Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª chamada da
2ª Prova de Cálculo 2
27/01/2025
Turma C1– 2024-2

Gabarito

Questão 1. ....________/ 3 pts

Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{xy(x)}{x^2+1} + \dfrac{d}{dx}y(x) = \sqrt{x^2+1} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Solução: Como se trata de uma EDO linear de primeira ordem, vamos calcular o fator integrante:

$$\mu = e^{\int \frac{x}{x^2+1}\,dx} = e^{\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx} = e^{\log(\sqrt{x^2+1})} = \sqrt{x^2+1}.$$

Multiplicando a EDO por μ, temos que

$$\frac{xy(x)}{\sqrt{x^2+1}} + \sqrt{x^2+1}\frac{d}{dx}y(x) = x^2+1 \Rightarrow (\sqrt{x^2+1}y(x))' = x^2+1$$

Integrando em relação a x,

$$\sqrt{x^2+1}y(x) = \int x^2+1\,dx + C = \frac{x^3}{3} + x + C,$$

donde,

$$y(x) = \frac{C + \frac{x^3}{3} + x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Fazendo $y(0) = -1$, temos que $C = -1$, logo a solução do PVI é:

$$y(x) = \frac{\frac{x^3}{3} + x - 1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Considere a EDO

$$y''(x) - \frac{x+1}{x}y'(x) = xe^x, \ x > 0$$

(a) Mostre que $y_1(x) = 1$ e $y_2(x) = (x-1)\,e^x$ são soluções fundamentais da EDO homogênea.

(b) Determine a solução geral da não-homogênea.

Solução: A solução geral da EDO homogênea é

$$y_h(t) = c_1 + c_2\,(x-1)\,e^x, \ \forall x > 0. \tag{1}$$

Solução particular da EDO não-homogênea pelo método da variação dos parâmetros:
Suponha que a solução particular é da forma

$$y_p(t) = u_1(t)1 + u_2(t)\,(x-1)\,e^x.$$

Vamos calcular o Wronskiano

$$W[y_1, y_2](t) = \det\begin{pmatrix} 1 & (x-1)\,e^x \\ 0 & (x-1)\,e^x + e^x \end{pmatrix} = xe^x.$$

Com isso,

$$u_1(t) = -\int \frac{(x-1)\,e^x xe^x}{xe^x}\,dt = \int -(x-1)\,e^x\,dt = (2-x)\,e^x + C,$$

e

$$u_2(t) = \int \frac{1xe^x}{xe^x}\,dt = \int 1\,dt = x + C,$$

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Determine uma EDO que tenha como solução geral:

(a) [1 pt] $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(b) [1 pt] $y(x) = (A + Bx)\,e^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) [1 pt] $y(x) = (A\cos(2x) + B\sin(2x))\,e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Solução:

(a) As raízes da equação característica são $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 1$. Portanto, a equação característica é:

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2) = \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Portanto uma EDO é:

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

(b) Como a única raíz é $\lambda = 3$, temos que a equação caracteística é característico é

$$(\lambda - 3)^2 = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0.$$

Portanto, a EDO buscada é

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

(c) Sabemos que as raízes da equação características são:

$$\lambda_1 = -1 + 2i, \;\; \lambda_2 = -1 - 2i.$$

Com isso, a equação característica é:

$$(\lambda + 1 - 2i)(\lambda + 1 + 2i) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

Portanto,

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Questão 4 (bonus). .... ______/ 1 bonus

O que você mais gostou no conteúdo da disciplina? Elabore.