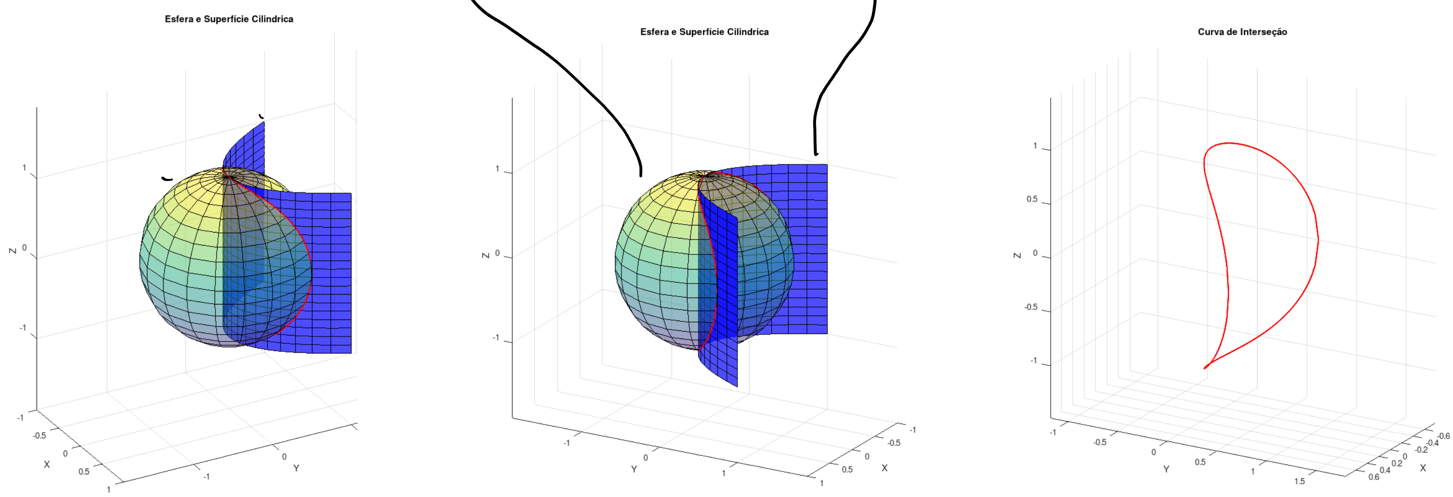
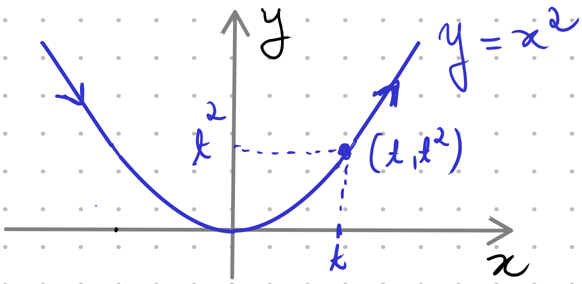
Curva de interseção entre as superfícies

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad e \quad y=x^2$$



Neste caso, como a variável y está em função de x (y está isolada), podemos usar x como parâmetro, isto é, $x=t$ e $y=t^2$.

