo x

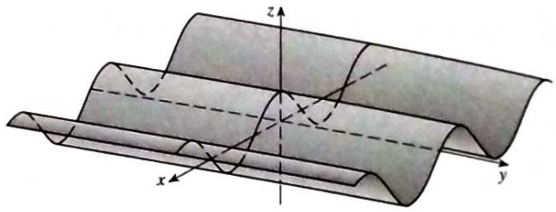
3. Cilindro elíptico



5. Cilindro parabólico

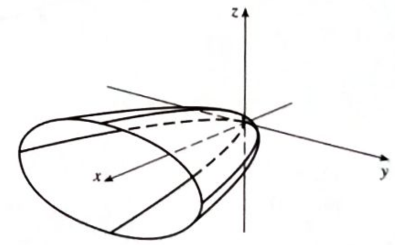


7. Superfície cilíndrica

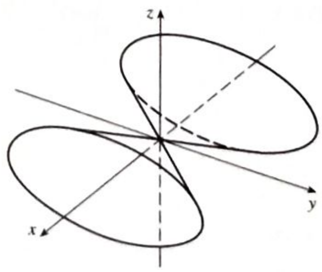


9. (a) $x = k, y^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbole $(k \neq \pm 1)$;
$y = k, x^2 - z^2 = 1 - k^2$, hipérbole $(k \neq \pm 1)$;
$z = k, x^2 + z^2 = 1 + k^2$, círculo
(b) O hiperboloide é girado de modo que ele tenha eixo no eixo y
(c) O hiperboloide é transladado uma unidade na direção do eixo y negativo

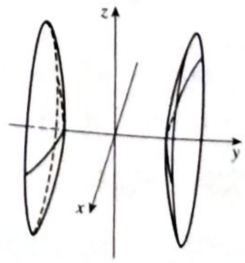
11. Paraboloide elíptico com eixo no eixo x



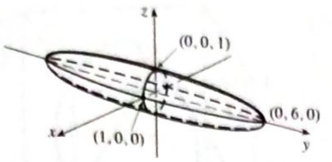
13. Cone elíptico com eixo no eixo x



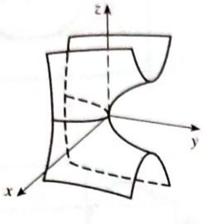
15. Hiperboloide de duas folhas



17. Elipsoide



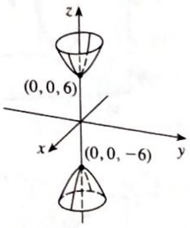
19. Paraboloide hiperbolico



21. VII **23.** II **25.** VI **27.** VIII

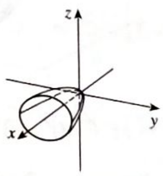
29. $-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{36}=1$

Hiperboloide de duas folhas com eixo no eixo z



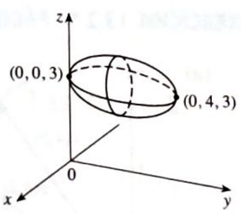
31. $\dfrac{x}{6}=\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}$

Paraboloide elíptico com vértice $(0, 0, 0)$ e eixo no eixo x



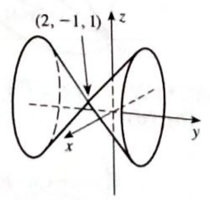
33. $x^2+\dfrac{(y-2)^2}{4}+(z-3)^2=1$

Elipsoide com centro $(0, 2, 3)$

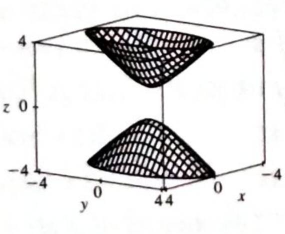


35. $(y+1)^2=(x-2)^2+(z-1)^2$

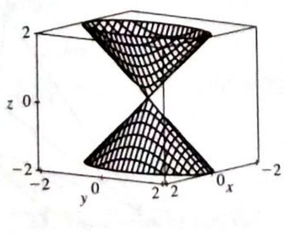
Cone circular com vértice $(2, -1, 1)$ e eixo paralelo ao eixo y



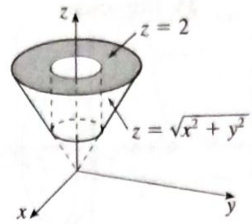
37.



