Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Considere as funções $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ e $g(x) = 4x - 4$.

(a) [2 pts] Esboce a região limitada pelo gráfico dessas funções.

(b) [2 pts] Determine a área dessa região.

Solução:

(a) Vamos esboçar os dois gráficos juntos e a região entre eles. Como ambos são polinômios, vamos primeiro determinar suas raízes. É fácil ver que $x = 1$ é raíz de f, portanto, fazendo a divisão polinomial de $x^3 - 2x^2 - x + 2$ por $x - 1$, temos que

$$f(x) = (x-1)(x^2 - x - 2).$$

Com isso,

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = 2.$$

Obviamente

$$g(x) = 0 \Rightarrow 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

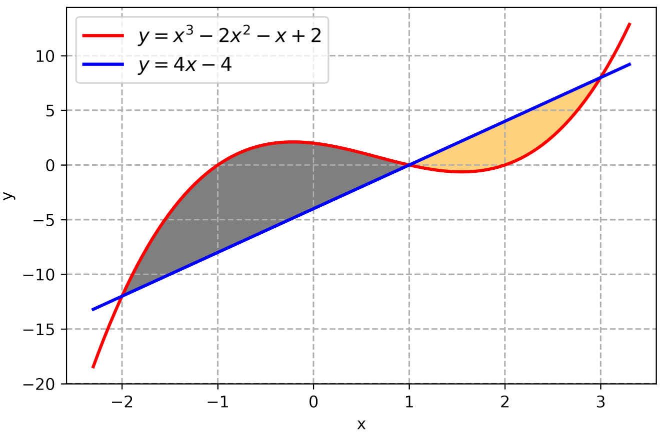
Agora vejamos os pontos de interseção. Claro que um dos pontos de interseção é $x = 1$. Os demais, podemos obter fazendo:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 2) = 4(x-1) \\ &\Rightarrow x^2 - x - 2 = 4 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ &\Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = 3. \end{aligned}$$

Em resumo, os pontos de interseção são

$$x = 1 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 3.$$

Portanto, podemos facilmente esboçar os gráficos e a região de interseção.



(b) Vamos calcular a integral indefinida de $f(x) - g(x)$.

$$\int x^3 - 2x^2 - 5x + 6\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x + C.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{1} f(x) - g(x)\,dx + \int_{1}^{3} g(x) - f(x)\,dx \\ &= \int_{-2}^{1} x^3 - 2x^2 - 5x + 6\,dx + \int_{1}^{3} -x^3 + 2x^2 + 5x - 6\,dx = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12} \end{aligned}$$

Questão 2. .... ________/ 6 pts

Determine uma EDO que tenha como solução geral:

(a) [2 pts] $y(x) = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) [2 pts] $y(x) = (A + Bx)\, e^{-\frac{x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) [2 pts] $y(x) = (A\cos(3x) + B\sin(3x))\, e^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

(a) As raízes da equação característica são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Portanto, a equação característica é:

$$\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)(\lambda + 1) = \lambda^2 + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Portanto uma EDO é:

$$y'' + \frac{y'}{2} - \frac{y}{2} = 0.$$

(b) Como a única raíz é $\lambda = -\frac{1}{3}$, temos que a equação caracteística é característico é

$$\left(\lambda + \frac{1}{3}\right)^2 = \lambda^2 + \frac{2\lambda}{3} + \frac{1}{9} = 0.$$

Portanto, a EDO buscada é

$$y'' + \frac{2y'}{3} + \frac{y}{9} = 0.$$

(c) Sabemos que as raízes da equação características são:

$$\lambda_1 = 2 + 3i,\ \ \lambda_2 = 2 - 3i.$$

Com isso, a equação característica é:

$$(\lambda - 2 - 3i)\,(\lambda - 2 + 3i) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

Portanto,

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$