Gabarito

Questão 1. .... ______/ 3 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d}{dt}y(t) - y(t)\tan(t) = \cos(t)$$

Solução: Multiplicando-se a EDO pelo fator integrante $\mu = e^{\int -\tan(t)\,dt} = \cos(t)$, temos:

$$\frac{d}{dt}(\cos(t)y(t)) = \cos^2(t).$$

Integrando em relação a t, obtemos

$$\cos(t)y(t) = \int \cos^2(t)\,dt = \frac{\sin(t)\cos(t)}{2} + \frac{t}{2} + C_1.$$

Com isso, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = \frac{\sin(2t)}{4\cos(t)} + \frac{t}{2\cos(t)} + \frac{C_1}{\cos(t)}.$$

Questão 2. .... ______/ 3,5 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + \frac{d}{dt}y(t) = 2 + t^2.$$

Solução:

Solução da EDO homogênea: Basta resolver a equação característica

$$\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 0$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = C_2 e^{-t} + C_1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Determinando uma Solução particular da EDO não homogênea: Vamos usar o método dos coeficientes a determinar. Considere a solução da forma

$$y_p(t) = t\left(C + Bt + At^2\right).$$

Com isso,

$$y_p'(t) = t\,(B + 2At) + C + Bt + At^2 \text{ e } y_p''(t) = 2 \cdot (B + 3At)\,.$$

Substituindo na EDO temos:

$$C + 2B + 2Bt + 6At + 3At^2 = 2 + t^2.$$

Donde,

$$A = \frac{1}{3}, B = -1 \text{ e } C = 4.$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = 4t - t^2 + \frac{t^3}{3} + C_2 e^{-t} + C_1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Questão 3. .... _______/ 3,5 pts

Determine a solução geral da EDO

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\frac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = \frac{e^{-2t}}{t^3}.$$

Solução:

Solução da EDO homogênea: Basta resolver a equação característica

$$4 + 4\lambda + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2.$$

Com isso a solução geral da EDO homogênea é:

$$y_h(t) = (C_2 t + C_1)\, e^{-2t},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Determinando uma Solução particular da EDO não homogênea: Vamos usar o método da variação dos parâmetros. Suponha que a solução particular é da forma

$$y_p(t) = u_1(t)e^{-2t} + u_2(t)te^{-2t}.$$

Vamos calcular o Wronskiano

$$W[y_1, y_2](t) = \det\begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} \\ -2e^{-2t} & e^{-2t} - 2te^{-2t} \end{bmatrix} = e^{-4t}.$$

Com isso,

$$u_1(t) = -\int \frac{te^{-2t}\frac{e^{-2t}}{t^3}}{e^{-4t}}\, dt = \int -\frac{1}{t^2}\, dt = \frac{1}{t} + C,$$

$$u_2(t) = \int \frac{te^{-2t}\frac{e^{-2t}}{t^3}}{e^{-4t}}\, dt = \int \frac{1}{t^3}\, dt = -\frac{1}{2t^2} + C.$$

Donde,

$$y_p(t) = \frac{e^{-2t}}{2t}$$

Portanto, a solução geral da EDO é:

$$y(t) = \left(\frac{1}{2t} + C_2 t + C_1\right) e^{-2t},\ \forall t \in \mathbb{R}.$$