Universidade Federal Fluminense
Departamento de Ciências da Natureza
Campus de Rio das Ostras
Professor Reginaldo Demarque

2ª chamda da Prova de
Cálculo II
19/08/2024 – 2024-1
Turma C1

Gabarito

Questão 1. .... ______/ 4 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\left(2y+2x^2\right)\frac{d}{dx}y(x)+4xy+3x^2=0.$$

Solução: Vejamos que a equação é exata. De fato, sejam

$$M(x,y)=4xy+3x^2 \text{ e } N(x,y)=2y+2x^2.$$

Basta ver que

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4x \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x}=4x,\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Assim, buscamos $\psi=\psi(x,y)$ tal que

$$\begin{cases}\frac{\partial\psi}{\partial x}=4xy+3x^2\\ \frac{\partial\psi}{\partial y}=2y+2x^2.\end{cases}\tag{1}$$

Integrando a primeira equação em relação à x obtemos que

$$\psi(x,y)=2x^2y+x^3+g(y)$$

Agora, derivando esta em relação à y temos

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=2x^2+g'(y)$$

Usando a segunda equação de (1) temos que

$$g'(y)=2y\Rightarrow g(y)=y^2+C.$$

Com isso, a solução geral da EDO é:

$$y^2+2x^2y+x^3=C.$$

Questão 2. .... ______/ 6 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) - 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = te^t,$$

(a) usando o método dos coeficientes a determinar.

(b) usando o método da variação dos parâmetros.

Solução:

Solução da EDO homogênea: Basta resolver a equação característica

$$6 - 5\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \text{ ou } \lambda = 3.$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = C_2e^{3t} + C_1e^{2t},\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

(a) Solução particular da EDO não-homogênea pelo método dos coeficientes a determinar:

$$y_p(t) = (B + At)\, e^t.$$

Com isso,

$$y_p'(t) = (B + At)\, e^t + Ae^t \text{ e } y_p''(t) = (B + 2A + At)\, e^t.$$

Substituindo na EDO temos:

$$2Be^t - 3Ae^t + 2Ate^t = te^t.$$

Donde,

$$A = \frac{1}{2} \text{ e } B = \frac{3}{4}.$$

Logo,

$$y_p(t) = \left(\frac{3}{4} + \frac{t}{2}\right) e^t \tag{3}$$

(b) Solução particular da EDO não-homogênea pelo método da variação dos parâmetros:

Suponha que a solução particular é da forma

$$y_p(t) = u_1(t)e^{2t} + u_2(t)e^{3t}.$$

Vamos calcular o Wronskiano

$$W[y_1, y_2](t) = \det\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^{2t} & 3e^{3t} \end{bmatrix} = e^{5t}.$$

Com isso,

$$u_1(t) = -\int \frac{e^{3t}te^t}{e^{5t}}\, dt = \int -te^{-t}\, dt = (1 + t)\, e^{-t} + C,$$

$$u_2(t) = \int \frac{e^{3t}te^t}{e^{5t}}\, dt = \int te^{-2t}\, dt = \frac{(-1 - 2t)\, e^{-2t}}{4} + C.$$

Donde,

$$y_p(t) = \frac{(3 + 2t)\, e^t}{4} \tag{4}$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \ \forall t \in \mathbb{R},$$

onde de y_h é dada em (2) e y_p e dada em (3) ou (4).