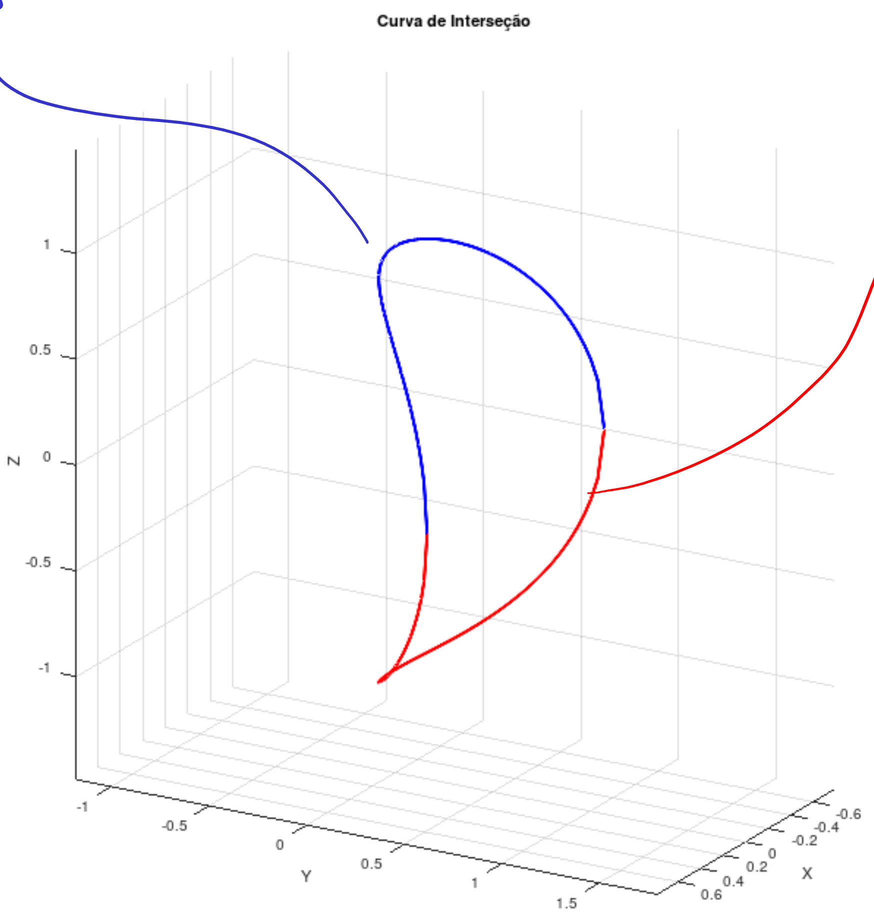


Com isso, substituindo x e y na equação da esfera, temos que

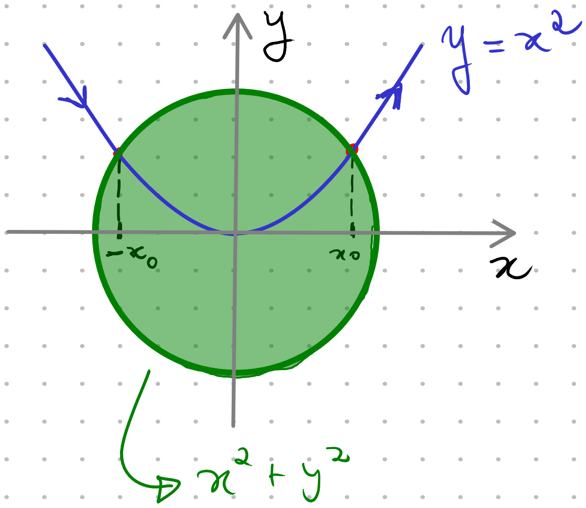
$$z^2 = 1 - t^2 - t^4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1 - t^2 - t^4}.$$

Neste caso, parametrizamos a curva de interseção em dois pedaços:

$$\underbrace{C_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = \sqrt{1 - t^2 - t^4} \end{cases}}_{\text{parte superior da curva}} \quad \text{e} \quad \underbrace{C_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = -\sqrt{1 - t^2 - t^4} \end{cases}}_{\text{parte inferior da curva}}$$



Resta determinar o intervalo de variação do parâmetro.



A figura ao lado representa as superfícies vistas de cima do plano xy. Percebemos que x varia entre as interseções de $y = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$, isto é, $[-x_0, x_0]$.

Passemos a determiná-los.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow y + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 + y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$ Como $y > 0$, então

$$\Rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \text{ donde } x^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}.$$ Logo as parametrizações são:

$$\vec{\alpha}_1(t) = \left(t, t^2, \sqrt{1-t^2+t^4}\right), \quad -x_0 \leq t \leq x_0$$

e

$$\vec{\alpha}_2(t) = \left(t, t^2, -\sqrt{1-t^2+t^4}\right), \quad -x_0 \leq t \leq x_0.$$