39.



41.



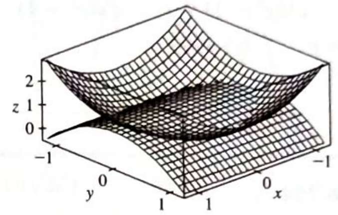
43. $y=x^2+z^2$

45. $-4x=y^2+z^2$, paraboloide

47. (a) $\dfrac{x^2}{(6\,378{,}137)^2}+\dfrac{y^2}{(6\,378{,}137)^2}+\dfrac{z^2}{(6\,356{,}523)^2}=1$

(b) Círculo (c) Elipse

51.



CAPÍTULO 12 REVISÃO ▪ PÁGINA 773

Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Verdadeiro **5.** Verdadeiro **7.** Verdadeiro
9. Verdadeiro **11.** Falso **13.** Falso **15.** Falso
17. Verdadeiro

Exercícios

1. (a) $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=69$
(b) $(y-2)^2+(z-1)^2=68,\ x=0$
(c) Centro $(4, -1, -3)$, raio 5

3. $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=3\sqrt{2}$; $|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|=3\sqrt{2}$; para fora da página

5. $-2, -4$ **7.** (a) 2 (b) -2 (c) -2 (d) 0

9. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx 71°$ **11.** (a) $\langle 4, -3, 4\rangle$ (b) $\sqrt{41}/2$

13. 166 N, 114 N

15. $x=4-3t,\ y=-1+2t,\ z=2+3t$

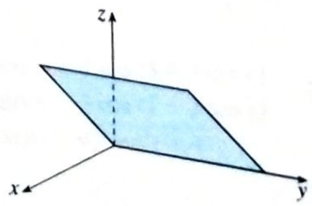
17. $x=-2+2t,\ y=2-t,\ z=4+5t$

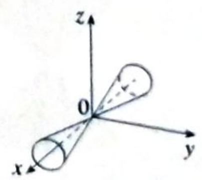
19. $-4x+3y+z=-14$ **21.** $(1, 4, 4)$

23. Reversas **25.** $x+y+z=4$

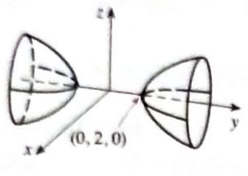
27. $22/\sqrt{26}$

29. Plano **31.** Cone

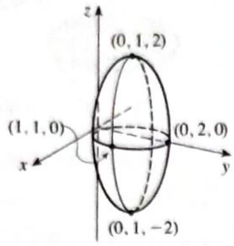




33. Hiperboloide de duas folhas



35. Elipsoide



37. $4x^2 + y^2 + z^2 = 16$

PROBLEMAS QUENTES ▪ PÁGINA 776

1. $(\sqrt{3} - 1{,}5)$ m

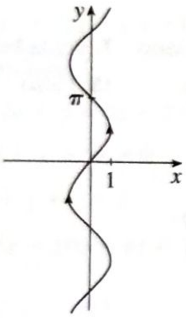
3. (a) $(x + 1)/(-2c) = (y - c)/(c^2 - 1) = (z - c)/(c^2 + 1)$
(b) $x^2 + y^2 = t^2 + 1, z = t$ (c) $4\pi/3$

CAPÍTULO 13

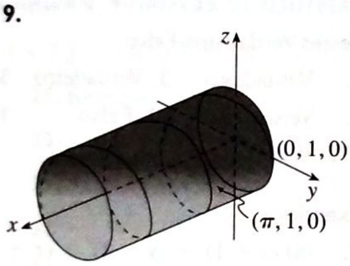
EXERCÍCIOS 13.1 ▪ PÁGINA 784

1. $[1, 5]$ **3.** $\langle 1, 0, 0 \rangle$ **5.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

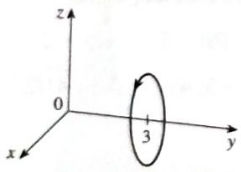
7.



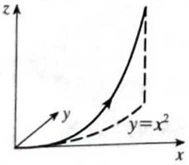
9.



