Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Determine a área da região do primeiro quadrante limitada pela curva $y = \sqrt{4 - x^2}$ e a reta $x = 1$. Faça um esboço da região.

Solução: Podemos ver que a área é dada pela seguinte integral:

$$A = \int_1^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx.$$

Fazendo a substituição $x = 2\sin(\theta)$, $dx = 2\cos(\theta)\, d\theta$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2(\theta)}2\cos(\theta)d\theta \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/2} 4|\cos(\theta)|\cos(\theta)d\theta = 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2(\theta)d\theta \\
&= 4\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}d\theta = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} 1 + \cos(2\theta)d\theta \\
&= 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \frac{\sin(2\theta)}{2}\Bigg|_{\theta=\pi/6}^{x=\pi/2}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3} + \sin(2\theta)\Bigg|_{\theta=\pi/6}^{x=\pi/2} \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Questão 2. .... ______/ 6 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 9y(t) = 3\cos(3t),$$

(a) usando o método dos coeficientes a determinar.

(b) usando o método da variação dos parâmetros.

Solução:

Solução da EDO homogênea: Basta resolver a equação característica

$$9 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -3i \text{ ou } \lambda = 3i.$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = C_2\cos(3t) + C_1\sin(3t),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Solução particular da EDO não-homogênea pelo método dos coeficientes a determinar:

$$y_p(t) = t\left(B\cos(3t) + A\sin(3t)\right).$$

Com isso,

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= t\left(-3B\sin(3t) + 3A\cos(3t)\right) + B\cos(3t) + A\sin(3t) \\ &= B\cos(3t) - 3Bt\sin(3t) + A\sin(3t) + 3At\cos(3t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(t) &= 3\cdot\left(-3t\left(B\cos(3t) + A\sin(3t)\right) - 2B\sin(3t) + 2A\cos(3t)\right) \\ &= -6B\sin(3t) - 9Bt\cos(3t) + 6A\cos(3t) - 9At\sin(3t) \end{aligned}$$

Substituindo na EDO temos:

$$-6B\sin(3t) + 6A\cos(3t) = 3\cos(3t).$$

Donde,

$$A = \frac{1}{2} \text{ e } B = 0.$$

Logo,

$$y_p(t) = \frac{t\sin(3t)}{2} \tag{2}$$

(b) Solução particular da EDO não-homogênea pelo método da variação dos parâmetros: Suponha que a solução particular é da forma

$$y_p(t) = u_1(t)\sin(3t) + u_2(t)\cos(3t).$$

Vamos calcular o Wronskiano

$$W[y_1, y_2](t) = \det\begin{bmatrix} \sin(3t) & \cos(3t) \\ 3\cos(3t) & -3\sin(3t) \end{bmatrix} = -3.$$

Com isso,

$$u_1(t) = -\int \frac{\cos(3t) 3\cos(3t)}{-3}\,dt = \int \cos^2(3t)\,dt = \frac{\sin(3t)\cos(3t)}{6} + \frac{t}{2} + C,$$

$$u_2(t) = \int \frac{\cos(3t) 3\cos(3t)}{-3}\,dt = \int -\sin(3t)\cos(3t)\,dt = -\frac{\sin^2(3t)}{6} + C.$$

Donde,

$$y_p(t) = \frac{t\sin(3t)}{2} \tag{3}$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t),\ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde de y_h é dada em (1) e y_p e dada em (2) ou (3).