Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª Prova de Cálculo 2
21/01/2025
Turma C1– 2024-2

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Determine a solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}y(x) = xy^2(x) + 2y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Solução: Vamos determinar a solução geral da EDO. Vamos usar o método de separação de variáveis.

$$y'(x) = (x+2)y^2(x) \Rightarrow \frac{1}{y^2(x)}y'(x) = x + 2.$$

Integrando em relação a x, temos

$$\int \frac{1}{y^2(x)}y'(x)\,dx = \int x + 2\,dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^2}dy = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1,$$

donde,

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1 \Rightarrow -\frac{2}{y} = x^2 + 4x + C_2 \Rightarrow y(x) = -\frac{2}{x^2 + 4x + C_2}$$

Agora, substituindo a condição inicial, temos que

$$1 = y(0) = -\frac{2}{C_2} \Rightarrow C_2 = -2.$$

$$y(x) = -\frac{2}{x^2 + 4x - 2}$$

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Esta questão apresenta um erro de digitação. O que deveria ter saído, está em vermelho.

Considere a EDO

$$t^2\frac{d^2}{dt^2}y(t) - t\,(t+2)\,\frac{d}{dt}y(t) + (t+2)\,y(t) = \underbrace{2t}_{(2t^3)},\ t>0$$

Sabendo-se que $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = te^t$ são soluções fundamentais da EDO homogênea, determine a solução geral da não-homogênea.

Solução: A solução geral da EDO homogênea é

$$y_h(t) = c_1 t + c_2 t e^t,\ \forall t > 0. \tag{1}$$

Solução particular da EDO não-homogênea pelo método da variação dos parâmetros:
Primeiramente, vamos dividir a equação por t^2:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \frac{(t+2)\,\frac{d}{dt}y(t)}{t} + \frac{(t+2)\,y(t)}{t^2} = \underbrace{\frac{2}{t}}_{2t}$$

Suponha que a solução particular é da forma

$$y_p(t) = u_1(t)t + u_2(t)te^t.$$

Vamos calcular o Wronskiano

$$W[y_1,y_2](t) = \det\begin{pmatrix} t & te^t \\ 1 & te^t+e^t \end{pmatrix} = t^2e^t.$$

Com isso,

$$\underbrace{u_1(t) = -\int \frac{te^t\frac{2}{t}}{t^2e^t}\,dt = \int -\frac{2}{t^2}\,dt = \frac{2}{t} + C,}$$

$$u_1(t) = -\int \frac{te^t 2t}{t^2e^t}\,dt = \int -2\,dt = -2t + C,$$

$$\underbrace{u_2(t) = \int \frac{te^t\frac{2}{t}}{t^2e^t}\,dt = \int \frac{2e^{-t}}{t^2}\,dt = -2\,\mathrm{Ei}\left(te^{i\pi}\right) - \frac{2e^{-t}}{t} + C\,.}$$

$$u_2(t) = \int \frac{te^t 2t}{t^2e^t}\,dt = \int 2e^{-t}\,dt = -2e^{-t} + C.$$

Donde,

$$\underbrace{y_p(t) = -2te^t\,\mathrm{Ei}\left(te^{i\pi}\right)} \tag{2}$$

$$y_p(t) = 2t\,(-t-1)$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde de y_h é dada em (1) e y_p e dada em (2).

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Determine as possíveis soluções da seguinte EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - \alpha y(t) = 0, \quad \text{onde } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Solução: Equação Característico:

$$\lambda^2 - \alpha = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{\alpha} \text{ ou } \lambda_2 = \sqrt{\alpha}.$$

1. **Caso:** $\alpha > 0$.

$$y(t) = c_1 e^{-\sqrt{\alpha}t} + c_2 e^{\sqrt{\alpha}t}, \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. **Caso:** $\alpha = 0$.

$$y(t) = c_1 + c_2 t, \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

3. **Caso:** $\alpha < 0$.

   Neste caso, seja $\beta = -\alpha > 0$, daí, $\lambda = \pm\beta i$, donde

$$y(t) = c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t), \; \forall t \in \mathbb{R}.$$

Questão 4 (bonus). .... ______/ 1 bonus

O que você mais gostou no conteúdo da disciplina? Elabore.