11.



13.

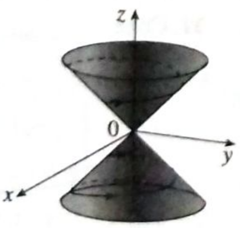


15. $\mathbf{r}(t) = \langle t, 2t, 3t \rangle, 0 \leq t \leq 1; x = t, y = 2t, z = 3t, 0 \leq t \leq 1$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 3t + 1, 2t - 1, 5t + 2 \rangle, 0 \leq t \leq 1;$
$x = 3t + 1, y = 2t - 1, z = 5t + 2, 0 \leq t \leq 1$

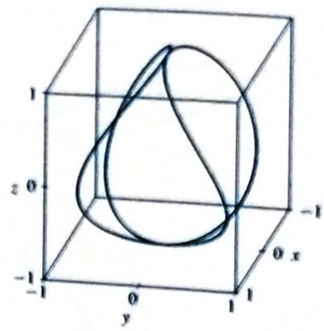
19. VI **21.** IV **23.** V

25.

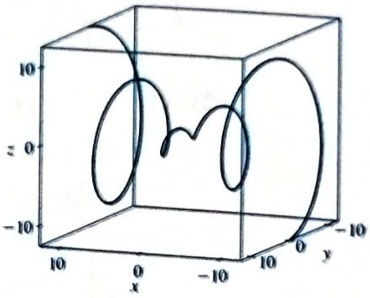


27. $(0, 0, 0), (1, 0, 1)$

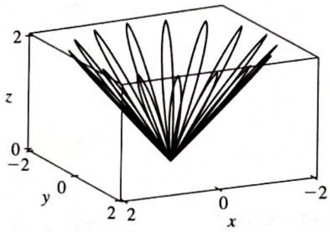
29.



31.



33.

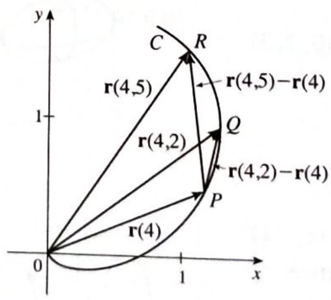


37. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}(t^2 - 1)\mathbf{j} + \frac{1}{2}(t^2 + 1)\,\mathbf{k}$

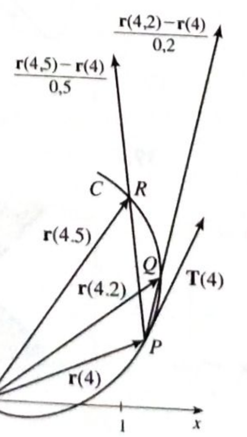
39. $x = 2\cos t, y = 2\,\mathrm{sen}\,t, z = 4\cos^2 t$ **41.** Sim

EXERCÍCIOS 13.2 ▪ PÁGINA 789

1. (a)

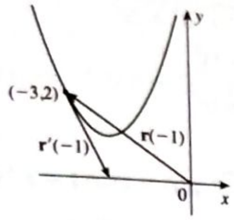


(b), (d)



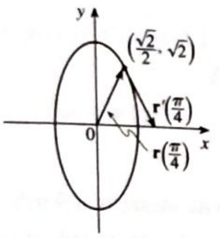
(c) $\mathbf{r}'(4) = \lim_{h \to 0} \dfrac{\mathbf{r}(4+h) - \mathbf{r}(4)}{h}$; $\mathbf{T}(4) = \dfrac{\mathbf{r}'(4)}{|\mathbf{r}'(4)|}$

3.



