Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

(a) Calcule a integral imprória

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\,(x+1)}\,dx$$

(b) A seguinte integral imprópria converge ou diverge? Justifique.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}$$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x(1+x)}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x\,(x+1)}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t -\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}\,dx\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\log(x)-\log(x+1)\Big|_{x=1}^{x=t}\right)\\ &= \lim_{t\to\infty}\left(\log\left(\frac{t}{t+1}\right)+\log(2)\right)\\ &= \log(2)\end{aligned}$$

(b) Note que

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}(x)}}} = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = 1.$$

Pelo teste da comparação no limite, como

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

converge, temos que a integral em questão também converge.

Questão 2. .... ______/ 4 pts

Justifique cada uma das igualdades abaixo.

$$\int \frac{\sec^2(x)}{(4-\tan^2(x))^{\frac{3}{2}}}\,dx \overset{(1)}{=} \int \frac{du}{(4-u^2)^{\frac{3}{2}}} \overset{(2)}{=} \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,d\theta \overset{(3)}{=} \frac{1}{4}\tan(\theta)+C \overset{(4)}{=} \frac{1}{4}\frac{\tan(x)}{\sqrt{4-\tan^2(x)}}+C$$

Solução:

(1) Substituição $u = \tan(x)$, $du = \sec^2(x)\,dx$.

(2) Fazendo $u = 2\,\mathrm{sen}(\theta)$, com $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, $du = 2\cos(\theta)\,d\theta$, temos que

$$\int \frac{du}{(4-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{2\cos(\theta)}{(4-4\,\mathrm{sen}^2(\theta))^{\frac{3}{2}}}\,d\theta = \frac{1}{8}\int \frac{2\cos(\theta)}{(1-\mathrm{sen}^2(\theta))^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos(\theta)}{\cos^3(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,d\theta$$

(3) Note que

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{4}\int \sec^2(\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\tan(\theta)+C.$$

(4)

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{u}{2} \Rightarrow \cos(\theta) = \sqrt{1-\mathrm{sen}^2(\theta)} = \frac{1}{2}\sqrt{4-u^2} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{u}{\sqrt{4-4u^2}}$$

Como $u = \tan(x)$, temos

$$\frac{1}{4}\tan(\theta) = \frac{1}{4}\frac{\tan(x)}{\sqrt{4-4\tan^2(x)}}$$

Questão 3. .... ______/ 3 pts

Considere as funções $y = x^2 - 2x + 4$ e $y = 4 - x^2$.

(a) Esboce a região limitada pelo gráfico dessas funções.

(b) Determine o volume do sólido obtido pela rotação desta região em torno do eixo x.

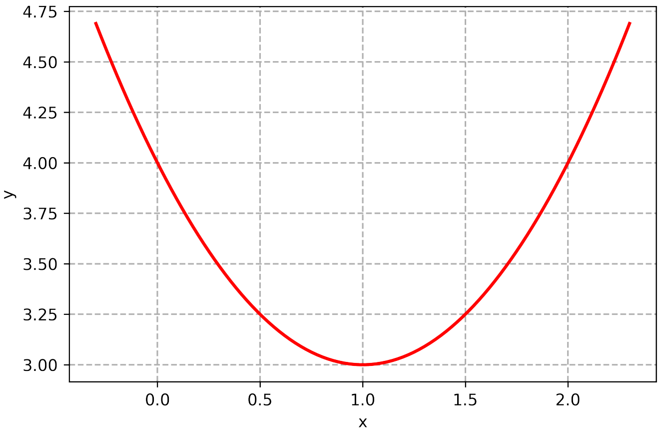
Solução:

(a) As funções são duas parábolas. Vamos esboçar cada uma separadamente primeiro.

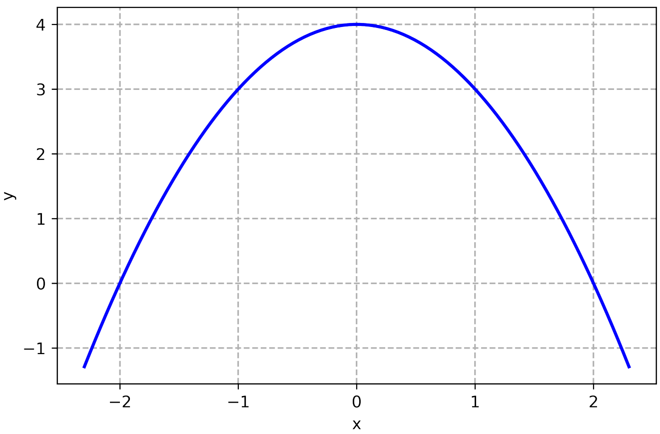
Note que, $y = x^2 - 2x + 4$ não tem raízes reais, pois:

$$\Delta = 4 - 16 = -4 < 0.$$

Portanto, é uma parábola que não intercepta o eixo x, tem concavidade voltada para cima e intercepta o eixo y em 4. Assim,

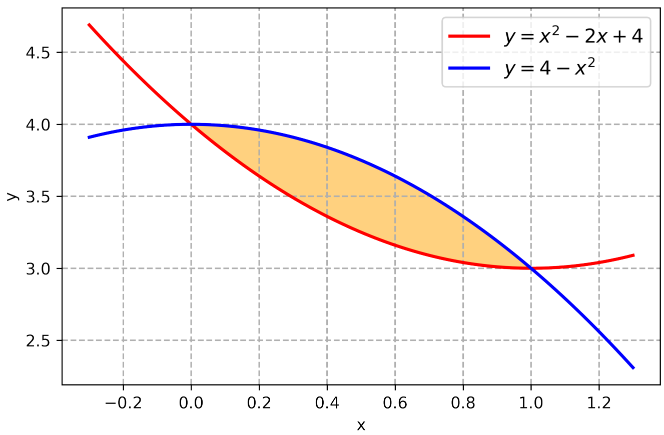


Para esboçar a outra parábola, basta transladar 4 unidade para cima do eixo y, a parábola $y = -x^2$.



Agora, vamos esboçar os dois gráficos juntos e a região entre eles. Para isso, vamos primeiramente encontrar os pontos de interseção.

$$x^2 - 2x + 4 = 4 - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 1.$$



(b) Usando o método dos discos, vemos que

$$V = \pi \int_0^1 (4 - x^2)^2 - (x^2 - 2x + 4)^2 \, dx = \pi \int_0^1 4x^3 - 20x^2 + 16x \, dx$$
$$= \pi \left(x^4 - \frac{20x^3}{3} + 8x^2 \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{7\pi}{3}.$$