Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª chamada da
1ª Prova de Cálculo 2
27/01/2025
Turma C1– 2024-2

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 6 pts

Calcule as integrais:

(a) [2 pts] $\displaystyle\int \frac{\cos\left(\log\left(x\right)\right)}{x}\, dx$

(b) [2 pts] $\displaystyle\int x\cos\left(kx\right) dx$

(c) [2 pts] $\displaystyle\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx.$

Solução:

(a) Fazendo a substituição $u = \log(x)$, $du = \frac{1}{x}\, dx$ temos

$$\int \frac{\cos\left(\log\left(x\right)\right)}{x}\, dx = \int \cos(u)\, du = \sin(u) + C = \sin\left(\log\left(x\right)\right) + C$$

(b) Vamos usar a integração por partes.

$$\begin{cases} u = x & du = dx \\ dv = \cos(kx)\, dx & v = \frac{\sin(kx)}{k} \end{cases}$$

$$\int x\cos\left(kx\right) dx = x\frac{\sin(kx)}{k} - \int \frac{\sin(kx)}{k}\, dx = \frac{x\sin\left(kx\right)}{k} + \frac{\cos\left(kx\right)}{k^2} + C$$

(c) Vamos usar a substituição trigonométrica $x = \sin(\theta)$, $dx = \cos(\theta)\, d\theta$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}\, \cos(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\cos^2(\theta)}\, \cos(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} |\cos(\theta)|\, \cos(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(\theta)\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \\ &= \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

Questão 2. ....______/ 4 pts

Considere as funções $f(x) = x^3 - 4x$ e $g(x) = 4 - x^2$.

(a) [2 pts] Esboce a região limitada pelo gráfico dessas funções.

(b) [2 pts] Determine a área dessa região.

Solução:

(a) Vamos esboçar os dois gráficos juntos e a região entre eles. Como ambos são polinômios, vamos primeiro determinar suas raízes.

$$f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \pm 2.$$

e obviamente

$$g(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2.$$

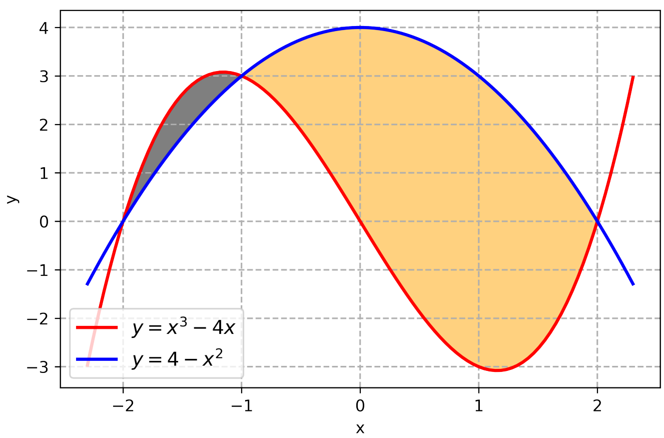
Com isso, já vemos que os gráficos se interceptam em sua raízes ± 2. Vejamos se exitem mais pontos de interseção distintos destes. De fato, se $x \neq \pm 2$, então $x^2 - 4 \neq 0$, daí,

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x(x^2 - 4) = 4 - x^2 \Rightarrow x(x^2 - 4) = -(x^2 - 4) \Rightarrow x = -1.$$

Em resumo, os pontos de interseçãosão

$$x_1 = -2,\ x_2 = -1 \text{ e } x_3 = 2.$$

Portanto, podemos facilmente esboçar os gráficos e a região de interseção.



(b) Vamos calcular a integral indefinida de $f(x) - g(x)$.

$$\int x^3 + x^2 - 4x - 4\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x + C.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} f(x) - g(x)\,dx + \int_{-1}^{2} g(x) - f(x)\,dx \\ &= \int_{-2}^{-1} x^3 + x^2 - 4x - 4\,dx + \int_{-1}^{2} -x^3 - x^2 + 4x + 4\,dx = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \end{aligned}$$