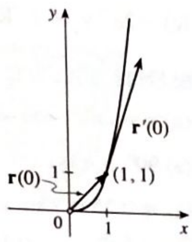
(b) $\mathbf{r}'(t) = \langle 1, 2t \rangle$

5. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \cos t\,\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$

7. (a), (c)



(b) $\mathbf{r}'(t) = e^t\mathbf{i} + 3e^{3t}\mathbf{j}$

9. $\mathbf{r}'(t) = \langle t\cos t + \text{sen}\,t, 2t, \cos 2t - 2t\,\text{sen}\,2t \rangle$

11. $\mathbf{r}'(t) = 4e^{4t}\,\mathbf{k}$ **13.** $\mathbf{r}'(t) = 2te^{t^2}\mathbf{i} + [3/(1+3t)]\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} + 2t\mathbf{c}$ **17.** $\langle 15/\sqrt{262}, 6/\sqrt{262}, 1/\sqrt{262} \rangle$

19. $\frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$

21. $\langle 1, 2t, 3t^2 \rangle, \langle 1/\sqrt{14}, 2/\sqrt{14}, 3/\sqrt{14} \rangle, \langle 0, 2, 6t \rangle, \langle 6t^2, -6t, 2 \rangle$

23. $x = 1 + 5t, y = 1 + 4t, z = 1 + 3t$

25. $x = 1 - t, y = t, z = 1 - t$

27. $x = t, y = 1 - t, z = 2t$

29. $x = -\pi - t, y = \pi + t, z = -\pi t$

31. 66° **33.** $4\,\mathbf{i} - 3\,\mathbf{j} + 5\,\mathbf{k}$ **35.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. $e^t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t\ln t - t)\mathbf{k} + \mathbf{C}$

39. $t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j} + (\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{3})\,\mathbf{k}$

45. $2t\cos t + 2\,\text{sen}\,t - 2\cos t\,\text{sen}\,t$

EXERCÍCIOS 13.3 ▪ PÁGINA 797

1. $20\sqrt{29}$ **3.** $e - e^{-1}$ **5.** $\frac{1}{27}(13^{3/2} - 8)$ **7.** 15 3841

9. 1 2780 **11.** 42

13. $\mathbf{r}(t(s)) = \dfrac{2}{\sqrt{29}}\,s\,\mathbf{i} + \left(1 - \dfrac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(5 + \dfrac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

15. $(3\,\text{sen}\,1, 4, 3\cos 1)$

17. (a) $\langle (2/\sqrt{29})\cos t, 5/\sqrt{29}, (2/\sqrt{29})\,\text{sen}\,t \rangle$,
$\langle -\text{sen}\,t, 0, -\cos t \rangle$ (b) $\frac{2}{29}$

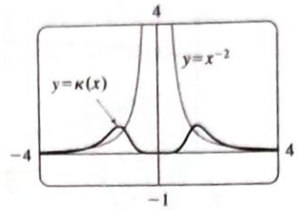
19. (a) $\langle t^2, 2t, 2 \rangle/(t^2 + 2), \langle 2t, 2 - t^2, -2t \rangle/(t^2 + 2)$ (b) $2/(t^2 + 2)^2$

21. $2/(4t^2 + 1)^{3/2}$ **23.** $\frac{4}{25}$ **25.** $\frac{1}{7}\sqrt{\frac{19}{14}}$

27. $2/(4x^2 - 8 + 5)^{3/2}$ **29.** $15\sqrt{x}/(1 + 100x^3)^{3/2}$

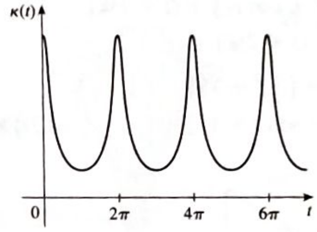
31. $(-\frac{1}{2}\ln 2, 1/\sqrt{2})$; tende a 0 **33.** (a) P (b) 1,3, 0,7

35.



37. a é $y = f(x)$, b é $y = \kappa(x)$

39. $\kappa(t) = \dfrac{6\sqrt{4\cos^2 t - 12\cos t + 13}}{(17 - 12\cos t)^{3/2}}$

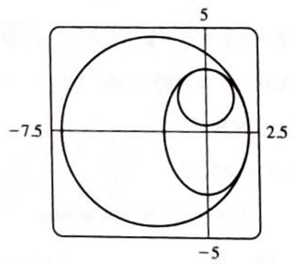


múltiplos inteiros de 2π

41. $1/(\sqrt{2}e^t)$ **43.** $\langle \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \rangle, \langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \rangle, \langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$

45. $y = 6x + \pi, x + 6y = 6\pi$

47. $(x + \frac{5}{2})^2 + y = \frac{81}{4}, x^2 + (y - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$



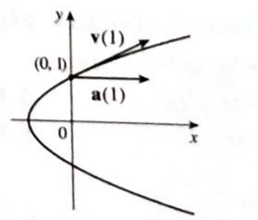
49. $(-1, -3, 1)$ **57.** $2/(t^4 + 4t^2 + 1)$

59. $2{,}07 \times 10^{10}$ Å ≈ 2 m

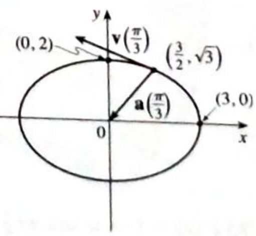
EXERCÍCIOS 13.4 ▪ PÁGINA 805

1. (a) $1{,}8\mathbf{i} - 3{,}8\,\mathbf{j} - 0{,}7\mathbf{k}, 2{,}0\mathbf{i} - 2{,}4\,\mathbf{j} - 0{,}6\mathbf{k}$,
$2{,}8\mathbf{i} + 1{,}8\mathbf{j} - 0{,}3\,\mathbf{k}, 2{,}8\mathbf{i} + 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}4\,\mathbf{k}$
(b) $2{,}4\,\mathbf{i} - 0{,}8\mathbf{j} - 0{,}5\,\mathbf{k}$, 2,58

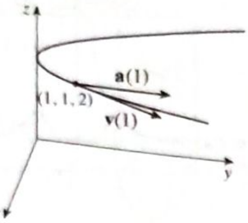
3. $\mathbf{v}(t) = \langle 2t, 1 \rangle$
$\mathbf{a}(t) = \langle 2, 0 \rangle$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{4t^2 + 1}$



5. $\mathbf{v}(t) = -3\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = -3\cos t\,\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{5\,\text{sen}^2\,t + 4}$



7. $\mathbf{v}(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$
$\mathbf{a}(t) = 2\,\mathbf{j}$
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$



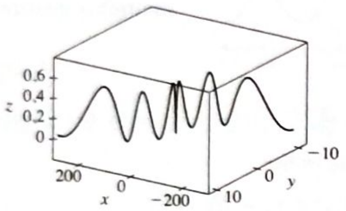
9. $\langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$, $\langle 0, 2, 6t \rangle$, $\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$

11. $\sqrt{2}\,\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$, $e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $e^t + e^{-t}$

13. $e^t[(\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (\operatorname{sen} t + \cos t)\,\mathbf{j} + (t + 1)\mathbf{k}]$,
$e^t[-2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + (t + 2)\mathbf{k}]$, $e^t\sqrt{t^2 + 2t + 3}$

15. $\mathbf{v}(t) = t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + 1\right)\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$

17. (a) $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + t\right)\mathbf{i} + (t - \operatorname{sen} t + 1)\,\mathbf{j} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t\right)\mathbf{k}$
(b)



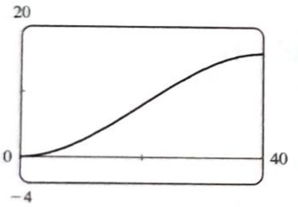
19. $t = 4$ **21.** $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} - t\,\mathbf{j} + \frac{5}{2}t^2\mathbf{k}$, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{25t^2 + 2}$

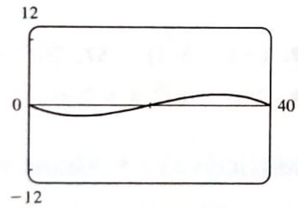
23. (a) ≈ 22 km (b) $\approx 3{,}2$ km (c) 500 m/s

25. 30 m/s **27.** $\approx 10{,}2$, $\approx 79{,}8$

29. $13{,}0° < \theta < 36{,}0°$, $55{,}4° < \theta < 85{,}5°$

31. (a) 16 m (b) $\approx 23{,}6°$ rio acima





33. $6t$, 6 **35.** 0, 1 **37.** $e^t - e^{-t}$, $\sqrt{2}$

39. 4,5 cm/s^2, 9,0 cm/s^2 **41.** $t = 1$

CAPÍTULO 13 REVISÃO ■ PÁGINA 809

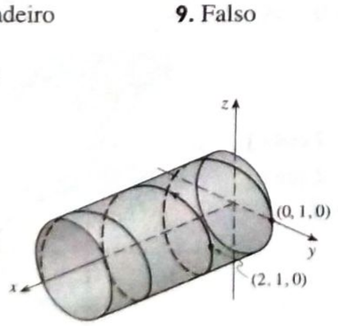
Testes Verdadeiro-Falso

1. Verdadeiro **3.** Falso **5.** Falso

7. Verdadeiro **9.** Falso **11.** Verdadeiro

Exercícios

1. (a)



(b) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} - \pi \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{j} + \pi\cos \pi t\,\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}''(t) = -\pi^2\cos \pi t\,\mathbf{j} - \pi^2 \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}$

3. $\mathbf{r}(t) = 4\cos t\,\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + (5 - 4\cos t)\mathbf{k}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

5. $\frac{1}{3}\mathbf{i} - (2/\pi^2)\,\mathbf{j} + (2/\pi)\,\mathbf{k}$ **7.** 86,631 **9.** $\pi/2$

11. (a) $\langle t^2, t, 1\rangle/\sqrt{t^4 + t^2 + 1}$
(b) $\langle 2t, 1 - t^4, -2t^3 - t\rangle/\sqrt{t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 5t^2}$
(c) $\sqrt{t^8 + 4t^6 + 2t^4 + 5t^2}/(t^4 + t^2 + 1)^2$

13. $12/17^{3/2}$ **15.** $x - 2y + 2\pi = 0$

17. $\mathbf{v}(t) = (1 + \ln t)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} - e^{-t}\,\mathbf{k}$,
$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{2 + 2\ln t + (\ln t)^2 + e^{-2t}}$, $\mathbf{a}(t) = (1/t)\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{k}$

19. (a) Cerca de 0,8 m acima do solo, 18,4 m do atleta
(b) $\approx 6{,}3$ m (c) $\approx 19{,}1$ m do atleta

21. (c) $-2e^{-t}\mathbf{v}_d + e^{-t}\mathbf{R}$

PROBLEMAS QUENTES ■ PÁGINA 812

1. (a) $\mathbf{v} = \omega R(-\operatorname{sen} \omega t\,\mathbf{i} + \cos \omega t\,\mathbf{j})$ (c) $\mathbf{a} = \omega^2\mathbf{r}$

3. (a) 90°, $v_0^2/(2g)$

5. (a) $\approx 0{,}25$ m para a direita do lado da mesa, $\approx 4{,}9$ m/s
(b) $\approx 5{,}9°$ (c) $\approx 0{,}56$ m para a direita do lado da mesa

7. 56°

CAPÍTULO 14

EXERCÍCIOS 14.1 ■ PÁGINA 825

1. (a) -27; uma temperatura de -15 °C com vento soprando a 40 km/h dá uma sensação equivalente a cerca de -27 °C sem vento.
(b) Quando a temperatura é -20 °C, qual velocidade do vento dá uma sensação térmica de -30 °C? 20 km/h
(c) Com uma velocidade do vento de 20 km/h, qual temperatura dá uma sensação térmica de -49 °C? -35 °C
(d) Uma função da velocidade do vento que dá os valores da sensação térmica quando a temperatura é -5 °C
(e) Uma função da temperatura que dá os valores da sensação térmica quando a velocidade do vento é 50 km/h

3. Sim

5. (a) 7,7; um vento de 80 km/h soprando em mar aberto por 15 h criará ondas de cerca de 7,7 m de altura.
(b) $f(60, t)$ é uma função de t que dá a altura das ondas produzidas por ventos de 60 km/h soprando por t horas.
(c) $f(v, 30)$ é uma função de v que dá a altura das ondas produzidas por ventos de velocidade v soprando por 30 horas.

7. (a) 4 (b) $\mathbb{R}^2$ (c) $[0, \infty)$

9. (a) e (b) $\{(x, y, z) \mid z \geqslant x^2 + y^2\}$ (c) $[1, \infty)$

11. $\{(x, y) \mid y \geqslant -x\}$